理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

抽象函数的极限

①两个极限之间的关系

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

两个极限之间的关系

例 1 (2011 广东)　已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{5^x-1}=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

两个极限之间的关系

例 1 (2011 广东)　已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{5^x-1}=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解答　在已知极限中，分母是无穷小量，故分子也是无穷小量.

两个极限之间的关系

例 1 (2011 广东)　已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{5^x-1}=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解答　在已知极限中，分母是无穷小量，故分子也是无穷小量．则

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{5^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)/\sin 2x}{x\ln 5}$$

两个极限之间的关系

例 1 (2011 广东) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{5^x-1}=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解答 在已知极限中，分母是无穷小量，故分子也是无穷小量．则

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{5^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)/\sin 2x}{x\ln 5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x\cdot x\ln 5}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2\ln 5\cdot x^2}.$$

两个极限之间的关系

例 1 (2011 广东) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{5^x-1}=3$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

解答 在已知极限中，分母是无穷小量，故分子也是无穷小量．则

$$3=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x}\right)}{5^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)/\sin 2x}{x\ln 5}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x\cdot x\ln 5}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2\ln 5\cdot x^2}.$$

从而得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=6\ln 5$.

两个极限之间的关系

练习1（2005北京）

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\right]=4$,

计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

两个极限之间的关系

练习 1 (2005 北京) 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2^x-1}\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{1-\cos x}\right]=4$，计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

练习 2 (2014 全国) 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x+\dfrac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^3$，计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

抽象函数的极限

②一阶导数与极限的关系

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

一阶导数与极限的关系

例 1　设 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{x^2}$.

一阶导数与极限的关系

例 1 设 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{x^2}$.

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}$

JINAN UNIVERSITY 1906

一阶导数与极限的关系

例 1 设 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{x^2}$.

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}\cdot\lim_{t\to 1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}$$

一阶导数与极限的关系

例 1 设 $f(1)=0$ 且 $f'(1)$ 存在，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)}{x^2}$.

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-f(1)}{\cos x-1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2/2}{x^2}\cdot\lim_{t\to 1}\frac{f(t)-f(1)}{t-1}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot f'(1).$$

一阶导数与极限的关系

练习 1 (2016 全国)　若 $f(1)=0$，$f'(1)$ 存在，求极限

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}.$$

一阶导数与极限的关系

练习 1 (2016 全国)　若 $f(1)=0$，$f'(1)$ 存在，求极限

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x+\cos x)\tan 3x}{(e^{x^2}-1)\sin x}.$$

练习 2 (1998 北京)　设 $f(x)$ 有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，$f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}[1+f(x)]^{\frac{1}{\ln(1+x)}}$.

理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

抽象函数的极限

③二阶导数与极限的关系

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

二阶导数与极限的关系

例 1 (2017 全国)　设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

二阶导数与极限的关系

例 1 (2017 全国)　设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

解答　由带佩亚诺余项的泰勒公式，我们有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)$$

二阶导数与极限的关系

例 1 (2017 全国)　设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

解答　由带佩亚诺余项的泰勒公式，我们有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=3x^2+o(x^2).$$

二阶导数与极限的关系

例 1 (2017 全国)　设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

解答　由带佩亚诺余项的泰勒公式，我们有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=3x^2+o(x^2).$$

从而原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^4 x+o(\sin^4 x)}{x^4}$

二阶导数与极限的关系

例 1 (2017 全国) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

解答 由带佩亚诺余项的泰勒公式，我们有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=3x^2+o(x^2).$$

从而原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^4 x+o(\sin^4 x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^4 x+o(x^4)}{x^4}$

二阶导数与极限的关系

例 1 (2017 全国) 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f''(0)=6$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\sin^2 x)}{x^4}$.

解答 由带佩亚诺余项的泰勒公式，我们有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+o(x^2)=3x^2+o(x^2).$$

从而原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^4 x+o(\sin^4 x)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin^4 x+o(x^4)}{x^4}=3.$

练习 1 (1999 北京) 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3,$$

求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

练习 1 (1999 北京) 设 $f(x)$ 具有连续的二阶导数，且

$$\lim_{x\to 0}\left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^3,$$

求 $f(0), f'(0), f''(0)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

练习 2 (2012 全国) 设函数 $y=f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0$, $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$，其中 u 是曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x,f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距.