理工经管类数学竞赛讲座

2020 年 11 月 2 日

中值定理的存在性等式

①一阶等式问题

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

罗尔定理

定理 1 如果函数 $f(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 上可导，

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

拉格朗日定理

定理 2 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

柯西定理

定理 3 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续，

(2) 在开区间 (a,b) 内都可导，

(3) 在开区间 (a,b) 内 $g'(x) \neq 0$，

则至少有一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

中值定理举例

例 1　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

中值定理举例

例 1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

证明. 令 $L(x)=f(x)-x^2$，则 $L(0)=0=L(1)$.

中值定理举例

例 1 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

证明. 令 $L(x)=f(x)-x^2$，则 $L(0)=0=L(1)$．由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$．使得 $L'(\xi)=0$，

中值定理举例

例 1　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

证明.　令 $L(x)=f(x)-x^2$，则 $L(0)=0=L(1)$．由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$．使得 $L'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)-2\xi=0$，即 $f'(\xi)=2\xi$.

中值定理小结

问题 1　要证明存在 ξ，使得 $f'(\xi)+q(\xi)=0$.

中值定理小结

问题 1 要证明存在 ξ，使得 $f'(\xi)+q(\xi)=0$.

解法 可以令 $L'(x)=f'(x)+q(x)$,

中值定理小结

问题 1　要证明存在 ξ，使得 $f'(\xi)+q(\xi)=0$.

解法　可以令 $L'(x)=f'(x)+q(x)$，然后找出

$$L(x)=f(x)+Q(x),$$

中值定理小结

问题 1　要证明存在 ξ，使得 $f'(\xi)+q(\xi)=0$.

解法　可以令 $L'(x)=f'(x)+q(x)$，然后找出

$$L(x)=f(x)+Q(x),$$

其中 $Q(x)$ 是 $q(x)$ 的原函数.

中值定理举例

例 2　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=1$，$f(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)f'(\xi)+\xi=0$．

中值定理举例

例 2　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=1$，$f(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)f'(\xi)+\xi=0$.

证明.　令 $L(x)=f^2(x)+x^2$，则 $L(0)=1=L(1)$.

中值定理举例

例 2　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=1$，$f(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)f'(\xi)+\xi=0$．

证明.　令 $L(x)=f^2(x)+x^2$，则 $L(0)=1=L(1)$．由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$．使得 $L'(\xi)=0$，

中值定理举例

例 2　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=1$，$f(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)f'(\xi)+\xi=0$.

证明.　令 $L(x)=f^2(x)+x^2$，则 $L(0)=1=L(1)$．由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$．使得 $L'(\xi)=0$，即 $2f(\xi)f'(\xi)+2\xi=0$，即 $f(\xi)f'(\xi)+\xi=0$.

中值定理小结

问题 2　要证明存在 ξ，使得 $p(f(\xi))f'(\xi)+q(\xi)=0$.

中值定理小结

问题 2　要证明存在 ξ，使得 $p(f(\xi))f'(\xi)+q(\xi)=0$.

解法　可以令 $L'(x)=p(f(x))f'(x)+q(x)$,

中值定理小结

问题 2　要证明存在 ξ，使得 $p(f(\xi))f'(\xi)+q(\xi)=0$.

解法　可以令 $L'(x)=p(f(x))f'(x)+q(x)$，然后找出

$$L(x)=P(f(x))+Q(x),$$

中值定理小结

问题 2　要证明存在 ξ，使得 $p(f(\xi))f'(\xi)+q(\xi)=0$.

解法　可以令 $L'(x)=p(f(x))f'(x)+q(x)$，然后找出

$$L(x)=P(f(x))+Q(x),$$

其中 $P(x)$ 是 $p(x)$ 的原函数，$Q(x)$ 是 $q(x)$ 的原函数.

中值定理举例

例 3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

中值定理举例

例 3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证明.　令 $L'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+1$,

中值定理举例

例 3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证明.　令 $L'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+1$，找得原函数为

$$L(x)=\ln f(x)+x=\ln\left(f(x)\mathrm{e}^{x}\right).$$

中值定理举例

例 3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证明.　令 $L'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+1$，找得原函数为

$$L(x)=\ln f(x)+x=\ln\left(f(x)\mathrm{e}^{x}\right).$$

但此时 $L(0)$ 和 $L(1)$ 均无定义！ . . . . . 如何解决？

中值定理举例

例 3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证明.　令 $L'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+1$，找得原函数为

$$L(x)=\ln f(x)+x=\ln\left(f(x)\mathrm{e}^{x}\right).$$

但此时 $L(0)$ 和 $L(1)$ 均无定义！ . . . . . 如何解决？

蜕壳法：去掉外层的对数函数，改为令 $R(x)=f(x)\mathrm{e}^{x}$，则有 $R(0)=R(1)=0$.

中值定理举例

例 3　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

证明.　令 $L'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}+1$，找得原函数为

$$L(x)=\ln f(x)+x=\ln\left(f(x)\mathrm{e}^{x}\right).$$

但此时 $L(0)$ 和 $L(1)$ 均无定义！ . . . . . 如何解决？

蜕壳法：去掉外层的对数函数，改为令 $R(x)=f(x)\mathrm{e}^{x}$，则有 $R(0)=R(1)=0$．从而由罗尔定理，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $R'(\xi)=f'(\xi)\mathrm{e}^{\xi}+f(\xi)\mathrm{e}^{\xi}=0$，即 $f'(\xi)+f(\xi)=0$.

中值定理练习

练习1 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

中值定理练习

练习1 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $\xi f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

练习2 (2003考研) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，而且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$. 证明：存在 $\xi\in(0,3)$，使得 $f'(\xi)=0$.

中值定理举例

例 4 (2011 全国决赛)　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$．证明：

(1) 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$；

(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$．

中值定理举例

例 4 (2011 全国决赛)　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$．证明：

(1) 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$；

(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$．

解答　只讲 (2)．此题不符合前面介绍的情形．

中值定理举例

例 4 (2011 全国决赛)　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$．证明：

(1) 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$；

(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$．

解答　只讲 (2)．此题不符合前面介绍的情形．可尝试作函数代换 $g(x)=f(x)-x+1$，则 $g'(x)=f'(x)-1$．

中值定理举例

例 4 (2011 全国决赛)　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$．证明：

(1) 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$；

(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

解答　只讲 (2)．此题不符合前面介绍的情形．可尝试作函数代换 $g(x)=f(x)-x+1$，则 $g'(x)=f'(x)-1$．待证等式变成

$$g'(\eta)=g(\eta)-1.$$

中值定理举例

例 4 (2011 全国决赛)　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$．证明：

(1) 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$；

(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

解答　只讲 (2)．此题不符合前面介绍的情形．可尝试作函数代换 $g(x)=f(x)-x+1$，则 $g'(x)=f'(x)-1$．待证等式变成

$$g'(\eta)=g(\eta)-1.$$

依然不符合前面情形，再作代换 $h(x)=g(x)-1$，则待证等式变成 $h'(\eta)=h(\eta)$.

中值定理举例

例 4 (2011 全国决赛)　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$．证明：

(1) 存在 $\xi\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ 使得 $f(\xi)=\xi$；

(2) 存在 $\eta\in(0,\xi)$ 使得 $f'(\eta)=f(\eta)-\eta+1$.

解答　只讲 (2)．此题不符合前面介绍的情形．可尝试作函数代换 $g(x)=f(x)-x+1$，则 $g'(x)=f'(x)-1$．待证等式变成

$$g'(\eta)=g(\eta)-1.$$

依然不符合前面情形，再作代换 $h(x)=g(x)-1$，则待证等式变成 $h'(\eta)=h(\eta)$．令 $L(x)=\mathrm{e}^{x}h(x)$，即可在 $[0,\xi]$ 上用罗尔定理.

中值定理练习

练习3 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，而且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$. 证明：对于任意的实数 λ，都存在 $\xi\in(0,1)$ 使得 $f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1$.

理工经管类数学竞赛讲座

2020 年 11 月 2 日

中值定理的存在性等式

②二阶等式问题

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

中值定理的二阶等式

例 1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$．证明：$\forall c\in(a,b)$，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(c)=\frac{1}{2}f''(\xi)(c-a)(c-b).$$

中值定理的二阶等式

例 1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$．证明：$\forall c\in(a,b)$，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(c)=\frac{1}{2}f''(\xi)(c-a)(c-b).$$

解答　若能找到 $L(x)$，使得 $L(a)=L(c)=L(b)$，且

$$L''(x)=f''(x)(c-a)(c-b)-2f(c).$$

则由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得 $L'(\xi_1)=L'(\xi_2)=0$．

中值定理的二阶等式

例 1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0$．证明：$\forall c\in(a,b)$，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(c)=\frac{1}{2}f''(\xi)(c-a)(c-b).$$

解答　若能找到 $L(x)$，使得 $L(a)=L(c)=L(b)$，且

$$L''(x)=f''(x)(c-a)(c-b)-2f(c).$$

则由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,c)$，$\xi_2\in(c,b)$，使得 $L'(\xi_1)=L'(\xi_2)=0$．从而 $\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使得 $L''(\xi)=0$，从而结论成立．

中值定理的二阶等式

对 $L''(x)$ 积分，逐步寻找 $L(x)$：

$$L''(x) = f''(x)(c-a)(c-b) - 2f(c)$$

$$\Rightarrow \quad L'(x) = f'(x)(c-a)(c-b) - 2f(c)x + k$$

$$\Rightarrow \quad L(x) = f(x)(c-a)(c-b) - f(c)x^2 + kx$$

1906 JINAN UNIVERSITY

中值定理的二阶等式

对 $L''(x)$ 积分，逐步寻找 $L(x)$：

$$L''(x) = f''(x)(c-a)(c-b) - 2f(c)$$

$$\Rightarrow \quad L'(x) = f'(x)(c-a)(c-b) - 2f(c)x + k$$

$$\Rightarrow \quad L(x) = f(x)(c-a)(c-b) - f(c)x^2 + kx$$

利用条件 $L(a) = L(b)$ 可得 $k = f(c)(a+b)$. 因此

$$L(x) = f(x)(c-a)(c-b) - f(c)x^2 + f(c)(a+b)x$$

为所求.

中值定理的二阶等式

对 $L''(x)$ 积分，逐步寻找 $L(x)$：

$$L''(x) = f''(x)(c-a)(c-b) - 2f(c)$$

$$\Rightarrow \quad L'(x) = f'(x)(c-a)(c-b) - 2f(c)x + k$$

$$\Rightarrow \quad L(x) = f(x)(c-a)(c-b) - f(c)x^2 + kx$$

利用条件 $L(a) = L(b)$ 可得 $k = f(c)(a+b)$．因此

$$L(x) = f(x)(c-a)(c-b) - f(c)x^2 + f(c)(a+b)x$$

为所求．或者也可给 $L(x)$ 减去 $L(c) = f(c)ab$ 变成

$$R(x) = f(x)(c-a)(c-b) - f(c)(x-a)(x-b).$$

例 2（2001 北京） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，而且 $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi).$$

例 2（2001 北京）　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，而且 $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi).$$

解答　直接令 $L''(x)=f''(x)-f(x)$，难以用函数代换找出 $L'(x)$.

例 2（2001 北京）　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，而且 $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi).$$

解答　直接令 $L''(x)=f''(x)-f(x)$，难以用函数代换找出 $L'(x)$. 我们希望乘以某个非零函数 $\phi(x)$，再作尝试.

例 2（2001 北京）　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，而且 $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi).$$

解答　直接令 $L''(x)=f''(x)-f(x)$，难以用函数代换找出 $L'(x)$．我们希望乘以某个非零函数 $\phi(x)$，再作尝试．下面逐步寻找

$$L''(x)=f''(x)\phi(x)-f(x)\phi(x)$$

例 2（2001 北京）　设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，而且 $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi).$$

解答　直接令 $L''(x)=f''(x)-f(x)$，难以用函数代换找出 $L'(x)$．我们希望乘以某个非零函数 $\phi(x)$，再作尝试．下面逐步寻找

$$\begin{aligned}L''(x)&=f''(x)\phi(x)-f(x)\phi(x)\\&=[f'(x)\phi(x)]'-f'(x)\phi'(x)-f(x)\phi(x)\end{aligned}$$

例 2（2001 北京） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，而且 $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi).$$

解答 直接令 $L''(x)=f''(x)-f(x)$，难以用函数代换找出 $L'(x)$. 我们希望乘以某个非零函数 $\phi(x)$，再作尝试. 下面逐步寻找

$$\begin{aligned}L''(x)&=f''(x)\phi(x)-f(x)\phi(x)\\&=[f'(x)\phi(x)]'-f'(x)\phi'(x)-f(x)\phi(x)\\&=[f'(x)\phi(x)]'-[f(x)\phi'(x)]'+f(x)[\phi''(x)-\phi(x)]\end{aligned}$$

例 2（2001 北京） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，而且 $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi).$$

解答 直接令 $L''(x)=f''(x)-f(x)$，难以用函数代换找出 $L'(x)$. 我们希望乘以某个非零函数 $\phi(x)$，再作尝试. 下面逐步寻找

$$\begin{aligned}L''(x)&=f''(x)\phi(x)-f(x)\phi(x)\\&=[f'(x)\phi(x)]'-f'(x)\phi'(x)-f(x)\phi(x)\\&=[f'(x)\phi(x)]'-[f(x)\phi'(x)]'+f(x)[\phi''(x)-\phi(x)]\end{aligned}$$

令 $\phi''(x)-\phi(x)=0$,

例 2（2001 北京） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，而且 $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi).$$

解答 直接令 $L''(x)=f''(x)-f(x)$，难以用函数代换找出 $L'(x)$. 我们希望乘以某个非零函数 $\phi(x)$，再作尝试. 下面逐步寻找

$$\begin{aligned}L''(x)&=f''(x)\phi(x)-f(x)\phi(x)\\&=[f'(x)\phi(x)]'-f'(x)\phi'(x)-f(x)\phi(x)\\&=[f'(x)\phi(x)]'-[f(x)\phi'(x)]'+f(x)[\phi''(x)-\phi(x)]\end{aligned}$$

令 $\phi''(x)-\phi(x)=0$，即 $\phi(x)=\mathrm{e}^{x}$ 或 $\phi(x)=\mathrm{e}^{-x}$,

例 2（2001 北京） 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶导数，而且 $f(0)=f(1)=f'(0)=f'(1)=0$. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$f''(\xi)=f(\xi).$$

解答 直接令 $L''(x)=f''(x)-f(x)$，难以用函数代换找出 $L'(x)$. 我们希望乘以某个非零函数 $\phi(x)$，再作尝试. 下面逐步寻找

$$\begin{aligned}L''(x)&=f''(x)\phi(x)-f(x)\phi(x)\\&=[f'(x)\phi(x)]'-f'(x)\phi'(x)-f(x)\phi(x)\\&=[f'(x)\phi(x)]'-[f(x)\phi'(x)]'+f(x)[\phi''(x)-\phi(x)]\end{aligned}$$

令 $\phi''(x)-\phi(x)=0$，即 $\phi(x)=\mathrm{e}^{x}$ 或 $\phi(x)=\mathrm{e}^{-x}$，可得 $L'(x)$.

中值定理的二阶等式

练习 1 (1995 考研)　假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$. 试证：

(1) 在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$；

(2) 在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

中值定理的二阶等式

练习 2 (2007 考研)　设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$. 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

理工经管类数学竞赛讲座

2020 年 11 月 2 日

中值定理的存在性等式

③多点等式问题

吕荐瑞 (lvjr.bitbucket.io)

暨南大学数学竞赛培训团队

多点等式举例

例 1 (1998 北京)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0 \leqslant a < b \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. 证明：在区间 (a,b) 内存在两点 ξ 和 η，使得

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}\cdot f'(\xi)}{\cos\xi}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}\cdot f'(\eta)}{\sin\eta}.$$

多点等式举例

例 1 (1998 北京) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0 \leqslant a < b \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. 证明：在区间 (a,b) 内存在两点 ξ 和 η，使得

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}\cdot f'(\xi)}{\cos\xi}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}\cdot f'(\eta)}{\sin\eta}.$$

解答 在区间 $[a,b]$ 上分别应用两次柯西中值定理，

多点等式举例

例 1 (1998 北京) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0 \leqslant a < b \leqslant \frac{\pi}{2}$. 证明：在区间 (a,b) 内存在两点 ξ 和 η，使得

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}\cdot f'(\xi)}{\cos\xi} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}\cdot f'(\eta)}{\sin\eta}.$$

解答 在区间 $[a,b]$ 上分别应用两次柯西中值定理，得到

$$\frac{f'(\xi)}{\cos\xi} = \frac{f(b)-f(a)}{\sin b - \sin a}, \qquad \frac{f'(\eta)}{-\sin\eta} = \frac{f(b)-f(a)}{\cos b - \cos a}.$$

多点等式举例

例 1 (1998 北京) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0 \leqslant a < b \leqslant \frac{\pi}{2}$. 证明：在区间 (a,b) 内存在两点 ξ 和 η，使得

$$\frac{\cos\frac{a+b}{2}\cdot f'(\xi)}{\cos\xi} = \frac{\sin\frac{a+b}{2}\cdot f'(\eta)}{\sin\eta}.$$

解答 在区间 $[a,b]$ 上分别应用两次柯西中值定理，得到

$$\frac{f'(\xi)}{\cos\xi} = \frac{f(b)-f(a)}{\sin b - \sin a}, \qquad \frac{f'(\eta)}{-\sin\eta} = \frac{f(b)-f(a)}{\cos b - \cos a}.$$

和差化积公式使得结论成立.

多点等式举例

例 2 (2003 天津)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：对于任意给定的正数 a 和 b，在开区间 $(0,1)$ 内存在两点 ξ 和 η，使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

多点等式举例

例 2 (2003 天津)　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：对于任意给定的正数 a 和 b，在开区间 $(0,1)$ 内存在两点 ξ 和 η，使得

$$\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b.$$

想法　在区间 $[0,1]$ 里面寻找某个点 k，在区间 $[0,k]$ 和 $[k,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，使得结论成立．

多点等式举例

证明. 在 $[0,k]$ 和 $[k,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，得到

$$f'(\xi)=\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=\frac{f(k)}{k},\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(k)}{1-k}=\frac{1-f(k)}{1-k}.$$

多点等式举例

证明. 在 $[0,k]$ 和 $[k,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，得到

$$f'(\xi)=\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=\frac{f(k)}{k},\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(k)}{1-k}=\frac{1-f(k)}{1-k}.$$

代入结论 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b.$，得到

$$\frac{ak}{f(k)}+\frac{b(1-k)}{1-f(k)}=a+b.$$

多点等式举例

证明. 在 $[0,k]$ 和 $[k,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，得到

$$f'(\xi)=\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=\frac{f(k)}{k},\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(k)}{1-k}=\frac{1-f(k)}{1-k}.$$

代入结论 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b.$，得到

$$\frac{ak}{f(k)}+\frac{b(1-k)}{1-f(k)}=a+b.$$

解得 $f(k)=k$（舍去），或 $f(k)=\dfrac{a}{a+b}$.

多点等式举例

证明. 在 $[0,k]$ 和 $[k,1]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，得到

$$f'(\xi)=\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=\frac{f(k)}{k},\quad f'(\eta)=\frac{f(1)-f(k)}{1-k}=\frac{1-f(k)}{1-k}.$$

代入结论 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\eta)}=a+b.$，得到

$$\frac{ak}{f(k)}+\frac{b(1-k)}{1-f(k)}=a+b.$$

解得 $f(k)=k$（舍去），或 $f(k)=\dfrac{a}{a+b}$. 由介值定理知 k 存在.

多点等式练习

练习 1 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$. 证明：在开区间 $(0,1)$ 内存在两点 ξ 和 η，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$.