理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

复杂数列的阶估计

①递推数列的阶估计

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

例 1　设 $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}\ (n = 1, 2, \cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

例 1 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}\ (n = 1, 2, \cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

解答 (1) 对 $n \geqslant 1$，有 $x_n > 0$，且 $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n} > x_n$，即数列严格单调增加.

例 1 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}\ (n = 1, 2, \cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

解答 (1) 对 $n \geqslant 1$，有 $x_n > 0$，且 $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n} > x_n$，即数列严格单调增加．假设极限收敛于有限数 A，则由递推公式得

$$A = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) = A + \frac{1}{A},$$

矛盾．从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

递推数列的阶估计

例 1　设 $x_1 > 0$, $x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n}$ $(n = 1, 2, \cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

解答　(2) 由 Stolz 公式可得

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}^2 - x_n^2}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{1}{x_n^2}\right) = 2.$$

因为 $x_n > 0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt{2n}} = 1$.

递推数列的阶估计

例 2　设 $x_1 = \sin x_0 > 0$, $x_{n+1} = \sin x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \sqrt{\dfrac{n}{3}} = 1$.

递推数列的阶估计

例 2　设 $x_1 = \sin x_0 > 0$, $x_{n+1} = \sin x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \sqrt{\dfrac{n}{3}} = 1$.

解答　(1) 对 $n \geqslant 1$，有 $x_n > 0$，且 $x_{n+1} = \sin x_n \leqslant x_n$，即数列单调减少且有下界，从而收敛.

递推数列的阶估计

例 2　设 $x_1 = \sin x_0 > 0, x_{n+1} = \sin x_n \ (n = 1, 2, \cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \sqrt{\dfrac{n}{3}} = 1$.

解答　(1) 对 $n \geqslant 1$，有 $x_n > 0$，且 $x_{n+1} = \sin x_n \leqslant x_n$，即数列单调减少且有下界，从而收敛．设其极限为 A，则由递推公式得

$$A = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sin x_n = \sin A,$$

解得 $A = 0$，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

例 2 设 $x_1 = \sin x_0 > 0$, $x_{n+1} = \sin x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \sqrt{\dfrac{n}{3}} = 1$.

解答 (2) 由 Stolz 公式和泰勒公式可得

$$\lim_{n\to\infty} n x_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\dfrac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 \sin^2 x_n}{x_n^2 - \sin^2 x_n}$$

例 2 设 $x_1 = \sin x_0 > 0$, $x_{n+1} = \sin x_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \sqrt{\dfrac{n}{3}} = 1$.

解答 (2) 由 Stolz 公式和泰勒公式可得

$$\lim_{n\to\infty} n x_n^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\dfrac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\dfrac{1}{x_{n+1}^2} - \dfrac{1}{x_n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 \sin^2 x_n}{x_n^2 - \sin^2 x_n}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{x^2 - \sin^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2 - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^3)\right)^2} = 3.$$

递推数列的阶估计

练习1 设 $x_1 > 0,\ x_{n+1} = x_n + \dfrac{1}{x_n^2}\ (n = 1, 2, \cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{\sqrt[3]{3n}} = 1.$

练习2 设 $x_1 > 0,\ x_{n+1} = \ln(1 + x_n)\ (n = 1, 2, \cdots)$，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 2.$

理工经管类数学竞赛讲座

2021 年 10 月 10 日

复杂数列的阶估计

②隐式数列的阶估计

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

隐式数列的阶估计

例 1　设 x_n 满足方程 $e^{x_n}+nx_n=2$（$n=1,2,3,\cdots$）.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$；

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$；

(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-nx_n)=1$.

隐式数列的阶估计

例 1　设 x_n 满足方程 $e^{x_n}+nx_n=2$（$n=1,2,3,\cdots$）.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$；

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$；

(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-nx_n)=1$.

解答　(1) 假设 $x_n\leqslant 0$，则 $e^{x_n}+nx_n\leqslant 1+0<2$，方程不成立．因此我们有 $x_n>0$.

隐式数列的阶估计

例 1　设 x_n 满足方程 $e^{x_n}+nx_n=2$（$n=1,2,3,\cdots$）.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$；

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$；

(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-nx_n)=1$.

解答　(1) 假设 $x_n\leqslant 0$，则 $e^{x_n}+nx_n\leqslant 1+0<2$，方程不成立．因此我们有 $x_n>0$．进而由方程可得 $0<nx_n<2$，即 $0<x_n<\dfrac{2}{n}$.

隐式数列的阶估计

例 1　设 x_n 满足方程 $e^{x_n}+nx_n=2$（$n=1,2,3,\cdots$）.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$；

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$；

(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-nx_n)=1$.

解答　(1) 假设 $x_n\leqslant 0$，则 $e^{x_n}+nx_n\leqslant 1+0<2$，方程不成立．因此我们有 $x_n>0$．进而由方程可得 $0<nx_n<2$，即 $0<x_n<\dfrac{2}{n}$．由迫敛准则，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

例 1　设 x_n 满足方程 $e^{x_n}+nx_n=2$（$n=1,2,3,\cdots$）.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$;

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$;

(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-nx_n)=1$.

解答 (续)　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2-e^{x_n})=2-1=1$.

例 1　设 x_n 满足方程 $e^{x_n}+nx_n=2$（$n=1,2,3,\cdots$）.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$;

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$;

(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-nx_n)=1$.

解答 (续)　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2-e^{x_n})=2-1=1$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-nx_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-e^{x_n}}{x_n}(e^{x_n}-1)$

例 1　设 x_n 满足方程 $e^{x_n}+nx_n=2$（$n=1,2,3,\cdots$）.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$;

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=1$;

(3) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} n(1-nx_n)=1$.

解答 (续)　(2) $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n=\lim\limits_{n\to\infty}(2-e^{x_n})=2-1=1$.

(3) $$\lim_{n\to\infty} n(1-nx_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{2-e^{x_n}}{x_n}(e^{x_n}-1)$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{2-e^t}{t}\left(e^t-1\right)=1.$$

隐式数列的阶估计

练习 1 设 $x_n > 0$ 满足方程 $x_n^n + x_n = 1$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）.

(1) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$；

(2) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\ln n}(1 - x_n) = 1$.