理工经管类数学竞赛讲座
2021 年 10 月 10 日

初等函数的极限

①用等价无穷小量代换求极限

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)
暨南大学数学竞赛培训团队

常用的等价无穷小量

当 $x \to 0$ 时，有如下这些常用的等价无穷小量：

(1) $\sin x \sim x$

(2) $\tan x \sim x$

(3) $\arcsin x \sim x$

(4) $\arctan x \sim x$

(5) $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$

(6) $a^x - 1 \sim x \ln a$

(7) $1 - \cos x \sim \dfrac{1}{2}x^2$

(8) $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x$

等价无穷小量代换

定理 设当 $x \to x_0$ 时 α、α'、β、β' 都为无穷小量，而且 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$，则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$$

1906

等价无穷小量代换

定理 设当 $x \to x_0$ 时 α、α'、β、β' 都为无穷小量，而且 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$，则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$$

推论 设当 $x \to x_0$ 时 α 和 α' 是无穷小量，$\alpha \sim \alpha'$，而且 γ 为无穷大量，则有

$$\lim_{x \to x_0} \alpha\gamma = \lim_{x \to x_0} \alpha'\gamma$$

等价无穷小量代换

例 1 (2009 考研)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

等价无穷小量代换

例 1 (2009 考研)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

解答　$原式=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e\left(e^{\cos x-1}-1\right)}{\frac{1}{3}x^2}$

等价无穷小量代换

例 1 (2009 考研)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

解答　$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{-e\left(e^{\cos x-1}-1\right)}{\frac{1}{3}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-e(\cos x-1)}{\frac{1}{3}x^2}$$

等价无穷小量代换

例 1 (2009 考研)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e\left(e^{\cos x-1}-1\right)}{\frac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e(\cos x-1)}{\frac{1}{3}x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e\cdot\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}$$

等价无穷小量代换

例 1 (2009 考研)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e\left(e^{\cos x-1}-1\right)}{\frac{1}{3}x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-e(\cos x-1)}{\frac{1}{3}x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e\cdot\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\frac{3e}{2}.$$

等价无穷小量代换

例 2 (1995 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}$.

等价无穷小量代换

例 2 (1995 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln\sqrt{\sin t+\cos t}}{\sin t+\cos t-1}$

等价无穷小量代换

例 2 (1995 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln\sqrt{\sin t+\cos t}}{\sin t+\cos t-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\ln(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t-1}$

等价无穷小量代换

例 2 (1995 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln\sqrt{\sin t+\cos t}}{\sin t+\cos t-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\ln(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t-1}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}(\sin t+\cos t-1)}{\sin t+\cos t-1}$$

等价无穷小量代换

例 2 (1995 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln\sqrt{\sin t+\cos t}}{\sin t+\cos t-1}=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\frac{1}{2}\ln(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t-1}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}(\sin t+\cos t-1)}{\sin t+\cos t-1}=\frac{1}{2}.$$

等价无穷小量代换

例 2 (1995 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln\sqrt{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}}}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}$.

解答　$$\text{原式}=\lim_{t\to0}\frac{\ln\sqrt{\sin t+\cos t}}{\sin t+\cos t-1}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}\ln(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t-1}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{2}(\sin t+\cos t-1)}{\sin t+\cos t-1}=\frac{1}{2}.$$

注记　当 $\psi(x)\to1$ 时 $\ln[\psi(x)]=\ln[1+(\psi(x)-1)]\sim\psi(x)-1$.

等价无穷小量代换

练习 1 (1993 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{x^3\sin\dfrac{1}{x^2}}$.

等价无穷小量代换

练习 1 (1993 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{x^3\sin\dfrac{1}{x^2}}$.

练习 2 (2019 全国)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\arctan 4\sqrt[3]{1-\cos x}}$.

理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

初等函数的极限

②用洛必达法则求极限

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

洛必达法则

例 1 (1996 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^{x}+1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}$.

洛必达法则

例 1 (1996 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^{x}+1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\sqrt{1-x^{2}}-1}$

洛必达法则

例 1 (1996 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^{x}+1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\sqrt{1-x^{2}}-1}\overset{\text{等}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\frac{1}{2}(-x^{2})}$

洛必达法则

例 1 (1996 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^{x}+1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\sqrt{1-x^{2}}-1}\overset{\text{等}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\frac{1}{2}(-x^{2})}$

$\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\cos x}{-x}$

洛必达法则

例 1 (1996 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^{x}+1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\sqrt{1-x^{2}}-1}\overset{\text{等}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\frac{1}{2}(-x^{2})}$

$$\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-\cos x}{-x}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}+\sin x}{-1}$$

洛必达法则

例 1 (1996 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^{x}+1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\sqrt{1-x^{2}}-1}\overset{\text{等}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\frac{1}{2}(-x^{2})}$

$$\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-\cos x}{-x}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}+\sin x}{-1}=-1.$$

洛必达法则

例 1 (1996 北京)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^{x}+1}{1-\sqrt{1-x^{2}}}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\sqrt{1-x^{2}}-1}\overset{\text{等}}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\sin x-1}{\frac{1}{2}(-x^{2})}$

$$\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}-\cos x}{-x}\overset{\text{洛}}{=\!=}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}+\sin x}{-1}=-1.$$

注记　优先使用等价无穷小量代换，然后再用洛必达法则.

洛必达法则

练习 1 (2011 考研)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

洛必达法则

练习 1 (2011 考研)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

练习 2 (2013 全国决赛)　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x-x^2\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

理工经管类数学竞赛讲座
2021 年 10 月 10 日

初等函数的极限

③用泰勒公式求极限

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)
暨南大学数学竞赛培训团队

定理 1 (带佩亚诺余项的泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 点存在 n 阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

定理 1 (带佩亚诺余项的泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 点存在 n 阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$
$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

注记 当 $n=1$，$x_0=0$ 时，若 $f'(0)\neq 0$，公式等价于

$$f(x)-f(0)\sim f'(0)x \quad (x\to 0).$$

定理 2 (带拉格朗日余项的泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 某邻域 $U(x_0)$ 内有 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in U(x_0)$ 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

定理 2 (带拉格朗日余项的泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 某邻域 $U(x_0)$ 内有 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in U(x_0)$ 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 +\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

注记　当 $n=0$ 时，公式为中值定理 $f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0)$.

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = o(x^n)$ ..... 佩亚诺余项

或者 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ ..... 拉格朗日余项

ξ 介于 0 和 x 之间.

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = o(x^n)$ ..... 佩亚诺余项

或者 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ ..... 拉格朗日余项

ξ 介于 0 和 x 之间.

令 $\xi = \theta x$，则 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

初等函数的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2k})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2k+1})$$

初等函数的麦克劳林公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+C_\alpha^1x+C_\alpha^2x^2+\cdots+C_\alpha^nx^n+o(x^n)$$

初等函数的麦克劳林公式

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+C_\alpha^1x+C_\alpha^2x^2+\cdots+C_\alpha^nx^n+o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+o(x^2)$$

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

解答　利用 $\sqrt{1+x}$ 的 2 阶麦克劳林公式，求得

$$\sqrt{4+3x}=2\sqrt{1+\frac{3x}{4}}=2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3x}{4}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{3x}{4}\right)^2+o(x^2)\right)$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{9}{64}x^2+o(x^2),$$

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

解答　利用 $\sqrt{1+x}$ 的 2 阶麦克劳林公式，求得

$$\sqrt{4+3x}=2\sqrt{1+\frac{3x}{4}}=2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3x}{4}-\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{3x}{4}\right)^2+o(x^2)\right)$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{9}{64}x^2+o(x^2),$$

$$\sqrt{4-3x}=2-\frac{3}{4}x-\frac{9}{64}x^2+o(x^2).$$

利用麦克劳林公式求极限

已经求得

$$\sqrt{4+3x}=2+\frac{3}{4}x-\frac{9}{64}x^2+o(x^2),$$

$$\sqrt{4-3x}=2-\frac{3}{4}x-\frac{9}{64}x^2+o(x^2).$$

利用麦克劳林公式求极限

已经求得

$$\sqrt{4+3x}=2+\frac{3}{4}x-\frac{9}{64}x^2+o(x^2),$$

$$\sqrt{4-3x}=2-\frac{3}{4}x-\frac{9}{64}x^2+o(x^2).$$

代入原极限得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{9}{32}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}.$$

例 2　求 $f(x)=(1+x)^{1/x}$ 的带佩亚诺余项的 2 阶麦克劳林公式.

例 2　求 $f(x)=(1+x)^{1/x}$ 的带佩亚诺余项的 2 阶麦克劳林公式.

解答　$f(x)=\mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}$,

例 2　求 $f(x)=(1+x)^{1/x}$ 的带佩亚诺余项的 2 阶麦克劳林公式.

解答　$f(x)=\mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}$，由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ 得

例 2　求 $f(x)=(1+x)^{1/x}$ 的带佩亚诺余项的 2 阶麦克劳林公式.

解答　$f(x)=\mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}$，由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ 得

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2).$$

例 2　求 $f(x)=(1+x)^{1/x}$ 的带佩亚诺余项的 2 阶麦克劳林公式.

解答　$f(x)=\mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}$, 由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ 得

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2).$$

再由 $\mathrm{e}^x=1+x+x^2/2+o(x^2)$ 得

例 2　求 $f(x)=(1+x)^{1/x}$ 的带佩亚诺余项的 2 阶麦克劳林公式.

解答　$f(x)=\mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}$，由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ 得

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2).$$

再由 $\mathrm{e}^x=1+x+x^2/2+o(x^2)$ 得

$$f(x)=\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}$$

例 2　求 $f(x)=(1+x)^{1/x}$ 的带佩亚诺余项的 2 阶麦克劳林公式.

解答　$f(x)=\mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}$，由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ 得

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2).$$

再由 $\mathrm{e}^x=1+x+x^2/2+o(x^2)$ 得

$$f(x)=\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}$$

$$=\mathrm{e}\left[1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\right)^2+o(x^2)\right]$$

例 2　求 $f(x)=(1+x)^{1/x}$ 的带佩亚诺余项的 2 阶麦克劳林公式.

解答　$f(x)=\mathrm{e}^{\ln(1+x)/x}$，由 $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$ 得

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2).$$

再由 $\mathrm{e}^x=1+x+x^2/2+o(x^2)$ 得

$$\begin{aligned}f(x)&=\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2+o(x^2)}\\&=\mathrm{e}\left[1+\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\right)+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}x^2\right)^2+o(x^2)\right]\\&=\mathrm{e}\left[1-\frac{1}{2}x+\frac{11}{24}x^2+o(x^2)\right].\end{aligned}$$

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\,e^{\sin x}-x\cos x\,e^{x\cos x}}{x^3}$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\,\mathrm{e}^{\sin x}-x\cos x\,\mathrm{e}^{x\cos x}}{x^3}$.

分析　由洛必达法则或泰勒公式，可求得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\,\mathrm{e}^{\sin x}-x\cos x\,\mathrm{e}^{x\cos x}}{x^3}$.

分析　由洛必达法则或泰勒公式，可求得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

解答　令 $f(t)=t\mathrm{e}^t$，则 $f'(t)=(t+1)\mathrm{e}^t$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\,\mathrm{e}^{\sin x}-x\cos x\,\mathrm{e}^{x\cos x}}{x^3}$.

分析　由洛必达法则或泰勒公式，可求得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

解答　令 $f(t)=t\mathrm{e}^t$，则 $f'(t)=(t+1)\mathrm{e}^t$. 由拉格朗日中值定理，在 $x\cos x$ 和 $\sin x$ 之间存在 ξ，使得

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\,\mathrm{e}^{\sin x}-x\cos x\,\mathrm{e}^{x\cos x}}{x^3}$.

分析　由洛必达法则或泰勒公式，可求得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

解答　令 $f(t)=t\mathrm{e}^t$，则 $f'(t)=(t+1)\mathrm{e}^t$. 由拉格朗日中值定理，在 $x\cos x$ 和 $\sin x$ 之间存在 ξ，使得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)(\xi+1)\mathrm{e}^{\xi}}{x^3}$$

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\,\mathrm{e}^{\sin x}-x\cos x\,\mathrm{e}^{x\cos x}}{x^3}$.

分析　由洛必达法则或泰勒公式，可求得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

解答　令 $f(t)=t\mathrm{e}^t$，则 $f'(t)=(t+1)\mathrm{e}^t$. 由拉格朗日中值定理，在 $x\cos x$ 和 $\sin x$ 之间存在 ξ，使得

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)(\xi+1)\mathrm{e}^{\xi}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\lim_{x\to 0}(\xi+1)\mathrm{e}^{\xi}$$

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\,\mathrm{e}^{\sin x}-x\cos x\,\mathrm{e}^{x\cos x}}{x^3}$.

分析　由洛必达法则或泰勒公式，可求得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x\cos x}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

解答　令 $f(t)=t\mathrm{e}^t$，则 $f'(t)=(t+1)\mathrm{e}^t$. 由拉格朗日中值定理，在 $x\cos x$ 和 $\sin x$ 之间存在 ξ，使得

注意 $x\to 0$ 时 $\xi\to 0$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x\cos x)(\xi+1)\mathrm{e}^{\xi}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x\cos x}{x^3}\lim_{x\to 0}(\xi+1)\mathrm{e}^{\xi}=\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{3}.$$

用泰勒公式求极限

练习 1 (2008 北京) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{1/x}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

用泰勒公式求极限

练习 1 (2008 北京) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{1/x}-\sqrt{1+x^6}\right]$.

练习 2 (2013 全国决赛) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3+\dfrac{x}{2}-\tan\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}-\sqrt{1+x^6}\right]$.