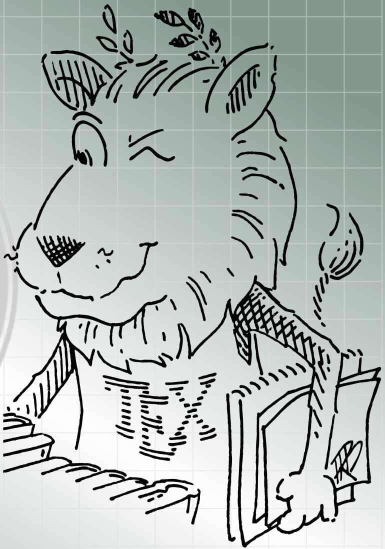
理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

递推数列的极限

①一阶递推数列的极限

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)
暨南大学数学竞赛培训团队



一阶差分方程

定义 1　设 $\{x_n\}$ 为数列，形如 $F(n, x_n, x_{n+1}) = 0$ 的方程称为**一阶差分方程**．比如 $x_{n+1} - nx_n = 1$.

一阶差分方程

定义 1　设 $\{x_n\}$ 为数列，形如 $F(n, x_n, x_{n+1}) = 0$ 的方程称为一阶差分方程. 比如 $x_{n+1} - nx_n = 1$.

定义 2　形如 $x_{n+1} - ax_n = d$（其中 a, d 为常数）的差分方程称为一阶常系数线性差分方程.

一阶差分方程

定义 1　设 $\{x_n\}$ 为数列，形如 $F(n, x_n, x_{n+1}) = 0$ 的方程称为一阶差分方程．比如 $x_{n+1} - nx_n = 1$.

定义 2　形如 $x_{n+1} - ax_n = d$（其中 a, d 为常数）的差分方程称为一阶常系数线性差分方程.

(1) 当 $a = 1$ 时，通解为 $x_n = dn + C$.

(2) 当 $a \neq 1$ 时，通解为 $x_n = \dfrac{d}{1-a} + Ca^n$.

其中常数 C 可由初始项 x_1 决定.

不动点方法

定义 对函数 $f(x)$，如果有 $x_0 = f(x_0)$ 成立，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的不动点.

不动点方法

定义　对函数 $f(x)$，如果有 $x_0 = f(x_0)$ 成立，则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的不动点.

结论　设数列 $\{x_n\}$ 由递推公式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 给出，且有极限 x_0. 若 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 x_0 必为 $f(x)$ 的不动点.

例 1 (2019 华为杯) 定义数列 $\{x_n\}$ 如下：

$$x_0 = 0,\ x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4},\quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

例 1 (2019 华为杯) 定义数列 $\{x_n\}$ 如下：

$$x_0 = 0,\ x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4},\quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

解答 (1) 假设数列收敛，极限为 A，则 $A = A^2 + \dfrac{1}{4}$. 解得 $A = \dfrac{1}{2}$.

例 1 (2019 华为杯)　定义数列 $\{x_n\}$ 如下：

$$x_0 = 0,\ x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4},\quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

解答　(1) 假设数列收敛，极限为 A，则 $A = A^2 + \dfrac{1}{4}$. 解得 $A = \dfrac{1}{2}$.

(2) 由于 $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_{n-1}^2$，利用数学归纳法可得数列 $\{x_n\}$ 单调增加.

例 1 (2019 华为杯)　定义数列 $\{x_n\}$ 如下：

$$x_0 = 0,\ x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4},\quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

解答　(1) 假设数列收敛，极限为 A，则 $A = A^2 + \dfrac{1}{4}$. 解得 $A = \dfrac{1}{2}$.

(2) 由于 $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_{n-1}^2$，利用数学归纳法可得数列 $\{x_n\}$ 单调增加. 再利用数学归纳法可得 $x_n < \dfrac{1}{2}$ 有上界.

例 1 (2019 华为杯)　定义数列 $\{x_n\}$ 如下：

$$x_0 = 0,\ x_{n+1} = x_n^2 + \frac{1}{4},\quad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

解答　(1) 假设数列收敛，极限为 A，则 $A = A^2 + \dfrac{1}{4}$. 解得 $A = \dfrac{1}{2}$.

(2) 由于 $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_{n-1}^2$，利用数学归纳法可得数列 $\{x_n\}$ 单调增加. 再利用数学归纳法可得 $x_n < \dfrac{1}{2}$ 有上界. 由单调有界定理知数列 $\{x_n\}$ 确实收敛.

例 2 (1988 北京) 设有数列 $\{x_n\}$ 定义如下：

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2 + \frac{1}{x_1},\ \cdots,\ x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n},\ \cdots$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

分析 从数列的前几项，可以看出数列不是单调的：

$$x_1 = 2,\quad x_3 = \frac{12}{5} = 2.4,\quad x_5 = \frac{70}{29} \approx 2.4138,\quad \cdots$$

$$x_2 = \frac{5}{2} = 2.5,\quad x_4 = \frac{29}{12} \approx 2.4167,\quad x_6 = \frac{169}{70} \approx 2.4143,\quad \cdots$$

例 2 (1988 北京)　设有数列 $\{x_n\}$ 定义如下：

$$x_1 = 2,\ x_2 = 2 + \frac{1}{x_1},\ \cdots,\ x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n},\ \cdots$$

求证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

分析　从数列的前几项，可以看出数列不是单调的：

$$x_1 = 2,\quad x_3 = \frac{12}{5} = 2.4,\quad x_5 = \frac{70}{29} \approx 2.4138,\quad \cdots$$

$$x_2 = \frac{5}{2} = 2.5,\quad x_4 = \frac{29}{12} \approx 2.4167,\quad x_6 = \frac{169}{70} \approx 2.4143,\quad \cdots$$

但是可以观察到 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 分别是单调增加和单调减少的.

解答 (方法 1) 用数学归纳法易知 $2 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{5}{2}$.

解答 (方法 1)　用数学归纳法易知 $2 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{5}{2}$. 计算得

$$x_{n+2} - x_n = \frac{-2\left[x_n - (1+\sqrt{2})\right]\left[x_n - (1-\sqrt{2})\right]}{2x_n + 1},$$

解答 (方法 1) 用数学归纳法易知 $2 \leqslant x_n \leqslant \frac{5}{2}$. 计算得

$$x_{n+2} - x_n = \frac{-2\left[x_n - (1+\sqrt{2})\right]\left[x_n - (1-\sqrt{2})\right]}{2x_n + 1},$$

因此 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 分别单调增加和单调减少，从而都收敛.

解答 (方法 1)　用数学归纳法易知 $2 \leqslant x_n \leqslant \dfrac{5}{2}$. 计算得

$$x_{n+2} - x_n = \frac{-2\left[x_n - (1+\sqrt{2})\right]\left[x_n - (1-\sqrt{2})\right]}{2x_n + 1},$$

因此 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 分别单调增加和单调减少，从而都收敛. 设它们的极限分别为 B 和 C，则有

$$B = \lim_{n\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{x_{2k}}\right) = 2 + \frac{1}{C},$$

$$C = \lim_{n\to\infty} x_{2k} = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{x_{2k-1}}\right) = 2 + \frac{1}{B}.$$

解答 (方法 1) 用数学归纳法易知 $2 \leqslant x_n \leqslant \frac{5}{2}$. 计算得

$$x_{n+2} - x_n = \frac{-2\left[x_n - (1+\sqrt{2})\right]\left[x_n - (1-\sqrt{2})\right]}{2x_n + 1},$$

因此 $\{x_{2k-1}\}$ 和 $\{x_{2k}\}$ 分别单调增加和单调减少，从而都收敛. 设它们的极限分别为 B 和 C，则有

$$B = \lim_{n\to\infty} x_{2k+1} = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{x_{2k}}\right) = 2 + \frac{1}{C},$$

$$C = \lim_{n\to\infty} x_{2k} = \lim_{n\to\infty}\left(2 + \frac{1}{x_{2k-1}}\right) = 2 + \frac{1}{B}.$$

解得惟一正解 $B = C = 1 + \sqrt{2}$，从而 $\{x_n\}$ 的极限也为 $1 + \sqrt{2}$.

例 2 (1988 北京) 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 = 2$，$x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

解答 (方法 2) (1) 假设数列收敛，则极限为 $A > 0$，则 $A = 2+\dfrac{1}{A}$. 解得正解 $A = 1 + \sqrt{2}$.

例 2 (1988 北京)　设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=2$，$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$.
求证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

解答 (方法 2)　(1) 假设数列收敛，则极限为 $A>0$，则 $A=2+\dfrac{1}{A}$.
解得正解 $A=1+\sqrt{2}$.

(2) $|x_n-A|=\left|\left(2+\dfrac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\dfrac{1}{A}\right)\right|$

例 2 (1988 北京)　设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 = 2$，$x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

解答 (方法 2)　(1) 假设数列收敛，则极限为 $A > 0$，则 $A = 2 + \dfrac{1}{A}$. 解得正解 $A = 1 + \sqrt{2}$.

(2) $$|x_n - A| = \left|\left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{A}\right)\right| = \left|\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{A}\right|$$

例 2 (1988 北京) 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 = 2$，$x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$.
求证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

解答 (方法 2) (1) 假设数列收敛，则极限为 $A > 0$，则 $A = 2+\dfrac{1}{A}$.
解得正解 $A = 1 + \sqrt{2}$.

(2) $$|x_n - A| = \left|\left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{A}\right)\right| = \left|\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{A}\right|$$
$$= \frac{|x_{n-1} - A|}{A x_{n-1}}$$

例 2 (1988 北京)　设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 = 2$，$x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$.
求证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

解答 (方法 2)　(1) 假设数列收敛，则极限为 $A > 0$，则 $A = 2+\dfrac{1}{A}$.
解得正解 $A = 1 + \sqrt{2}$.

(2) $$|x_n - A| = \left|\left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{A}\right)\right| = \left|\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{A}\right|$$
$$= \frac{|x_{n-1} - A|}{Ax_{n-1}} < \frac{|x_{n-1} - A|}{4}$$

例 2 (1988 北京)　设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1 = 2$，$x_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{x_n}$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

解答 (方法 2)　(1) 假设数列收敛，则极限为 $A > 0$，则 $A = 2 + \dfrac{1}{A}$. 解得正解 $A = 1 + \sqrt{2}$.

$$(2)\ |x_n - A| = \left|\left(2 + \frac{1}{x_{n-1}}\right) - \left(2 + \frac{1}{A}\right)\right| = \left|\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{A}\right|$$

$$= \frac{|x_{n-1} - A|}{A x_{n-1}} < \frac{|x_{n-1} - A|}{4} < \cdots < \frac{|x_1 - A|}{4^{n-1}} \to 0,$$

例 2 (1988 北京) 设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1=2$，$x_{n+1}=2+\dfrac{1}{x_n}$. 求证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并求其值.

解答 (方法 2) (1) 假设数列收敛，则极限为 $A>0$，则 $A=2+\dfrac{1}{A}$. 解得正解 $A=1+\sqrt{2}$.

(2) $$|x_n-A|=\left|\left(2+\frac{1}{x_{n-1}}\right)-\left(2+\frac{1}{A}\right)\right|=\left|\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{A}\right|$$

$$=\frac{|x_{n-1}-A|}{Ax_{n-1}}<\frac{|x_{n-1}-A|}{4}<\cdots<\frac{|x_1-A|}{4^{n-1}}\to 0,$$

由极限定义 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$.

练习 1 (2018 考研) 设数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1 > 0, \quad x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1, \ n = 1, 2, \cdots$$

证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

练习 2 (伯克利问题 1.3.11) 令 $f(x)=\frac{1}{4}+x-x^2$. 对任意实数 x，定义数列 $\{x_n\}$ 如下：

$$x_0=x,\ x_{n+1}=f(x_n).$$

如果该数列收敛，记其极限为 x_∞.

(1) 若 $x=0$，证明数列 $\{x_n\}$ 有界且广义单增，并求 x_∞ 的值（记为 λ）.

(2) 求所有的 y 使得 $y_\infty=\lambda$.

理工经管类数学竞赛讲座

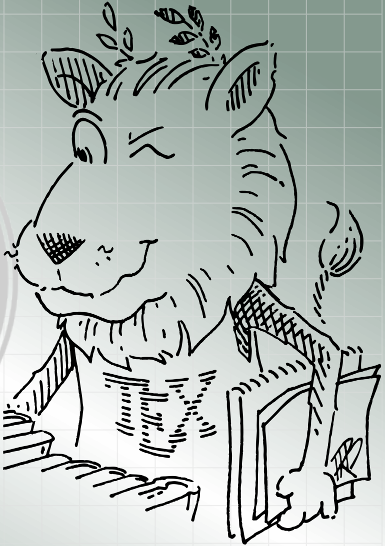
2021 年 10 月 10 日

递推数列的极限

②二阶递推数列的极限

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队



二阶差分方程

定义 1　设 $\{x_n\}$ 为数列，形如 $F(n, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0$ 的方程称为二阶差分方程．比如 $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = n$.

二阶差分方程

定义 1　设 $\{x_n\}$ 为数列，形如 $F(n, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0$ 的方程称为二阶差分方程．比如 $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = n$.

定义 2　形如 $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$（其中 a, b 为常数）的差分方程称为二阶常系数线性齐次差分方程.

二阶差分方程

定义 1　设 $\{x_n\}$ 为数列，形如 $F(n, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0$ 的方程称为二阶差分方程．比如 $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = n$.

定义 2　形如 $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$（其中 a, b 为常数）的差分方程称为二阶常系数线性齐次差分方程.

设它的特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的两个解为 λ_1 和 λ_2.

二阶差分方程

定义 1 设 $\{x_n\}$ 为数列，形如 $F(n, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}) = 0$ 的方程称为二阶差分方程．比如 $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = n$．

定义 2 形如 $x_{n+2} + ax_{n+1} + bx_n = 0$（其中 a, b 为常数）的差分方程称为二阶常系数线性齐次差分方程．

设它的特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ 的两个解为 λ_1 和 λ_2．则有

(1) 当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时，通解为 $x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$．

(2) 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时，通解为 $x_n = (C_1 + C_2 n)\lambda_1^n$．

注记 设二阶差分方程 $x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n=0$（a, b 为常数）的特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的两个解为 λ_1 和 λ_2.

二阶差分方程

注记　设二阶差分方程 $x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n=0$（a,b 为常数）的特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的两个解为 λ_1 和 λ_2．则有

$$x_{n+2}-\lambda_1 x_{n+1}=\lambda_2(x_{n+1}-\lambda_1 x_n),$$

$$x_{n+2}-\lambda_2 x_{n+1}=\lambda_1(x_{n+1}-\lambda_2 x_n).$$

二阶差分方程

注记 设二阶差分方程 $x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n=0$（a,b 为常数）的特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的两个解为 λ_1 和 λ_2. 则有

$$x_{n+2}-\lambda_1 x_{n+1}=\lambda_2(x_{n+1}-\lambda_1 x_n),$$

$$x_{n+2}-\lambda_2 x_{n+1}=\lambda_1(x_{n+1}-\lambda_2 x_n).$$

利用代换 $y_n=x_{n+1}-\lambda_1 x_n$ 或 $y_n=x_{n+1}-\lambda_2 x_n$,

二阶差分方程

注记　设二阶差分方程 $x_{n+2}+ax_{n+1}+bx_n=0$（a, b 为常数）的特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的两个解为 λ_1 和 λ_2．则有

$$x_{n+2}-\lambda_1 x_{n+1}=\lambda_2(x_{n+1}-\lambda_1 x_n),$$

$$x_{n+2}-\lambda_2 x_{n+1}=\lambda_1(x_{n+1}-\lambda_2 x_n).$$

利用代换 $y_n=x_{n+1}-\lambda_1 x_n$ 或 $y_n=x_{n+1}-\lambda_2 x_n$，可以变成一阶差分方程的问题．

二阶递推数列的极限

例 1 (伯克利问题 1.3.5)　设常数 $0 < \alpha < 1$，数列 $\{x_n\}$ 满足:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并将其值用 α, x_0, x_1 表示.

二阶递推数列的极限

例 1 (伯克利问题 1.3.5) 设常数 $0 < \alpha < 1$，数列 $\{x_n\}$ 满足：

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并将其值用 α, x_0, x_1 表示.

解答 由递推公式得 $x_{n+1} - x_n = (\alpha - 1)(x_n - x_{n-1})$,

例 1 (伯克利问题 1.3.5)　设常数 $0 < \alpha < 1$，数列 $\{x_n\}$ 满足：

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并将其值用 α, x_0, x_1 表示.

解答　由递推公式得 $x_{n+1} - x_n = (\alpha - 1)(x_n - x_{n-1})$，从而

$$x_n - x_{n-1} = (\alpha-1)^{n-1}(x_1 - x_0).$$

例 1 (伯克利问题 1.3.5) 设常数 $0 < \alpha < 1$，数列 $\{x_n\}$ 满足：

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并将其值用 α, x_0, x_1 表示.

解答 由递推公式得 $x_{n+1} - x_n = (\alpha - 1)(x_n - x_{n-1})$，从而

$$x_n - x_{n-1} = (\alpha-1)^{n-1}(x_1 - x_0).$$

这样 $x_n - x_0 = \left[\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha-1)^k\right](x_1 - x_0).$

二阶递推数列的极限

例 1 (伯克利问题 1.3.5)　设常数 $0 < \alpha < 1$，数列 $\{x_n\}$ 满足：

$$x_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)x_{n-1}.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在，并将其值用 α, x_0, x_1 表示.

解答　由递推公式得 $x_{n+1} - x_n = (\alpha - 1)(x_n - x_{n-1})$，从而

$$x_n - x_{n-1} = (\alpha-1)^{n-1}(x_1 - x_0).$$

这样 $x_n - x_0 = \left[\sum\limits_{k=0}^{n-1}(\alpha-1)^k\right](x_1 - x_0)$. 取极限得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 + \frac{1}{1-(\alpha-1)}(x_1 - x_0) = \frac{(1-\alpha)x_0 + x_1}{2-\alpha}.$$

问题 设数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式 $x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d}$，研究其极限.

问题　设数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式 $x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d}$，研究其极限.

解答　令 $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$，则若 x_1 是函数 $f(x)$ 的不动点，即 $f(x_1) = x_1$ 时，数列恒等于 x_1，极限也为 x_1. 接下来我们都假定 x_1 并非不动点.

问题 设数列 $\{x_n\}$ 满足递推公式 $x_{n+1} = \dfrac{ax_n + b}{cx_n + d}$，研究其极限.

解答 令 $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$，则若 x_1 是函数 $f(x)$ 的不动点，即 $f(x_1) = x_1$ 时，数列恒等于 x_1，极限也为 x_1. 接下来我们都假定 x_1 并非不动点.

若 $c = 0$，则该数列满足一阶常系数线性差分方程，从而仅在 $\left|\dfrac{a}{d}\right| < 1$ 时收敛于 $\dfrac{b}{d - a}$.

解答 (续)　若 $c \neq 0$，则令 $y_n = cx_n + d$，即 $x_n = \dfrac{y_n - d}{c}$，可以得到

$$y_{n+1} = \frac{(a+d)y_n + (bc - ad)}{y_n}.$$

令 $u = a + d$，$v = bc - ad$，则得到

$$y_{n+1} = \frac{uy_n + v}{y_n}$$

解答 (续)　若 $c \neq 0$，则令 $y_n = cx_n + d$，即 $x_n = \dfrac{y_n - d}{c}$，可以得到

$$y_{n+1} = \frac{(a+d)y_n + (bc - ad)}{y_n}.$$

令 $u = a + d$，$v = bc - ad$，则得到

$$y_{n+1} = \frac{uy_n + v}{y_n}$$

令 $y_n = \dfrac{q}{p}$，则 $y_{n+1} = \dfrac{uq + vp}{q}$. 因此可以令 $y_n = \dfrac{z_{n+1}}{z_n}$，其中

$$z_1 = 1,\quad z_2 = y_1,\quad z_{n+2} = uz_{n+1} + vz_n.$$

解答 (续)　数列 $\{z_n\}$ 满足二阶常系数线性差分方程，其特征方程 $z^2 - uz - v = 0$ 的两个解为

$$A = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4v}}{2}, \quad B = \frac{u - \sqrt{u^2 + 4v}}{2}.$$

(1) 当 $\Delta = u^2 + 4v = 0$ 时，$A = B$，数列 $\{z_n\}$ 的通项为 $z_n = (\alpha + \beta n)A^n$，从而

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\alpha + \beta(n+1))A^{n+1}}{(\alpha + \beta n)A^n} = A.$$

解答 (续) (2) 当 $\Delta = u^2 + 4v > 0$ 时，数列 $\{z_n\}$ 的通项为 $z_n = \alpha A^n + \beta B^n$，从而

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha A^{n+1} + \beta B^{n+1}}{\alpha A^n + \beta B^n} = \begin{cases} A, & \text{若 } |A| > |B|; \\ B, & \text{若 } |A| < |B|. \end{cases}$$

其中若 $A = -B$，则 $u = 0$，从而 $y_{n+1}y_n = v$. 此时仅在 $y_1 = \pm\sqrt{v}$ 时才收敛.

解答（续） (2) 当 $\Delta = u^2 + 4v > 0$ 时，数列 $\{z_n\}$ 的通项为 $z_n = \alpha A^n + \beta B^n$，从而

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{z_{n+1}}{z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha A^{n+1} + \beta B^{n+1}}{\alpha A^n + \beta B^n} = \begin{cases} A, & \text{若 } |A| > |B|; \\ B, & \text{若 } |A| < |B|. \end{cases}$$

其中若 $A = -B$，则 $u = 0$，从而 $y_{n+1}y_n = v$. 此时仅在 $y_1 = \pm\sqrt{v}$ 时才收敛.

(3) 当 $\Delta = u^2 + 4v < 0$ 时，假设数列 $\{y_n\}$ 收敛于 y，则有 $y^2 - uy - v = 0$，该方程没有实数解，矛盾. 从而数列 $\{y_n\}$ 发散.

练习 1 (1999 北京)　设 $a_1=1$，$a_2=2$，且当 $n\geqslant 3$ 时，有 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，证明：

(1) $\frac{3}{2}a_{n-1}\leqslant a_n\leqslant 2a_{n-1}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=0$.

二阶递推数列的极限

练习 2 (伯克利问题 1.3.12) 斐波那契 (Fibonacci) 数列 $\{f_n\}$ 的定义如下

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 2, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ 对于 } n \geq 2.$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ 存在，并求其值.

理工经管类数学竞赛讲座

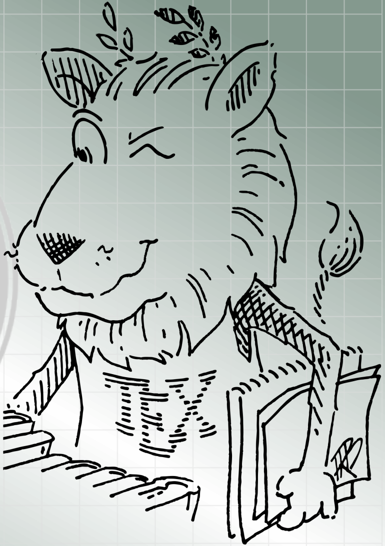
2021 年 10 月 10 日

递推数列的极限

③多个递推数列的极限

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队



多个递推数列的极限

例 1 给定 $0 < a < b$，令 $x_1 = a$，$y_1 = b$.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

证明 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

多个递推数列的极限

例 1 给定 $0 < a < b$，令 $x_1 = a$，$y_1 = b$.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

证明 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$.

解答 由平均值不等式有 $y_n > x_n$. 从而

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{x_n x_n} = x_n,$$

例 1 给定 $0 < a < b$，令 $x_1 = a$，$y_1 = b$.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

证明 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

解答 由平均值不等式有 $y_n > x_n$. 从而

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{x_n x_n} = x_n, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{y_n + y_n}{2} = y_n.$$

多个递推数列的极限

例 1　给定 $0 < a < b$，令 $x_1 = a$，$y_1 = b$.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

证明 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

解答　由平均值不等式有 $y_n > x_n$. 从而

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{x_n x_n} = x_n, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{y_n + y_n}{2} = y_n.$$

即有 $a \leqslant x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n \leqslant b$,

多个递推数列的极限

例 1　给定 $0 < a < b$，令 $x_1 = a$，$y_1 = b$.

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

证明 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

解答　由平均值不等式有 $y_n > x_n$. 从而

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} > \sqrt{x_n x_n} = x_n, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} < \frac{y_n + y_n}{2} = y_n.$$

即有 $a \leqslant x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n \leqslant b$，从而 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛.

例 2 给定三个实数 a_1, b_1, c_1，对所有正整数 n，定义

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},\ b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},\ c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

证明这三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 收敛，并求它们的极限.

例 2　给定三个实数 a_1, b_1, c_1，对所有正整数 n，定义

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2},\ b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2},\ c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

证明这三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 收敛，并求它们的极限.

解答　首先注意到

$$a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$$

例 2 给定三个实数 a_1, b_1, c_1，对所有正整数 n，定义

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},\ b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},\ c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

证明这三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 收敛，并求它们的极限.

解答 首先注意到

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n=\cdots=a_1+b_1+c_1=3k.$$

例 2　给定三个实数 a_1, b_1, c_1，对所有正整数 n，定义

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},\ b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},\ c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

证明这三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 收敛，并求它们的极限.

解答　首先注意到

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n=\cdots=a_1+b_1+c_1=3k.$$

代入第一个递推等式，得到 $2a_{n+1}+a_n=3k$.

例 2 给定三个实数 a_1, b_1, c_1，对所有正整数 n，定义

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},\quad c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

证明这三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 收敛，并求它们的极限.

解答 首先注意到

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n=\cdots=a_1+b_1+c_1=3k.$$

代入第一个递推等式，得到 $2a_{n+1}+a_n=3k$．从而

$$a_{n+1}-k=-\frac{1}{2}(a_n-k)$$

例 2　给定三个实数 a_1, b_1, c_1，对所有正整数 n，定义

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},\ b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},\ c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

证明这三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 收敛，并求它们的极限.

解答　首先注意到

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n=\cdots=a_1+b_1+c_1=3k.$$

代入第一个递推等式，得到 $2a_{n+1}+a_n=3k$. 从而

$$a_{n+1}-k=-\frac{1}{2}(a_n-k)=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a_1-k)$$

例 2　给定三个实数 a_1, b_1, c_1，对所有正整数 n，定义

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},\ b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},\ c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

证明这三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 收敛，并求它们的极限.

解答　首先注意到

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n=\cdots=a_1+b_1+c_1=3k.$$

代入第一个递推等式，得到 $2a_{n+1}+a_n=3k$. 从而

$$a_{n+1}-k=-\frac{1}{2}(a_n-k)=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a_1-k)\to 0.$$

例 2 给定三个实数 a_1, b_1, c_1，对所有正整数 n，定义

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},\ b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},\ c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

证明这三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 收敛，并求它们的极限.

解答 首先注意到

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n=\cdots=a_1+b_1+c_1=3k.$$

代入第一个递推等式，得到 $2a_{n+1}+a_n=3k$. 从而

$$a_{n+1}-k=-\frac{1}{2}(a_n-k)=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a_1-k)\to 0.$$

因此 $\{a_n\}$ 的极限为 k,

例 2 给定三个实数 a_1, b_1, c_1，对所有正整数 n，定义

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},\ b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},\ c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}.$$

证明这三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 收敛，并求它们的极限.

解答 首先注意到

$$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=a_n+b_n+c_n=\cdots=a_1+b_1+c_1=3k.$$

代入第一个递推等式，得到 $2a_{n+1}+a_n=3k$. 从而

$$a_{n+1}-k=-\frac{1}{2}(a_n-k)=\cdots=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(a_1-k)\to 0.$$

因此 $\{a_n\}$ 的极限为 k，类似地 $\{b_n\}$ 和 $\{c_n\}$ 的极限也为 k.

练习 1 给定 $0 < a < b$，令 $x_1 = a$，$y_1 = b$.

$$x_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

证明 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 收敛，并求出它们的极限.

练习 2 给定正实数 a_1, b_1, c_1，其和为 1，对所有正整数 n，定义

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2b_nc_n, \quad b_{n+1} = b_n^2 + 2a_nc_n, \quad c_{n+1} = c_n^2 + 2a_nb_n.$$

证明这三个数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 收敛，并求它们的极限.