理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

具体数列的极限

①用函数极限求数列极限

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

用函数极限求数列极限

例 1 (2011 全国决赛)　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right)$.

用函数极限求数列极限

例 1 (2011 全国决赛)　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right)$.

解答　令 $t = 1/n$，则只需计算关于 t 的函数极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{1/t}-\mathrm{e}}{t}$$

用函数极限求数列极限

例 1 (2011 全国决赛) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right)$.

解答 令 $t = 1/n$，则只需计算关于 t 的函数极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{1/t}-\mathrm{e}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\ln(1+t)/t}-\mathrm{e}}{t} = \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\ln(1+t)/t-1}-1}{t}$$

用函数极限求数列极限

例 1 (2011 全国决赛) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right)$.

解答 令 $t = 1/n$，则只需计算关于 t 的函数极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{1/t}-\mathrm{e}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\ln(1+t)/t}-\mathrm{e}}{t} = \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\ln(1+t)/t-1}-1}{t}$$

$$\overset{\text{等}}{=\!=} \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)/t-1}{t} = \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

用函数极限求数列极限

例 1 (2011 全国决赛) 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}\right)$.

解答 令 $t = 1/n$，则只需计算关于 t 的函数极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^{1/t}-\mathrm{e}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\ln(1+t)/t}-\mathrm{e}}{t} = \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\ln(1+t)/t-1}-1}{t}$$

$$\overset{\text{等}}{=\!=} \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)/t-1}{t} = \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$\overset{\text{洛}}{=\!=} \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{1/(1+t)-1}{2t} = \mathrm{e}\lim_{t\to 0}\frac{-1}{2(1+t)} = -\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

用函数极限求数列极限

练习 1 (2008 北京)　求极限

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right].$$

理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

具体数列的极限

②用施笃兹公式求数列极限

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

定理 1 (Stolz) 设数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足以下条件

(1) 数列 $\{y_n\}$ 严格递增且趋于 $+\infty$；

(2) 数列 $\left\{\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}$ 收敛（或趋于 $\pm\infty$）.

则数列 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 也收敛（或趋于 $\pm\infty$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

定理 1 (Stolz) 设数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足以下条件

(1) 数列 $\{y_n\}$ 严格递增且趋于 $+\infty$；

(2) 数列 $\left\{\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}$ 收敛（或趋于 $\pm\infty$）.

则数列 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 也收敛（或趋于 $\pm\infty$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

例 1 设 $\alpha>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}}=\dfrac{1}{\alpha}$.

Stolz 公式

例 1 设 $\alpha > 0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}} = \dfrac{1}{\alpha}$.

解答

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^{\alpha-1}+2^{\alpha-1}+\cdots+n^{\alpha-1}}{n^{\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{\alpha-1}}{(n+1)^{\alpha}-n^{\alpha}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-1}}{\alpha\cdot\frac{1}{n}} = \frac{1}{\alpha}.$$

Stolz 公式

练习 1　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

定理 2 (Stolz) 设数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 满足以下条件

(1) 数列 $\{x_n\}$ 趋于 0；

(2) 数列 $\{y_n\}$ 严格递减且趋于 0；

(3) 数列 $\left\{\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}$ 收敛（或趋于 $\pm\infty$）.

则数列 $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ 也收敛（或趋于 $\pm\infty$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

具体数列的极限

③用单调有界准则求数列极限

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

单调有界准则

定理 1 (单调有界准则) 单调且有界的数列必定收敛.

(1) 单调增加且有上界的数列必定收敛.

(2) 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记 若数列是某一项开始单调变化的，结论仍然成立.

例 1　设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

例 1 设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

解答 因为 $x_n = \dfrac{n!}{n^n} > 0$，而且

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} < 1,$$

由单调有界准则，数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例 1 设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

解答 因为 $x_n = \dfrac{n!}{n^n} > 0$，而且

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}} = \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} < 1,$$

由单调有界准则，数列 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，由上面等式得

$$\mathrm{e}A = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \Rightarrow \quad A = 0.$$

单调有界准则

练习 1 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

(1) 利用单调有界准则证明数列 $\{x_n\}$ 收敛;

(2) 利用数列 $\{x_n\}$ 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$.

单调有界准则

练习 1 设 $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$.

(1) 利用单调有界准则证明数列 $\{x_n\}$ 收敛;

(2) 利用数列 $\{x_n\}$ 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$.

理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

具体数列的极限

④用迫敛准则求数列极限

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

迫敛准则

定理 1 (数列极限的迫敛性) 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 为三个数列，且存在 $N_0 > 0$，当 $n > N_0$ 时有

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n.$$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

迫敛准则

例 1 (2012 全国)　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}$.

迫敛准则

例 1 (2012 全国)　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}$.

解答　注意到

$$1 \leqslant (n!)^{1/n^2} \leqslant (n^n)^{1/n^2} = n^{1/n},$$

以及极限 $\lim\limits_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$，由迫敛准则得

$$\lim_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2} = 1.$$

迫敛准则

例 2　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

迫敛准则

例 2　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$.

解答　对原数列作放缩以方便求和得

$$n\cdot\frac{n}{n^2+n}\leqslant\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\leqslant n\cdot\frac{n}{n^2+1}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{n}{n^2+n}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}n\cdot\dfrac{n}{n^2+1}=1$，由迫敛准则可得，原数列的极限也为 1.

迫敛准则

练习 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

练习 2 (2010 北京)　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

迫敛准则

练习3　设 $x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

具体数列的极限

⑤利用定积分求数列极限

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

例 1　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

例 1　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

注记　直接用迫敛准则很难求出这个数列极限.

例 1 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

注记 直接用迫敛准则很难求出这个数列极限.

解答 (方法 1) 由定积分的定义可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2.$$

例 1 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

解答 (方法 2) 由函数的单调性和定积分的保号性可得

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}\leqslant\frac{1}{n+k}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}$$

例 1 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

解答 (方法 2) 由函数的单调性和定积分的保号性可得

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}\leqslant\frac{1}{n+k}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}$$

$$\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}$$

例 1 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

解答 (方法 2) 由函数的单调性和定积分的保号性可得

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}\leqslant\frac{1}{n+k}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}$$

$$\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}$$

$$\Rightarrow\quad\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)=\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\int_0^{n}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}=\ln 2$$

例 1 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

解答 (方法 2) 由函数的单调性和定积分的保号性可得

$$\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}\leqslant\frac{1}{n+k}\leqslant\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}$$

$$\Rightarrow\quad\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}$$

$$\Rightarrow\quad\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)=\int_1^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\leqslant\int_0^{n}\frac{\mathrm{d}x}{n+x}=\ln 2$$

令 $n\to\infty$，即得所求数列极限为 $\ln 2$.

例 2 (1998 考研)　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{2}{\pi}.$

例 2 (1998 考研) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)=\dfrac{2}{\pi}.$

解答 先对数列作放缩：

$$\frac{n}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\dfrac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}$ 可得结论.

利用定积分求数列极限

练习 1 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{n^2}\dfrac{n}{n^2+k^2}$.

例 3 (2014 全国)　设 $A_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right)$.

例 3 (2014 全国)　设 $A_n = \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{\pi}{4} - A_n\right)$.

解答　令 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_i = \frac{i}{n}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ 得

例 3 (2014 全国) 设 $A_n = \dfrac{n}{n^2+1^2} + \dfrac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{\pi}{4} - A_n\right)$.

解答 令 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x_i = \dfrac{i}{n}$, 由 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{\pi}{4}$ 得

$$\frac{\pi}{4} - A_n = \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\cdot f(x_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(f(x) - f(x_i)\Big)\,\mathrm{d}x.$$

解答 (续)　由分部积分公式和积分第一中值定理可得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(f(x)-f(x_i)\Big)\,\mathrm{d}x=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(f(x)-f(x_i)\Big)\,\mathrm{d}\Big(x-x_{i-1}\Big)$$

$$=\Big[\Big(f(x)-f(x_i)\Big)\Big(x-x_{i-1}\Big)\Big]_{x_{i-1}}^{x_i}-\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(x)(x-x_{i-1})\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(x)(x-x_{i-1})\,\mathrm{d}x=-f'(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{f'(\eta_i)}{2}(x_i-x_{i-1})^2=-\frac{f'(\eta_i)}{2n^2}.$$

解答 (续)　由分部积分公式和积分第一中值定理可得

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(f(x)-f(x_i)\Big)\,\mathrm{d}x=\int_{x_{i-1}}^{x_i}\Big(f(x)-f(x_i)\Big)\,\mathrm{d}\Big(x-x_{i-1}\Big)$$

$$=\Big[\Big(f(x)-f(x_i)\Big)\Big(x-x_{i-1}\Big)\Big]_{x_{i-1}}^{x_i}-\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(x)(x-x_{i-1})\,\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{x_{i-1}}^{x_i}f'(x)(x-x_{i-1})\,\mathrm{d}x=-f'(\eta_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})\,\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{f'(\eta_i)}{2}(x_i-x_{i-1})^2=-\frac{f'(\eta_i)}{2n^2}.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{\pi}{4}-A_n\right)=-\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{n}f'(\eta_i)=-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$

部分和的估计

练习 2 设 $k>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\dfrac{n}{k+1}\right]=\dfrac{1}{2}$.

部分和的估计

练习 2 设 $k>0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^k}-\dfrac{n}{k+1}\right]=\dfrac{1}{2}$.

练习 3 (2016 全国) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，$f(0)=0, f(1)=1$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=-\frac{1}{2}.$$

部分和的估计

练习 4 (2017 全国数学类) 设 $f(x) = \arctan x$，A 为常数，若 $B = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - An\right)$ 存在，求 A, B.

部分和的估计

注记 一般地，设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上具有连续导数，则有

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right)\right] = -\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{2}.$$