高等数学课程

第一章 · 函数与极限

2020 年 2 月 12 日

暨南大学数学系　吕荐瑞

第一节	数集与函数
第二节	数列的极限
第三节	函数的极限 I
第四节	函数的极限 II
第五节	无穷小量与无穷大量

第一节	数集与函数
A	数集与区间
B	函数的概念
C	函数的性质
D	函数的构建

数集

人类对数的认识是逐步发展的:

- 自然数集 $\mathbb{N}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的:

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的:

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的:

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的：

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$
- 复数集 $\mathbb{C}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的：

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$ $\longleftarrow$ 微积分的研究对象
- 复数集 $\mathbb{C}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的：

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$ $\longleftarrow$ 微积分的研究对象
- 复数集 $\mathbb{C}$

思考 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{Q}$ 分别有何区别？

有限区间

数轴上长度大于零的一段称为区间

有限区间

数轴上长度大于零的一段称为区间：$\begin{cases} \text{有限区间} \\ \text{无限区间} \end{cases}$

有限区间

数轴上长度大于零的一段称为区间：$\begin{cases} \text{有限区间} \\ \text{无限区间} \end{cases}$

有限区间有四种（$a < b$，a 和 b 称为区间的端点）：

$$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$$ 有限开区间

$$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$ 有限闭区间

$$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$$

$$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$$

有限区间

数轴上长度大于零的一段称为区间：$\begin{cases}\text{有限区间}\\ \text{无限区间}\end{cases}$

有限区间有四种（$a<b$，a 和 b 称为区间的端点）：

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$ 有限开区间

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$ 有限闭区间

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

例子　用区间表示下列数集：

(1) $\{x\mid 1<x<3\}$　　(2) $\{x\mid -5\leqslant x<0\}$

无限区间

无限区间有五种（其中 a 或 b 称为区间的端点）：

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ 无限开区间

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$ 无限开区间

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$ 无限闭区间

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$ 无限闭区间

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

无限区间

无限区间有五种（其中 a 或 b 称为区间的端点）:

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$　　无限开区间

$(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$　　无限开区间

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$　　无限闭区间

$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$　　无限闭区间

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

例子　用区间表示下列数集：

(1) $\{x \mid x < 3\}$　　(2) $\{x \mid x \geqslant 2\}$

区间

例 1　用区间表示下列数集：

(1) $\left\{x \,\middle|\, |x-2|<1\right\}$

(2) $\left\{x \,\middle|\, |x+3|\geqslant 5\right\}$

(3) $\left\{x \,\middle|\, 1\leqslant |x+1|<4\right\}$

邻域

- a 的邻域 $U(a,\delta)$:

$$\left\{x \,\middle|\, |x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a+\delta)$$

- a 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$:

$$\left\{x \,\middle|\, 0<|x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

邻域

- a 的邻域 $U(a,\delta)$：

$$\{x \mid |x-a|<\delta\} = (a-\delta, a+\delta)$$

- a 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$：

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\} = (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$$

- a 的左邻域：$(a-\delta, a)$
- a 的右邻域：$(a, a+\delta)$

邻域

- a 的邻域 $U(a,\delta)$：

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

- a 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$：

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

- a 的左邻域：$(a-\delta,a)$
- a 的右邻域：$(a,a+\delta)$

其中 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

第一节	数集与函数
A	数集与区间
B	函数的概念
C	函数的性质
D	函数的构建

定义 1　设非空数集 $D \subset \mathbb{R}$，如果存在一个对应规则 f，使得对每个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个**函数**，记为 $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$，简记为 $y = f(x)$.

定义 1 设非空数集 $D \subset \mathbb{R}$，如果存在一个对应规则 f，使得对每个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个**函数**，记为 $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$，简记为 $y = f(x)$.

- x 称为**自变量**；
- y 称为**因变量**；
- D 称为**定义域**；
- $Z = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为**值域**.

注记　两个函数相同，当且仅当两者的定义域和对应规则都相同.

注记　两个函数相同，当且仅当两者的定义域和对应规则都相同.

例 2　研究 $y = x$ 和 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数.

注记　两个函数相同，当且仅当两者的定义域和对应规则都相同.

例 2　研究 $y=x$ 和 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数.

例 3　研究 $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数.

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

1 $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $D = [0, +\infty)$,

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

1. $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $D = [0, +\infty)$,
2. $y = \log_a x$ 的定义域为 $D = (0, +\infty)$,

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

1. $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $D = [0, +\infty)$,
2. $y = \log_a x$ 的定义域为 $D = (0, +\infty)$,
3. $y = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

1. $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $D=[0,+\infty)$,
2. $y=\log_a x$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$,
3. $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求：

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

1. $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $D=[0,+\infty)$,
2. $y=\log_a x$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$,
3. $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

1. $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $D=[0,+\infty)$,
2. $y=\log_a x$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$,
3. $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；
2. 对数里面要求大于零；

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

1. $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $D=[0,+\infty)$，
2. $y=\log_a x$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$，
3. $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$．

求函数的自然定义域时有三个基本要求：

1. 根号里面要求大于等于零；
2. 对数里面要求大于零；
3. 分母要求不能等于零．

自然定义域

例 5　用区间表示下列函数的定义域：

(1) $y = \ln(2x+6) + \sqrt{5-x}$

(2) $y = \dfrac{1}{\ln(x-5)}$

自然定义域

例 5　用区间表示下列函数的定义域：

(1) $y = \ln(2x+6) + \sqrt{5-x}$

(2) $y = \frac{1}{\ln(x-5)}$

练习 3　用区间表示下列函数的定义域：

(1) $y = \frac{1}{4-x^2} + \sqrt{x+3}$

(2) $y = \ln(\frac{x+1}{x-1})$

第一节	数集与函数
A	数集与区间
B	函数的概念
C	函数的性质
D	函数的构建

函数的奇偶性

定义 2　给定函数 $y=f(x)$，

1. 如果 $\forall x\in D$，总有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.
2. 如果 $\forall x\in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

函数的奇偶性

定义 2　给定函数 $y = f(x)$,

1 如果 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

2 如果 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例子　$x, x^3, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^3}, \sin x, \tan x$ 为奇函数.

函数的奇偶性

定义 2　给定函数 $y = f(x)$,

1. 如果 $\forall x \in D$，总有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.
2. 如果 $\forall x \in D$，总有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

例子　$x, x^3, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^3}, \sin x, \tan x$ 为奇函数.

例子　$x^2, x^4, \dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x^4}, \cos x$ 为偶函数.

函数的奇偶性

例 6　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

(2) $f(x) = x^3 + x$

(3) $f(x) = x^2 + x + 1$

函数的奇偶性

例 6　判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^4-2x^2+1$

(2) $f(x)=x^3+x$

(3) $f(x)=x^2+x+1$

练习 4　判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=\frac{1-x^2}{\cos x}$

(2) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$

函数的周期性

定义 3 对于函数 $y=f(x)$，如果存在正常数 T 使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称此函数为**周期函数**；满足这个等式的最小正数 T，称为此函数的**周期**.

函数的周期性

定义 3　对于函数 $y=f(x)$，如果存在正常数 T 使得 $f(x+T)=f(x)$ 恒成立，则称此函数为周期函数；满足这个等式的最小正数 T，称为此函数的周期.

例子　$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 以 2π 为周期.

函数的周期性

定义 3　对于函数 $y = f(x)$，如果存在正常数 T 使得 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称此函数为周期函数；满足这个等式的最小正数 T，称为此函数的周期.

例子　$y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 以 2π 为周期.

例子　$y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 以 π 为周期.

函数的单调性

定义 4　设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，对于区间 I 上的任意两点 x_1 和 x_2，

1. 若当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；
2. 若当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的；

函数的单调性

例子 $y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的.

函数的单调性

例子　$y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子　$y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

函数的单调性

例子　$y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子　$y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子　$y = 1/x$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调减少.

函数的单调性

例子　$y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子　$y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子　$y = 1/x$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调减少.

例子　$y = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少，在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

函数的有界性

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界．若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界．

函数的有界性

定义 5 设函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界．若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

如果函数在其定义域上有界，则称它为有界函数；否则称它为无界函数.

函数的有界性

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界．若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界．

如果函数在其定义域上有界，则称它为有界函数；否则称它为无界函数．

例子　$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是有界函数．

函数的有界性

定义 5　设函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界．若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界．

如果函数在其定义域上有界，则称它为有界函数；否则称它为无界函数．

例子　$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是有界函数．

例子　$y=x^2$，$y=\tan x$，$y=x\cos x$ 是无界函数．

函数的有界性

例 7　证明下列函数为有界函数：

(1) $y=\sin x-2\cos x$；

(2) $y=\frac{1}{3+x^2}$.

函数的有界性

例 7　证明下列函数为有界函数：

(1) $y = \sin x - 2\cos x$；

(2) $y = \frac{1}{3+x^2}$.

练习 5　证明下列函数为有界函数：

(1) $y = \sin x - \frac{1}{2+x^2}$

函数的有界性

例 7　证明下列函数为有界函数：

(1) $y = \sin x - 2\cos x$；

(2) $y = \frac{1}{3+x^2}$.

练习 5　证明下列函数为有界函数：

(1) $y = \sin x - \frac{1}{2+x^2}$；

(2) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$.

函数的有界性

类似地，我们可以定义函数有上界和有下界的概念.

- 对于所有 x，恒有 $|f(x)| \le M$ ....有界
- 对于所有 x，恒有 $f(x) \leqslant M_1$ ....有上界
- 对于所有 x，恒有 $f(x) \geqslant M_2$ ....有下界

函数的有界性

类似地，我们可以定义函数有上界和有下界的概念.

- 对于所有 x，恒有 $|f(x)| \le M$ ....有界
- 对于所有 x，恒有 $f(x) \leqslant M_1$ ....有上界
- 对于所有 x，恒有 $f(x) \geqslant M_2$ ....有下界

定理 $f(x)$ 有界 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 有上界而且有下界.

第一节	数集与函数
A	数集与区间
B	函数的概念
C	函数的性质
D	函数的构建

反函数

定义 6 设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z．如果对每个 $y\in Z$，有唯一的 $x\in D$ 满足 $y=f(x)$，则可以得到定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数．

反函数

定义 6　设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z．如果对每个 $y\in Z$，有唯一的 $x\in D$ 满足 $y=f(x)$，则可以得到定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**.

例 8　求函数 $y=3x-1$ 的反函数.

反函数

定义 6　设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z．如果对每个 $y\in Z$，有唯一的 $x\in D$ 满足 $y=f(x)$，则可以得到定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**.

例 8　求函数 $y=3x-1$ 的反函数.

例 9　求函数 $y=2\ln x+1$ 的反函数.

复合函数

定义 7 设 $y=f(u)$ 的定义域是 $D(f)$，$u=g(x)$ 的值域是 $Z(g)$，$D(f)\cap Z(g)$ 非空，则称 $y=f[g(x)]$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的**复合函数**.

复合函数

定义 7 设 $y = f(u)$ 的定义域是 $D(f)$，$u = g(x)$ 的值域是 $Z(g)$，$D(f) \cap Z(g)$ 非空，则称 $y = f[g(x)]$ 为 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的复合函数.

例 10 两个函数 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = 1 - x^2$ 的复合函数是 $y = \sqrt{1 - x^2}$.

复合函数

定义 7　设 $y=f(u)$ 的定义域是 $D(f)$，$u=g(x)$ 的值域是 $Z(g)$，$D(f)\cap Z(g)$ 非空，则称 $y=f[g(x)]$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数.

例 10　两个函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 的复合函数是 $y=\sqrt{1-x^2}$.

例 11　三个函数 $y=\sin u$、$u=v^2-1$ 和 $v=\mathrm{e}^x$ 的复合函数是 $y=\sin(\mathrm{e}^{2x}-1)$.

三角函数

1 正弦函数 $y = \sin x$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$
3. 正切函数 $y = \tan x$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$
3. 正切函数 $y = \tan x$
4. 余切函数 $y = \cot x$

三角函数

1 正弦函数 $y = \sin x$

2 余弦函数 $y = \cos x$

3 正切函数 $y = \tan x$

4 余切函数 $y = \cot x$

5 正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$
3. 正切函数 $y = \tan x$
4. 余切函数 $y = \cot x$
5. 正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
   - $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$
3. 正切函数 $y = \tan x$
4. 余切函数 $y = \cot x$
5. 正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
   - $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
6. 余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$
3. 正切函数 $y = \tan x$
4. 余切函数 $y = \cot x$
5. 正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
   - $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
6. 余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$
   - $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$

反三角函数

1 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$

反三角函数

1 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$

- $x \in [-1, 1], \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [0, \pi]$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [0, \pi]$
3. 反正切函数 $y = \arctan x$ .... $x = \tan y$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1]$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$
3. 反正切函数 $y = \arctan x$ .... $x = \tan y$
   - $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [0, \pi]$
3. 反正切函数 $y = \arctan x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; x = \tan y$
   - $x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
4. 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; x = \cot y$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1]$, $\quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1]$, $\quad y \in [0, \pi]$
3. 反正切函数 $y = \arctan x$ .... $x = \tan y$
   - $x \in (-\infty, +\infty)$, $\quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
4. 反余切函数 $y = \mathrm{arccot}\, x$ .... $x = \cot y$
   - $x \in (-\infty, +\infty)$, $\quad y \in (0, \pi)$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [0, \pi]$
3. 反正切函数 $y = \arctan x$ .... $x = \tan y$
   - $x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
4. 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ .... $x = \cot y$
   - $x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (0, \pi)$

例子 $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}, \ \arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}.$

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；
2. 幂函数 $y = x^{\mu}$；

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；
2. 幂函数 $y = x^{\mu}$；
3. 指数函数 $y = a^{x}$；

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；
2. 幂函数 $y = x^{\mu}$；
3. 指数函数 $y = a^{x}$；
4. 对数函数 $y = \log_a x$；

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；
2. 幂函数 $y = x^{\mu}$；
3. 指数函数 $y = a^x$；
4. 对数函数 $y = \log_a x$；
5. 三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，等；

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；
2. 幂函数 $y = x^{\mu}$；
3. 指数函数 $y = a^{x}$；
4. 对数函数 $y = \log_a x$；
5. 三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，等；
6. 反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，等.

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；
2. 幂函数 $y = x^{\mu}$；
3. 指数函数 $y = a^{x}$；
4. 对数函数 $y = \log_a x$；
5. 三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，等；
6. 反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，等.

由六种基本初等函数经过有限次四则运算和函数复合所得到的函数，称为初等函数.

复习与提高

选择　函数 $f(x) = xe^{\sin x}\tan x$ 是 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 偶函数　　(B) 无界函数

(C) 周期函数　　(D) 单调函数

题 1　判别下列函数是否为初等函数：

(1) $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(2) $g(x)=\begin{cases}-1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$

(3) $h(x)=\begin{cases}2, & x<1\\ 4, & x>1\end{cases}$

题 1 判别下列函数是否为初等函数:

(1) $f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$

(2) $g(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$

(3) $h(x) = \begin{cases} 2, & x < 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases}$

注记 $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ 不是初等函数.

第一节	数集与函数
第二节	数列的极限
第三节	函数的极限 I
第四节	函数的极限 II
第五节	无穷小量与无穷大量

第二节	数列的极限
A	数列极限的定义
B	数列极限的运算
C	数列极限的性质

数列的定义

定义 1 一列按照顺序排列的数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 称为数列，记为 $\{x_n\}$. 第 n 项 x_n 的表达式称为数列的通项或一般项.

数列的定义

定义 1　一列按照顺序排列的数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 称为数列，记为 $\{x_n\}$．第 n 项 x_n 的表达式称为数列的通项或一般项.

问题　随着 n 的增大，x_n 也跟着变化．当 n 趋于无穷大时，x_n 是否会无限接近一个确定的数？

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$
2. $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$
2. $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
3. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$

数列的例子

1 $x_n = 3$ $\qquad$ $3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$

2 $x_n = \dfrac{1}{n}$ $\qquad$ $1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots$

3 $x_n = \dfrac{1}{2^n}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{16},\ \cdots$

4 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ $\qquad$ $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \cdots$

数列的例子

1 $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$

2 $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

3 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$

4 $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$

5 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

数列的例子

1 $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$

2 $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

3 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$

4 $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$

5 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

6 $x_n = 2^n$ $\qquad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$
2. $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
3. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$
4. $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$
5. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
6. $x_n = 2^n$ $\qquad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$
7. $x_n = (-1)^n$ $\qquad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\quad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$
2. $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
3. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$
4. $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$
5. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
6. $x_n = 2^n$ $\quad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$
7. $x_n = (-1)^n$ $\quad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1 $x_n = 3$ $\quad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \quad \longrightarrow 3$

2 $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

3 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$

4 $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$

5 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

6 $x_n = 2^n$ $\quad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$

7 $x_n = (-1)^n$ $\quad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1 $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$ $\qquad \longrightarrow 3$

2 $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$ $\qquad \longrightarrow 0$

3 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$

4 $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$

5 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

6 $x_n = 2^n$ $\qquad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$

7 $x_n = (-1)^n$ $\qquad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1	$x_n = 3$	$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$	$\longrightarrow 3$
2	$x_n = \frac{1}{n}$	$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
3	$x_n = \frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
4	$x_n = \frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$	
5	$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	
6	$x_n = 2^n$	$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$	
7	$x_n = (-1)^n$	$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$	

数列的例子

1 $x_n = 3$ $\quad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \quad \longrightarrow 3$

2 $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots \quad \longrightarrow 0$

3 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots \quad \longrightarrow 0$

4 $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots \quad \longrightarrow 1$

5 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

6 $x_n = 2^n$ $\quad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$

7 $x_n = (-1)^n$ $\quad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1	$x_n = 3$	$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$	$\longrightarrow 3$
2	$x_n = \frac{1}{n}$	$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
3	$x_n = \frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
4	$x_n = \frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$	$\longrightarrow 1$
5	$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
6	$x_n = 2^n$	$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$	
7	$x_n = (-1)^n$	$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$	

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\quad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$ $\quad \longrightarrow 3$
2. $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$ $\quad \longrightarrow 0$
3. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$ $\quad \longrightarrow 0$
4. $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$ $\quad \longrightarrow 1$
5. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$ $\quad \longrightarrow 0$
6. $x_n = 2^n$ $\quad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$ $\quad \times$
7. $x_n = (-1)^n$ $\quad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1	$x_n = 3$	$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$	$\longrightarrow 3$
2	$x_n = \frac{1}{n}$	$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
3	$x_n = \frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
4	$x_n = \frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$	$\longrightarrow 1$
5	$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
6	$x_n = 2^n$	$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$	×
7	$x_n = (-1)^n$	$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$	×

数列的趋势

例子　如下数列不容易凭借观察得出其变化趋势：

1 $x_n = \sqrt[n]{n}$

2 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

数列的极限

定义 2　设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

如果这样的常数 A 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

数列极限的基本公式

1 $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$

2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$，（$k > 0$）

3 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^k} = 0$，（$k > 0$）

4 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = 0$，（$|a| > 1$）

数列极限

例子　设 $x_n = C$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

数列极限

例子 设 $x_n = C$，证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = C$.

证明 $\forall \epsilon > 0$，取 $N = 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

数列极限

例子　设 $x_n = C$，证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = C$.

证明　$\forall \epsilon > 0$，取 $N = 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

例子　证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

数列极限

例子 设 $x_n = C$，证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = C$.

证明 $\forall \epsilon > 0$，取 $N = 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

例子 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

证明 $\forall \epsilon > 0$，取 $N = \frac{1}{\epsilon}$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

数列极限

例子　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0.$

数列极限

例子 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$.

证明 $\forall\epsilon>0$，取 $N=\frac{1}{\epsilon}$，则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon.$$

数列极限

例子　证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$

证明　$\forall \epsilon > 0$，取 $N = \frac{1}{\epsilon}$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

例子　证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.$

数列极限

例子 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0.$

证明 $\forall\epsilon>0$，取 $N=\frac{1}{\epsilon}$，则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon.$$

例子 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$

证明 $\forall\epsilon>0$，取 $N=\frac{1}{\epsilon}$，则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\epsilon.$$

其中不等式 $2^n>n$ 可由数学归纳法得到.

发散数列

发散的数列至少有这两种可能（证明见后面）：

1. 无界型的：比如 $x_n = 2^n$；
2. 摆动型的：比如 $x_n = (-1)^n$.

第二节	数列的极限
A	数列极限的定义
B	数列极限的运算
C	数列极限的性质

数列极限的四则运算

定理 1　如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，那么

1　$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$；

2　$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \cdot B$；

3　$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{A}{B}$　（要求分母不为零）.

数列极限的四则运算

定理 1 如果 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim_{n\to\infty} y_n = B$，那么

1 $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n = A \pm B$;

2 $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = A \cdot B$;

3 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{A}{B}$（要求分母不为零）.

推论 $\lim_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \lim_{n\to\infty} x_n$.

数列极限的计算

例 1　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

数列极限的计算

例 1　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

解答　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=1-0=1.$

例 2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}$.

例 2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$

$$=\frac{1}{1+0}=1.$$

数列极限的计算

例 3　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{n^2+4n}$.

数列极限的计算

例 3 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{n^2+4n}$.

解答 原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{1}{n^2}}{1+4\cdot\dfrac{1}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}$$

$$=\frac{3+0}{1+4\cdot 0}=3.$$

数列极限的计算

例 4　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4}{n^2+1}$.

数列极限的计算

例 4　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4}{n^2+1}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}+4\cdot\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}$

$$=\frac{0+4\times 0}{1+0}=0.$$

数列极限的计算

例 5　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$.

数列极限的计算

例 5 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$.

解答 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$

$$=\frac{1+0}{1+0}=1.$$

数列极限的计算

例 6　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times3^n}{3^n+1}$.

数列极限的计算

例 6　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times 3^n}{3^n+1}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{3^n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}}$

$$=\frac{2}{1+0}=2.$$

数列极限的计算

练习 2　求数列极限

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3n^2}{1+n^3}$$

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n+(-1)^n}{n+(-1)^n}$$

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{6^n+1}$$

第二节	数列的极限
A	数列极限的定义
B	数列极限的运算
C	数列极限的性质

数列极限的性质

性质 1 (唯一性)　若 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限是唯一的.

数列极限的性质

性质 1 (唯一性)　若 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限是唯一的.

例 7　数列 $x_n = (-1)^n$ 发散.

数列极限的性质

性质 2 (有界性) 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得对任何 n 都有 $|x_n| \leqslant M$.

数列极限的性质

性质 2 (有界性)　设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得对任何 n 都有 $|x_n| \leqslant M$.

证明　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 取 $\epsilon = 1$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \leqslant |x_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_{[N]}, 1 + |A|\}$，则对任何 n 都有 $|x_n| \leqslant M$.

数列极限的性质

性质 2 (有界性) 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M>0$ 使得对任何 n 都有 $|x_n|\leqslant M$.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 取 $\epsilon = 1$，则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \leqslant |x_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_{[N]}, 1+|A|\}$，则对任何 n 都有 $|x_n| \leqslant M$.

例 8 $x_n = 1 - 5/n$ 收敛于 1，此时有 $|x_n| \leqslant 4$.

数列极限的性质

性质 2 (有界性) 设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得对任何 n 都有 $|x_n| \leqslant M$.

证明 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 取 $\epsilon = 1$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \leqslant |x_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_{[N]}, 1 + |A|\}$，则对任何 n 都有 $|x_n| \leqslant M$.

例 8 $x_n = 1 - 5/n$ 收敛于 1，此时有 $|x_n| \leqslant 4$.

例 9 数列 $x_n = 2^n$ 发散.

数列极限的性质

性质 3 (保号性)　设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

数列极限的性质

性质 3 (保号性)　设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

证明　取 $\epsilon = A/2$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = A/2$．此时 $x_n > A/2 > 0$.

数列极限的性质

性质 3 (保号性) 设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

证明 取 $\epsilon = A/2$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = A/2$．此时 $x_n > A/2 > 0$.

例 10 $x_n = 1 - 5/n$ 收敛于 $1 > 0$，此时当 $n > 5$ 时，有 $x_n > 0$.

数列极限的性质

定理 (保号性)　设数列 $x_n \geqslant 0$（或 $x_n \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则有 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

数列极限的性质

定理 (保号性) 设数列 $x_n \geqslant 0$（或 $x_n \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则有 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

推论 如果 $x_n \geqslant y_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则有 $A \geqslant B$.

复习与提高

选择　已知数列 $\{x_n\}$ 的通项为 $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$，则该数列……………………………………（　　）

(A) 收敛且有界　　(B) 收敛且无界

(C) 发散且有界　　(D) 发散且无界

复习与提高

题 1　判别下面各小题的求解过程是否正确：

(1) $$1=\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}n=0\cdot\lim_{n\to\infty}n=0$$

复习与提高

题 1 判别下面各小题的求解过程是否正确：

(1) $$1=\lim_{n\to\infty}1=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}n=0\cdot\lim_{n\to\infty}n=0$$

(2) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1/n}{n+1/n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+0}{n+0}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

复习与提高

题 2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}$（$a\neq -1$）.

复习与提高

题 2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{a^n+1}$（$a\neq -1$）.

题 3　比较无限循环小数 $0.9999\cdots$ 和 1 的大小.

第一节	数集与函数
第二节	数列的极限
第三节	函数的极限 I
第四节	函数的极限 II
第五节	无穷小量与无穷大量

第三节	函数的极限 I
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质

函数极限的例子

1. $y = \dfrac{1}{x}$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
4. $y = 2^x$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
4. $y = 2^x$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$

函数的极限 $(x \to \infty)$

定义 1　设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

函数的极限 $(x \to \infty)$

定义 1 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

注记 $x \to \infty$ 有两种方向，即 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$. 类似地可以定义 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

函数的极限 ($x \to \infty$)

定义 1 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

注记 $x \to \infty$ 有两种方向，即 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$. 类似地可以定义 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

性质 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

函数极限的基本公式 I

(1) $$\lim_{x\to\infty} C = C$$

(2) $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k为正整数)$$

(3) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

(4) $$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0 \quad (b > 1)$$

第三节	函数的极限 I
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质

四则运算法则

定理 1　如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$，那么

1 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\pm\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=A\pm B$

2 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=A\cdot B$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}=\dfrac{A}{B}$　（要求分母不为零）

四则运算法则

定理 1 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$，那么

1 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\pm\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=A\pm B$

2 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=A\cdot B$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

推论 $\lim\limits_{x\to\infty}(c\cdot f(x))=c\lim\limits_{x\to\infty} f(x).$

例 1　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{3x+4}$.

函数的极限 ($x \to \infty$)

例 1 求函数极限 $\lim_{x \to \infty} \frac{2x - 1}{3x + 4}$.

解答 原式 $= \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \frac{1}{x}}{3 + 4 \cdot \frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x \to \infty} 2 - \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}}{\lim_{x \to \infty} 3 + 4 \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}}$

$$= \frac{2 - 0}{3 + 4 \times 0} = \frac{2}{3}$$

函数的极限 $(x \to \infty)$

例 2　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{3x^2+2}$.

函数的极限 ($x \to \infty$)

例 2　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{3x^2+2}$.

解答　原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3+2\cdot\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}$

$$= \frac{2\times 0+0}{3+2\times 0} = 0$$

函数的极限 $(x \to \infty)$

例 3　求函数极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2+5x}$.

例 3　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2+5x}$.

解答　原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+\dfrac{1}{x^2}}{1+5\cdot\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + 5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}$

$$= \frac{3+0}{1+5\times 0} = 3$$

函数的极限 $(x \to \infty)$

练习 2　求下列函数极限：

$$(1)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{1+2x^2}{x+2x^2+3x^3};$$

函数的极限 $(x \to \infty)$

练习 2　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+2x^2}{x+2x^2+3x^3}$;

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^x+4^x}{2^x+5^x}$.

第三节	函数的极限 I
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质

函数极限的性质

性质 1 (唯一性) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则极限唯一.

函数极限的性质

性质 2 (局部有界性)　如果 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，则存在 $N > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

函数极限的性质

性质 2 (局部有界性)　如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，则存在 $N > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

例子　设 $f(x) = 1 - 5/x$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$,

函数极限的性质

性质 2 (局部有界性)　如果 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，则存在 $N > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

例子　设 $f(x) = 1 - 5/x$，则 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$，此时当 $|x| > 5$ 时有 $|f(x)| \leqslant 2$.

函数极限的性质

性质 3 (局部保号性)　如果 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

函数极限的性质

性质 3 (局部保号性)　如果 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

例子　设 $f(x) = 1 - 5/x$，则 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 > 0$，

函数极限的性质

性质 3 (局部保号性)　如果 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

例子　设 $f(x) = 1 - 5/x$，则 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 > 0$，此时当 $|x| > 10$ 时，有 $f(x) > 1/2 > 0$.

函数极限的性质

定理 (保号性)　设 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

函数极限的性质

定理 (保号性) 设 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

推论 如果函数 $g(x) \geqslant h(x)$，而且 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = A$，$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = B$，则有 $A \geqslant B$.

前面两节复习题

复习1　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n-2n^2}{n^2+(-1)^n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^2+2x+1}$;

前面两节复习题

复习1　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n-2n^2}{n^2+(-1)^n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^2+2x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+4}{4^x+1}$.

第二节	数列的极限
第三节	函数的极限 I
第四节	函数的极限 II
第五节	无穷小量与无穷大量
第六节	两个重要极限

第四节	函数的极限 II
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质
D	左极限与右极限

函数极限的例子

1. $y = x$

函数极限的例子

1. $y = x$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$

函数极限的例子

1. $y = x$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$
2. $y = \sqrt{x}$

函数极限的例子

1 $y = x$

- 当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$

2 $y = \sqrt{x}$

- 当 $x \to x_0$ 时，$y \to \sqrt{x_0}$

函数极限的例子

1 $y = x$

- 当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$

2 $y = \sqrt{x}$

- 当 $x \to x_0$ 时，$y \to \sqrt{x_0}$

3 $y = \dfrac{\sin x}{x}$

函数极限的例子

1 $y = x$

- 当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$

2 $y = \sqrt{x}$

- 当 $x \to x_0$ 时，$y \to \sqrt{x_0}$

3 $y = \dfrac{\sin x}{x}$

- 当 $x \to 0$ 时，$y \to$?

函数的极限 $(x \to x_0)$

定义 1　设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

函数极限的例子

例子　证明 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

函数极限的例子

例子　证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证明　$\forall\epsilon > 0$，取 $\delta = \epsilon$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \delta = \epsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

函数极限的基本公式

定理 (初等函数的连续性)　如果初等函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有定义，则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例子 对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$;

例子 对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim_{x \to x_0} c = c$;
2. $\lim_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$;

例子　对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$;
2. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$;
3. $\lim\limits_{x\to 3} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^3$;

例子 对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$；
2. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$；
3. $\lim\limits_{x\to 3} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^3$；
4. $\lim\limits_{x\to 9} \log_3 x = \log_3 9 = 2$；

例子 对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$；
2. $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$；
3. $\lim\limits_{x \to 3} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^3$；
4. $\lim\limits_{x \to 9} \log_3 x = \log_3 9 = 2$；
5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$；

例子 对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$；
2. $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 2^3 = 8$；
3. $\lim\limits_{x \to 3} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^3$；
4. $\lim\limits_{x \to 9} \log_3 x = \log_3 9 = 2$；
5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$；
6. $\lim\limits_{x \to 1} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

函数的极限 $(x \to x_0)$

注记　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

函数的极限 $(x \to x_0)$

注记　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

函数的极限 $(x \to x_0)$

注记 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 1 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

函数的极限 ($x \to x_0$)

注记 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 1 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

注记 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

函数的极限 $(x \to x_0)$

注记　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 1　设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

注记　即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 2　函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-1}$ 不存在.

第四节	函数的极限 II
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质
D	左极限与右极限

四则运算法则

定理 1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，那么

1. $$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$$

2. $$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$$

3. $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\frac{A}{B}$$ （要求分母不为零）

四则运算法则

定理 1 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，那么

1 $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \pm B$

2 $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$

3 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

推论 $\lim\limits_{x \to x_0} (c \cdot f(x)) = c \lim\limits_{x \to x_0} f(x).$

函数的极限 $(x \to x_0)$

例 3　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$.

例 3 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$.

解答 原式 $= 3\lim\limits_{x\to 1}x^2 - 2\lim\limits_{x\to 1}x + \lim\limits_{x\to 1}1$

$$= 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 2$$

例 4　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

例 4 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

解答 原式 $= \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x+1}{x+3}$

$$= \frac{3+1}{3+3} = \frac{2}{3}$$

例 5 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

函数的极限 $(x \to x_0)$

例 5　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4}$$

函数的极限 $(x \to x_0)$

练习 1　求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x + 2\ln(1+x) + e^x + 2)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$.

函数的极限 $(x \to x_0)$

例 6　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

函数的极限 $(x \to x_0)$

例 6 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解答 原式

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{1+x}{1-x^2}-\frac{2}{1-x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2} = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)} = -\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}$$

$$= -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

第四节	函数的极限 II
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质
D	左极限与右极限

函数极限的性质

性质 1 (唯一性)　若 $\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则极限唯一.

函数极限的性质

性质 2 (局部有界性)　如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

函数极限的性质

性质 2 (局部有界性)　如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

证明　取 $\epsilon = 1$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A|$$

$$\leqslant |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = 1 + |A|$，就得到函数极限的局部有界性.

函数极限的性质

性质 2 (局部有界性)　如果 $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在 $\delta>0$ 和 $M>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明　取 $\epsilon=1$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon=1$. 此时

$$|f(x)|=|(f(x)-A)+A|$$
$$\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$$

取 $M=1+|A|$，就得到函数极限的局部有界性.

例子　设 $f(x)=1/x$，则 $\lim_{x\to 1} f(x)=1$，

性质 2 (局部有界性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

证明　取 $\epsilon = 1$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A|$$

$$\leqslant |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = 1 + |A|$，就得到函数极限的局部有界性.

例子　设 $f(x) = 1/x$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1$，此时当 $0 < |x - 1| < 1/2$ 时有 $|f(x)| \leqslant 2$.

函数极限的性质

性质 3 (局部保号性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>\frac{A}{2}>0$（或 $f(x)<\frac{A}{2}<0$）.

函数极限的性质

性质 3 (局部保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $f(x)>\frac{A}{2}>0$（或 $f(x)<\frac{A}{2}<0$）.

证明　取 $\epsilon=A/2$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon=A/2$. 此时 $f(x)>A/2>0$.

函数极限的性质

性质 3 (局部保号性)　如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

证明　取 $\epsilon = A/2$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = A/2$. 此时 $f(x) > A/2 > 0$.

例子　设 $f(x) = 2x - 1$，则 $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 > 0$，

函数极限的性质

性质 3 (局部保号性) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

证明 取 $\epsilon = A/2$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = A/2$. 此时 $f(x) > A/2 > 0$.

例子 设 $f(x) = 2x - 1$，则 $\lim_{x\to 1} f(x) = 1 > 0$，此时当 $0 < |x - 1| < 1/4$ 时，有 $f(x) > 1/2 > 0$.

函数极限的性质

定理 (保号性)　设 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

函数极限的性质

定理（保号性） 设 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

推论 如果函数 $g(x) \geqslant h(x)$，而且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = B$，则有 $A \geqslant B$.

第四节	函数的极限 II
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质
D	左极限与右极限

左极限和右极限

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^-) = A.$$

左极限和右极限

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^+) = A.$$

定理 2 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

定理 2 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

例 7 设 $f(x) = |x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

定理 2 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

例 7 设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

定理 2 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

例 7 设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

例 8 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ x, & x\geqslant 0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 9 设 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ x^2-x+2, & x>1\end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

定理 2 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

例 7 设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

例 8 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ x, & x\geqslant 0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 9 设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2-x+2, & x>1 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

注记 研究当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限，不必要求 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

左极限和右极限

练习 2　已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ e^x, & 0<x<1; \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$

判断极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在，若存在求出该极限.

复习与提高

选择 函数 $f(x)$ 在点 $x = x_0$ 处有定义是当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 极限存在的 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件

(C) 充分且必要条件 (D) 无关条件

前面三节复习题

复习 1　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+(-1)^n}{2n^2+n+(-1)^n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}$.

第三节 函数的极限 I

第四节 函数的极限 II

第五节 无穷小量与无穷大量

第六节 两个重要极限

第七节 无穷小量的比较

第五节	无穷小量与无穷大量
A	无穷小量
B	无穷大量

无穷小量

定义　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，就称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

无穷小量

定义 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$，就称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

定义 如果 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$，就称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷小量.

无穷小量

定义 如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$，就称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷小量.

定义 如果 $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$，就称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷小量.

注记 类似地，可以定义 $x \to -\infty$、$x \to +\infty$ 时的无穷小量.

无穷小量

例 1　0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

无穷小量

例 1　0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

例 2　函数 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x\to\infty$ 时的无穷小量.

无穷小量

例 1　0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

例 2　函数 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x\to\infty$ 时的无穷小量.

例 3　函数 $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 何时是无穷小量?

无穷小量的运算

1 两个无穷小量的和差还是无穷小量.

2 两个无穷小量的乘积还是无穷小量.

3 无穷小量和有界函数的乘积还是无穷小量.

无穷小量的运算

1. 两个无穷小量的和差还是无穷小量.
2. 两个无穷小量的乘积还是无穷小量.
3. 无穷小量和有界函数的乘积还是无穷小量.

例 4　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

无穷小量的运算

1. 两个无穷小量的和差还是无穷小量.
2. 两个无穷小量的乘积还是无穷小量.
3. 无穷小量和有界函数的乘积还是无穷小量.

例 4　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

例 5　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x+\sin x}$.

无穷小量的运算

1 两个无穷小量的和差还是无穷小量.

2 两个无穷小量的乘积还是无穷小量.

3 无穷小量和有界函数的乘积还是无穷小量.

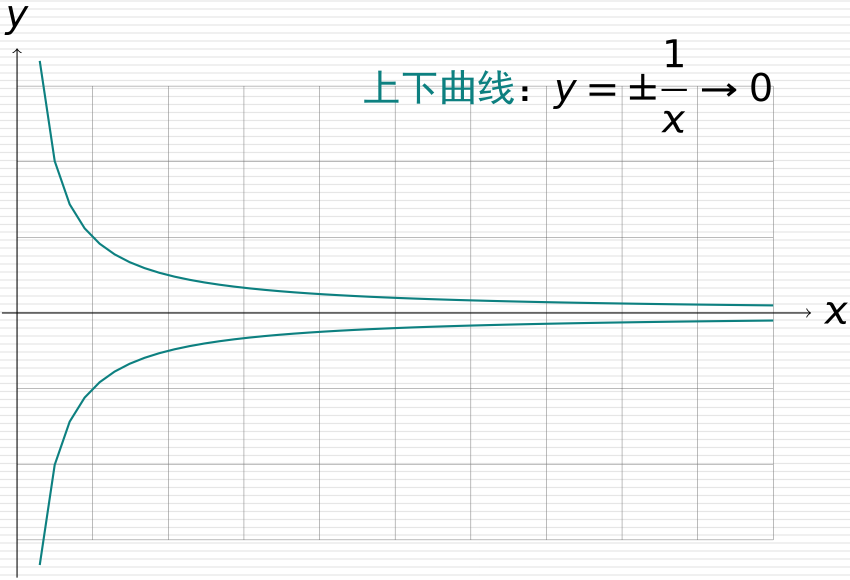
例 4　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

例 5　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x+\sin x}$.

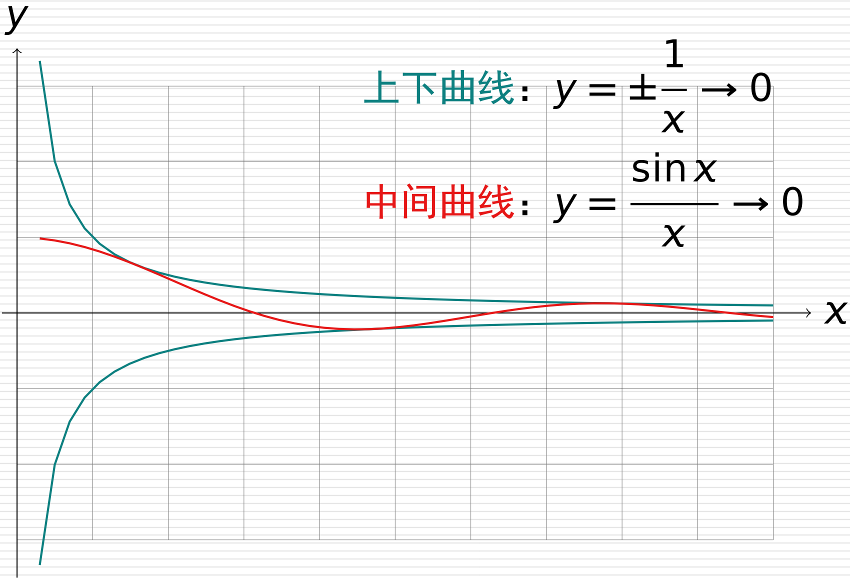
例 6　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

无穷小量与有界函数的乘积

上下曲线：$y = \pm\frac{1}{x} \to 0$



无穷小量与有界函数的乘积



上下曲线：$y=\pm\frac{1}{x}\to 0$

中间曲线：$y=\frac{\sin x}{x}\to 0$

练习 1　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\cos x}{\cos x+3x^2}$.

第五节	无穷小量与无穷大量
A	无穷小量
B	无穷大量

无穷大量 $(x \to \infty)$

定义　设 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某个正数时有定义．如果对任何 $M > 0$，总存在 $N > 0$，使得只要 $|x| > N$，就有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷大量，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad ①$$

无穷大量 ($x \to \infty$)

定义 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某个正数时有定义．如果对任何 $M > 0$，总存在 $N > 0$，使得只要 $|x| > N$，就有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷大量，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \quad ①$$

类似地可以定义 $x \to -\infty$ 的无穷大量，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \quad ②$$

无穷大量 ($x \to \infty$)

定义　设 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某个正数时有定义. 如果对任何 $M > 0$，总存在 $N > 0$，使得只要 $|x| > N$，就有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷大量，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad ①$$

类似地可以定义 $x \to -\infty$ 的无穷大量，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad ②$$

以及和 $x \to +\infty$ 时的无穷大量，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \qquad ③$$

无穷大量 $(x \to \infty)$

定义 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某个正数时有定义. 如果对任何 $M > 0$, 总存在 $N > 0$, 使得只要 $|x| > N$, 就有 $|f(x)| > M$, 则称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷大量, 记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad ①$$

类似地可以定义 $x \to -\infty$ 的无穷大量, 记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad ②$$

以及和 $x \to +\infty$ 时的无穷大量, 记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \qquad ③$$

结论: ① 成立等价于 ② 和 ③ 同时成立.

无穷大量 $(x \to \infty)$

例 7　x，x^2，$x+1$ 都是 $x \to \infty$ 时的无穷大量，即

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty.$$

无穷大量 $(x \to \infty)$

例 7　x，x^2，$x+1$ 都是 $x \to \infty$ 时的无穷大量，即

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty.$$

例 8　e^x 是 $x \to +\infty$ 时的无穷大量，即

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty.$$

无穷大量 $(x \to x_0)$

定义　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义．如果对任何给定的 $M > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得只要 $0 < |x - x_0| < \delta$，就有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的无穷大量，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

无穷大量 $(x \to x_0)$

例 9 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{x+1}{x^2}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大量.

无穷大量 $(x \to x_0)$

例 9　$\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{x+1}{x^2}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大量.

例 10　$\dfrac{1}{x-1}$ 和 $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x \to 1$ 时的无穷大量.

无穷大量 $(x \to x_0)$

例 9 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{x+1}{x^2}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大量.

例 10 $\dfrac{1}{x-1}$ 和 $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x \to 1$ 时的无穷大量.

例 11 函数 $y = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ 何时是无穷大量?

无穷大量与无穷小量的关系

定理 1 无穷大量 y 的倒数 $\dfrac{1}{y}$ 为无穷小量，而非零无穷小量 y 的倒数 $\dfrac{1}{y}$ 为无穷大量.

无穷大量与无穷小量的关系

定理 1 无穷大量 y 的倒数 $\dfrac{1}{y}$ 为无穷小量，而非零无穷小量 y 的倒数 $\dfrac{1}{y}$ 为无穷大量.

例 12 $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x^2+1}=0 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty.$$

有理分式的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{2}{3} \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1}=0 \qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty$$

有理分式的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{2}{3}\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1}=0\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

复习与提高

选择　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 x 的某个变化过程中的无穷大量，则下列各函数一定属于无穷大量的是 $\cdots$ (　　)

(A) $f(x)+g(x)$　　(B) $f(x)-g(x)$

(C) $f(x)\cdot g(x)$　　(D) $f(x)/g(x)$

前面四节复习题

复习1　求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\cos x+2x}{x+\cos x}$.

第四节	函数的极限 II
第五节	无穷小量与无穷大量
第六节	两个重要极限
第七节	无穷小量的比较
第八节	函数的连续性

本节基本内容

极限存在准则 I　　　　极限存在准则 II

$\Downarrow$　　　　$\Downarrow$

重要极限 I　　　　重要极限 II

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

第六节	两个重要极限
A	重要极限 I
B	重要极限 II

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I)　如果数列 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I) 如果数列 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，而且 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim_{n\to\infty} y_n = A$.

注记 在上述定理中，如果不等式 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立，结论不变.

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I) 如果数列 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

注记 在上述定理中，如果不等式 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立，结论不变.

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I) 如果数列 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

注记 在上述定理中，如果不等式 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立，结论不变.

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

注记 无穷多个无穷小量的和未必是无穷小量.

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I)　如果 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I)　如果 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim_{x \to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim_{x \to x_0} g(x) = A$.

注记　若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$，定理仍成立.

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I)　如果 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

注记　若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$，定理仍成立.

注记　在上述定理中，如果不等式 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立，结论不变.

重要极限 I

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

重要极限 I

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

一般地，如果当 $x \to 0$ 时，$\phi(x) \to 0$，则有

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin \phi(x)}{\phi(x)} = 1$$

重要极限 I

例 2　求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

重要极限 I

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times\frac{1}{1}=1$$

重要极限 I

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

重要极限 I

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\times 1=3$$

重要极限 I

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$.

重要极限 I

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$.

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\right)$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sin 4x}$$

$$=\frac{1}{4}\times1\times1=\frac{1}{4}$$

重要极限 I

练习 1　求下列函数极限：

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\,\tan\sqrt{x}}{x}$$

重要极限 I

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

重要极限 I

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$.

第六节	两个重要极限
A	重要极限 I
B	重要极限 II

极限存在准则 II

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

极限存在准则 II

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

极限存在准则 II

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记　若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立.

重要极限 II

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

重要极限 II

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

重要极限 II

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

重要极限 II

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e} \quad \xrightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \mathrm{e}$$

重要极限 II

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \xRightarrow{u=1/x} \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

一般地，如果当 $x\to\square$ 时，$\psi(x)\to 0$，则有

$$\lim_{x\to\square}\left(1+\psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}}=e$$

1^{∞} 型极限 · 简单情形

例 8　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

1^{∞} 型极限 · 简单情形

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}$$

1^{∞} 型极限 · 简单情形

例 9　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$

1^{∞} 型极限 · 简单情形

例 9　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}}=\mathrm{e}^{-1/3}$$

1^∞ 型极限 · 简单情形

例 10　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

1^{∞} 型极限 · 简单情形

例 10 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{-x}{2}\right)^{\frac{2}{-x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{-x}{2}\right)^{\frac{2}{-x}}\right]^{-\frac{1}{2}}=e^{-1/2}$$

练习 2　求函数极限：

(1) $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{4}{x}\right)^{x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{3x}}$$

1^{∞} 型极限 · 幂指情形

例 11　求极限 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

1^∞ 型极限 · 幂指情形

例 11　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{2x}{x-1}}=e^2.$$

1^{∞} 型极限 · 幂指情形

例 12　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

1^{∞} 型极限 · 幂指情形

例 12 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+3x\right)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{3x}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{3x}{\sin x}}=e^{3}.$$

练习 3　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{4x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{x+1}$

练习 3　求函数极限:

(1) $\lim\limits_{x \to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{4x}}$

(2) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{x+1}$

(3) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x-3}$

常数 e 的意义

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

常数 e 的意义

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%)=M\times 1.005$

常数 e 的意义

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%)=M\times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4=M\times 1.00500938$

常数 e 的意义

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%)=M\times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^{4}=M\times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360}=M\times 1.00501249$

常数 e 的意义

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%)=M\times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^{4}=M\times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360}=M\times 1.00501249$

事实　常数 e 反映了连续增长的规律.

两个重要极限

复习 1　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)^{x\sin x}$

两个重要极限

复习 1　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x\sin x}$

(3) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x+1}$

复习与提高

例 14　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

复习与提高

例 14　求函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + \cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解答　因为当 $x \to 0$ 时，$\cos x$ 不是无穷小量，所以不能用重要极限 II 公式来计算.

复习与提高

例 14 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解答 因为当 $x \to 0$ 时，$\cos x$ 不是无穷小量，所以不能用重要极限 II 公式来计算.

实际上，这个函数是初等函数，且在 0 的邻域有定义，所以其极限为 $(1+1)^1 = 2$.

复习与提高

例 15　设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

复习与提高

例 15 设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

例 16 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \dfrac{1}{2}$，且当 $n \geqslant 1$ 时有

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n^2}{2}.$$

研究数列的极限.

复习与提高

例 15　设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

例 16　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \dfrac{1}{2}$，且当 $n \geqslant 1$ 时有

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n^2}{2}.$$ 研究数列的极限.

解答　先说明数列收敛，再根据数列的递归关系求出其极限.

第五节	无穷小量与无穷大量
第六节	两个重要极限
第七节	无穷小量的比较
第八节	函数的连续性
第九节	闭区间上连续函数

第七节	无穷小量的比较
A	无穷小量的阶
B	等价无穷小量代换

无穷小量的比较

例子　比较 $x \to 0$ 时的三个无穷小量 x，$2x$，x^2.

无穷小量的比较

例子　比较 $x \to 0$ 时的三个无穷小量 x，$2x$，x^2.

x	1	0.1	0.01	0.001	$\cdots$	$\to$	0
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	$\cdots$	$\to$	0
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	$\cdots$	$\to$	0

无穷小量的阶

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1. 称 β 比 α 高阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为 $\beta = o(\alpha)$.

无穷小量的阶

定义　设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1. 称 β 比 α 高阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 称 β 比 α 低阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$.

无穷小量的阶

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1. 称 β 比 α 高阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 称 β 比 α 低阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$.
3. 称 β 和 α 同阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$.

无穷小量的阶

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1 称 β 比 α 高阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为 $\beta = o(\alpha)$.

2 称 β 比 α 低阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$.

3 称 β 和 α 同阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$.

★ 称 β 和 α 等价，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，记为 $\beta \sim \alpha$.

无穷小量的阶

定义　设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1. 称 β 比 α 高阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 称 β 比 α 低阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$.
3. 称 β 和 α 同阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$.

★ 称 β 和 α 等价，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，记为 $\beta \sim \alpha$.

无穷小量的阶

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1. 称 β 比 α 高阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 称 β 比 α 低阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$.
3. 称 β 和 α 同阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$.

★ 称 β 和 α 等价，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，记为 $\beta \sim \alpha$.

注记 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，$k > 0$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

无穷小量的阶

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1. 称 β 比 α 高阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 称 β 比 α 低阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$.
3. 称 β 和 α 同阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$.

★ 称 β 和 α 等价，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，记为 $\beta \sim \alpha$.

注记 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k} = c \neq 0$，$k > 0$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小.

例子 常值函数 0 是最高阶的无穷小量.

无穷小量的阶

例 1 在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x 高阶.

无穷小量的阶

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x 高阶.

例 2　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x^3 低阶.

无穷小量的阶

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x 高阶.

例 2　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x^3 低阶.

例 3　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

无穷小量的阶

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x 高阶.

例 2　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x^3 低阶.

例 3　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

例 4　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价.

无穷小量的阶

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x 高阶.

例 2　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x^3 低阶.

例 3　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

例 4　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价.

例 5　在 $x \to 0$ 时，$2x^3$ 是关于 x 的 3 阶无穷小量.

无穷小量的阶

练习 1　易知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 和 $g(x) = x^2$ 均为 $x \to 0$ 时的无穷小量.

(1) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶?

(2) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶?

(3) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶?

(4) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价?

常用的等价无穷小量

当 $x \to 0$ 时，有如下这些常用的等价无穷小量：

(1) $\sin x \sim x$	(5) $\ln(1+x) \sim x$
(2) $\tan x \sim x$	(6) $e^x - 1 \sim x$
(3) $\arcsin x \sim x$	(7) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
(4) $\arctan x \sim x$	(8) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

第七节	无穷小量的比较
A	无穷小量的阶
B	等价无穷小量代换

等价无穷小量代换

定理　设当 $x \to x_0$ 时 α、α'、β、β' 都为无穷小量，而且 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$，则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$$

等价无穷小量代换

定理　设当 $x \to x_0$ 时 α、α'、β、β' 都为无穷小量，而且 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$，则有

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha'}{\beta'}$$

推论　设当 $x \to x_0$ 时 α 和 α' 是无穷小量，$\alpha \sim \alpha'$，而且 γ 为无穷大量，则有

$$\lim_{x \to x_0} \alpha\gamma = \lim_{x \to x_0} \alpha'\gamma$$

等价无穷小量代换

例 6　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

等价无穷小量代换

例 6　求函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

例 7　求函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{\sin(x^2)}$.

等价无穷小量代换

例 6　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

例 7　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\sin(x^2)}$.

例 8　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{1+2x}-1}$.

等价无穷小量代换

例 6　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

例 7　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\sin(x^2)}$.

例 8　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{1+2x}-1}$.

例 9　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{(\sqrt{1+x}-1)\arcsin x}$.

等价无穷小量代换

练习 2　求下列函数极限：

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\arcsin 2x};$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{(e^{2x}-1)\ln(1-2x)}.$$

等价无穷小量代换

例 10　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot(e^{x+1}-1)}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$.

等价无穷小量代换

例 10　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot(e^{x+1}-1)}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$.

注记　只能代换无穷小量，不能代换非无穷小量.

等价无穷小量代换

例 10 求函数极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x\cdot(e^{x+1}-1)}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$.

注记 只能代换无穷小量，不能代换非无穷小量.

例 11 求函数极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

等价无穷小量代换

例 10　求函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \cdot (e^{x+1} - 1)}{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}$.

注记　只能代换无穷小量，不能代换非无穷小量.

例 11　求函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3 x}$.

注记　只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项.

复习与提高

选择　当 $x \to 0^+$ 时，下列各无穷小量中与 $\sqrt{x}$ 等价的是……………………………………(　　)

(A) $1 - e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}} - 1$　　(D) $1 - \cos\sqrt{x}$

等价无穷小量代换

复习 1　求下列函数极限：

$$(1)\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)(e^{\sqrt{x}}-1)}{\sin x};$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x+x^2)\cdot\tan 3x}{1-\cos 3x}.$$

等价无穷小量代换

复习 2　求下列函数极限：

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1-2x^2}-1)(e^{2x+1}-1)}{\sin(x^2)};$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{\sqrt{1-x^3}-1}.$$

复习与提高

性质　设 α、β 是同一变化过程中两个无穷小量，则

(1) $\alpha \sim \beta \quad \Leftrightarrow \alpha - \beta = o(\alpha)$

复习与提高

性质 设 α、β 是同一变化过程中两个无穷小量，则

(1) $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = o(\alpha)$

(2) α 与 β 同阶不等价 $\Leftrightarrow$ $\alpha - \beta$ 与 α 同阶不等价

复习与提高

性质 设 α、β 是同一变化过程中两个无穷小量，则

(1) $\alpha \sim \beta \iff \alpha - \beta = o(\alpha)$

(2) α 与 β 同阶不等价 $\iff \alpha - \beta$ 与 α 同阶不等价

(3) α 比 β 低阶 $\iff \alpha - \beta \sim \alpha$

…………………………………………

复习与提高

性质 设 α、β 是同一变化过程中两个无穷小量，则

(1) $\alpha \sim \beta \iff \alpha - \beta = o(\alpha)$

(2) α 与 β 同阶不等价 $\iff \alpha - \beta$ 与 α 同阶不等价

(3) α 比 β 低阶 $\iff \alpha - \beta \sim \alpha$

. . . .

定理 若 α 与 β 不等价，$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则有

$$\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'.$$

复习与提高

性质 设 α、β 是同一变化过程中两个无穷小量，则

(1) $\alpha \sim \beta \qquad \Leftrightarrow \alpha - \beta = o(\alpha)$

(2) α 与 β 同阶不等价 $\Leftrightarrow \alpha - \beta$ 与 α 同阶不等价

(3) α 比 β 低阶 $\qquad \Leftrightarrow \alpha - \beta \sim \alpha$

....

定理 若 α 与 β 不等价，$\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则有

$$\alpha - \beta \sim \alpha' - \beta'.$$

此时若 $\gamma \sim \gamma'$，则有 $\lim \dfrac{\alpha - \beta}{\gamma} = \lim \dfrac{\alpha' - \beta'}{\gamma'}$.

第五节	无穷小量与无穷大量
第六节	两个重要极限
第七节	无穷小量的比较
第八节	函数的连续性
第九节	闭区间上连续函数

第八节	函数的连续性
A	函数的连续性
B	连续函数的运算
C	函数的间断点

连续的概念

例子　自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小.

2 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小.

连续的概念

例子　自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1. 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小.
2. 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小.

对于 $y = f(x)$ 定义域中的一点 x_0，如果 x 从 x_0 作微小改变 Δx 后，y 的相应改变量 Δy 也很微小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

连续的概念

定义 设 $y = f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \big(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\big) = 0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

连续的概念

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$$\Updownarrow$$

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

连续函数

定义 (1) $f(x)$ 在 x_0 点左连续是指 $f(x_0^-) = f(x_0)$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 点右连续是指 $f(x_0^+) = f(x_0)$.

连续函数

定义　(1) $f(x)$ 在 x_0 点左连续是指 $f(x_0^-)=f(x_0)$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 点右连续是指 $f(x_0^+)=f(x_0)$.

定义　如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

连续函数

定义 (1) $f(x)$ 在 x_0 点左连续是指 $f(x_0^-) = f(x_0)$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 点右连续是指 $f(x_0^+) = f(x_0)$.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

- $f(x)$ 在区间左端点 a 处连续是指右连续;
- $f(x)$ 在区间右端点 b 处连续是指左连续.

连续函数

定义 (1) $f(x)$ 在 x_0 点左连续是指 $f(x_0^-) = f(x_0)$.

(2) $f(x)$ 在 x_0 点右连续是指 $f(x_0^+) = f(x_0)$.

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

- $f(x)$ 在区间左端点 a 处连续是指右连续;
- $f(x)$ 在区间右端点 b 处连续是指左连续.

注记 连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

第八节	函数的连续性
A	函数的连续性
B	连续函数的运算
C	函数的间断点

复合函数的极限

例 1　设 $u=g(x)\equiv 1$，$y=f(u)=\begin{cases}1, & u\neq 1\\ 2, & u=1\end{cases}$，则

复合函数为 $y=f(g(x))\equiv 2$．此时有

$$\lim_{x\to 1}u=1,\quad \lim_{u\to 1}y=1,\quad \text{但是}\quad \lim_{x\to 1}y=2.$$

复合函数的极限

例 1 设 $u=g(x)\equiv 1$, $y=f(u)=\begin{cases}1, & u\neq 1\\ 2, & u=1\end{cases}$, 则

复合函数为 $y=f(g(x))\equiv 2$. 此时有

$$\lim_{x\to 1} u=1,\quad \lim_{u\to 1} y=1,\quad \text{但是}\quad \lim_{x\to 1} y=2.$$

问题 复合函数的极限运算法则何时成立？

极限与连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ （极限存在）：

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon)$$

. . . .

极限与连续

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$（极限存在）：

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathring{U}(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(A,\epsilon)$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$（连续）：

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in U(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0),\epsilon)$$

复合函数的极限

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

复合函数的极限

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & \neq & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
 & & U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \not\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) \arrow[r, phantom, "\neq"] & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

复合函数的极限

$$\boxed{\begin{array}{c} x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0) \\ g(x) \neq u_0 \end{array}}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0, \ \lim_{u \to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0, \delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0, \delta) \arrow[dd, "f \circ g"] \\
\mathring{U}(u_0, \eta) & \mathring{U}(u_0, \eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A, \epsilon) & U(A, \epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$$

$$g(x) \neq u_0$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0, \ \lim_{u \to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
\mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[r, phantom, "="] & \mathring{U}(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$\boxed{\begin{array}{c} x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0) \\ g(x) \neq u_0 \end{array}}$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u \to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\mathring{U}(x_0, \delta) \xrightarrow{g} \mathring{U}(u_0, \eta) = \mathring{U}(u_0, \eta) \xrightarrow{f} U(A, \epsilon)$$

$$\mathring{U}(x_0, \delta) \xrightarrow{f \circ g} U(A, \epsilon) \quad \checkmark$$

复合函数的极限

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0,\ \lim_{u \to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A$$

复合函数的极限

$y = f(u)$

在 u_0 点连续

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0, \ \lim_{u \to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) & U(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$$y=f(u)$$

在 u_0 点连续

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0,\ \lim_{u\to u_0} f(u)=A \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[d, "g"] & & \mathring{U}(x_0,\delta) \arrow[dd, "f\circ g"] \\
U(u_0,\eta) = & U(u_0,\eta) \arrow[d, "f"] & \\
& U(A,\epsilon) & U(A,\epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

$y = f(u)$

在 u_0 点连续

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = u_0, \ \lim_{u \to u_0} f(u) = A \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f[g(x)] = A$$

$$\begin{tikzcd}
\mathring{U}(x_0, \delta) \arrow[d, "g"] & & & \mathring{U}(x_0, \delta) \arrow[dd, "\checkmark \ f \circ g"] \\
U(u_0, \eta) & = & U(u_0, \eta) \arrow[d, "f"] & \\
& & U(A, \epsilon) & U(A, \epsilon)
\end{tikzcd}$$

复合函数的极限

定理 1　如果 $\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0$，$\lim_{u\to u_0} f(u) = A$，并且存在 $\delta_0 > 0$ 使得 $x \in \mathring{U}(x_0, \delta_0)$ 时 $g(x) \neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)] = A$$

复合函数的极限

定理 1 如果 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim_{u\to u_0} f(u)=A$，并且存在 $\delta_0>0$ 使得 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $g(x)\neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

定理 2 若 $\lim_{x\to x_0} g(x)=u_0$ 且 $f(u)$ 在 u_0 点连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]=f(u_0).$$

复合函数的极限

定理 1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$，$\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A$，并且存在 $\delta_0>0$ 使得 $x\in \mathring{U}(x_0,\delta_0)$ 时 $g(x)\neq u_0$，则有

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=A$$

定理 2 若 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=u_0$ 且 $f(u)$ 在 u_0 点连续，则

$$\lim_{x\to x_0} f[g(x)]=f\left[\lim_{x\to x_0} g(x)\right]=f(u_0).$$

例 2 $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}}=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}.$

定理 3　单调连续函数的反函数仍然是单调连续函数.

连续函数

定理 3　单调连续函数的反函数仍然是单调连续函数.

定理 4　两个连续函数的四则运算仍然是连续函数.

连续函数

定理 3　单调连续函数的反函数仍然是单调连续函数.

定理 4　两个连续函数的四则运算仍然是连续函数.

定理 5　两个连续函数的复合函数仍然是连续函数.

连续函数

定理 3　单调连续函数的反函数仍然是单调连续函数.

定理 4　两个连续函数的四则运算仍然是连续函数.

定理 5　两个连续函数的复合函数仍然是连续函数.

定理 6　基本初等函数在其定义域内都是连续函数.

连续函数

定理 3　单调连续函数的反函数仍然是单调连续函数.

定理 4　两个连续函数的四则运算仍然是连续函数.

定理 5　两个连续函数的复合函数仍然是连续函数.

定理 6　基本初等函数在其定义域内都是连续函数.

定理 7　初等函数在其定义区间内都是连续函数.

函数的连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Longleftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$.

函数的连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

例 3 判断函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点的连续性：

(1) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ x-1, & x \geqslant 0 \end{cases}$；

(2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin x}{x}, & x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}, & x > 0 \end{cases}$.

函数的连续性

练习 1　已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$，判断它在 $x=0$ 点的连续性.

例 4 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ b, & x=1 \\ ax+1, & x>1 \end{cases}$ 是连续的，求 a 和 b.

例 4 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ b, & x=1 \\ ax+1, & x>1 \end{cases}$ 是连续的，求 a 和 b.

练习 2 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，求 a 和 b：

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{ax}-1}{x}, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \dfrac{\sqrt[3]{1-bx+x^2}-1}{x}, & x>0 \end{cases}.$$

第八节	函数的连续性
A	函数的连续性
B	连续函数的运算
C	函数的间断点

函数的间断点

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 间断，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点：$f(x_0^-) = f(x_0^+)$

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点：$f(x_0^-) = f(x_0^+)$
- 跳跃间断点：$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点：$f(x_0^-) = f(x_0^+)$
- 跳跃间断点：$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$

第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
- 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$

第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在

- 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
- 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$

第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在

- 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
- 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大

函数的间断点

例 5 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ ……………可去间断点

函数的间断点

例 5 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ …………… 可去间断点

例 6 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ …………… 跳跃间断点

函数的间断点

例 5 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ ……………可去间断点

例 6 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ ……………跳跃间断点

例 7 $f(x)=\frac{1}{x}$ ……………………………无穷间断点

函数的间断点

例 5　$f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ ……………可去间断点

例 6　$f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ ……………跳跃间断点

例 7　$f(x)=\frac{1}{x}$ ……………………………无穷间断点

例 8　$f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ……………………………振荡间断点

函数的间断点

例 5 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ ……………可去间断点

例 6 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ …………跳跃间断点

例 7 $f(x)=\frac{1}{x}$ ……………………………无穷间断点

例 8 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ ………………………振荡间断点

思考 分析 $\frac{\sin x}{x}$ 及 $x\sin\frac{1}{x}$ 的间断点.

函数的间断点

注记　间断点常见位置：（1）分母为零；（2）分段点.

函数的间断点

注记　间断点常见位置：（1）分母为零；（2）分段点.

例 9　求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点，并判断类型.

函数的间断点

注记 间断点常见位置：（1）分母为零；（2）分段点.

例 9 求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点，并判断类型.

例 10 求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\leqslant 1, x\neq 0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$ 的间断点，并判断其类型.

复习与提高

选择　已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则点 $x=0$ 属于 $f(x)$ 的……………………………（　　）

(A) 可去间断点　　　　(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点　　　(D) 连续点

复习与提高

选择 已知函数 $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$，则点 $x = 0$ 属于 $f(x)$ 的……………………………………（　　）

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点

思考 修改 $f(x)$，使得 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 为无穷大量？

复习与提高

选择 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则点 $x=0$ 属于 $f(x)$ 的 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（ ）

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点

思考 修改 $f(x)$，使得 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 为无穷大量？

注记 小心 $e^{\frac{1}{x}}$ 和 $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ 等复合函数的间断点！

第五节	无穷小量与无穷大量
第六节	两个重要极限
第七节	无穷小量的比较
第八节	函数的连续性
第九节	闭区间上连续函数

第九节	闭区间上连续函数
A	最值定理
B	零值定理
C	介值定理

最值定理

定理 1　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

最值定理

定理 1　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

注记　函数 $y = \tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上是连续的，但在这个开区间上它是无界的，而且也没有最大值和最小值.

第九节	闭区间上连续函数
A	最值定理
B	零值定理
C	介值定理

零值定理

定理 2　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

零值定理

定理 2 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

例 1 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$, $(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根.

零值定理

定理 2　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

例 1　证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根.

例 2　证明方程 $2\sin x=x+1$ 有实数解.

第九节	闭区间上连续函数
A	最值定理
B	零值定理
C	介值定理

介值定理

定理 3 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

介值定理

定理 3　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

证明　令 $g(x)=f(x)-C$. 则由零值定理可得结论.

复习与提高

题 1　设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，而且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在．证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界．

复习与提高

题 1 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，而且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在．证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界．

题 2 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)<a$，$f(b)>b$．证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=\xi$．