高等数学课程

第三章 · 导数的应用

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节 微分中值定理

第二节 洛必达法则

第三节 泰勒公式

第四节 单调性与凹凸性

第五节 极值与最值

第一节	微分中值定理
A	罗尔中值定理
B	拉格朗日中值定理
C	柯西中值定理

费马引理

费马引理 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且 $\forall x \in U(x_0)$ 有 $f(x) \leqslant f(x_0)$（或 $f(x) \geqslant f(x_0)$）．如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导．则有 $f'(x_0) = 0$.

罗尔定理

定理 1 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 上可导,

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

罗尔定理

定理 1 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 上可导,

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$,

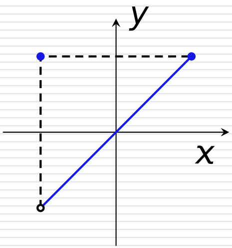
则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

注记 如果定理的三个条件中有一个不满足，则结论可能不成立.

罗尔定理

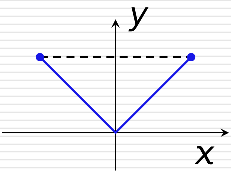
例 1　下列函数只满足罗尔定理的条件 (2) 和 (3)，不满足条件 (1)，因此没有导数为零的点.

$$f(x)=\begin{cases} x, & -1\le x<1 \\ -1, & x=1 \end{cases}$$



罗尔定理

例 2　下列函数只满足罗尔定理的条件 (1) 和 (3)，不满足条件 (2)，因此没有导数为零的点.

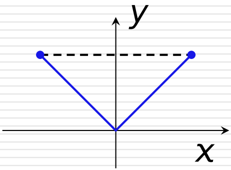


$$f(x) = |x|, -1 \le x \le 1$$

罗尔定理

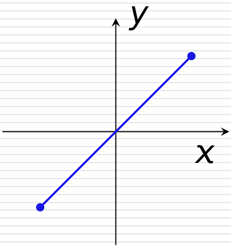
例 2　下列函数只满足罗尔定理的条件 (1) 和 (3)，不满足条件 (2)，因此没有导数为零的点.

$$f(x) = |x|, -1 \le x \le 1$$



例 3　下列函数只满足罗尔定理的条件 (1) 和 (2)，不满足条件 (3)，因此没有导数为零的点.

$$f(x) = x, -1 \le x \le 1$$



例 4　对 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间 $[-1,3]$ 上验证罗尔定理.

例 4　对 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间 $[-1,3]$ 上验证罗尔定理.

练习 1　对 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[-2,2]$ 上验证罗尔定理.

罗尔定理

例 5　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

第一节	微分中值定理
A	罗尔中值定理
B	拉格朗日中值定理
C	柯西中值定理

拉格朗日定理

定理　如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使得 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

例 6　对函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $[0,1]$ 上验证拉格朗日定理.

例 6　对函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $[0,1]$ 上验证拉格朗日定理.

练习 2　对 $f(x) = x^3 + x$ 在区间 $[-1,1]$ 上验证拉格朗日定理.

推论 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为 0，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

推论 1　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为 0，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

例 7　证明当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时，有

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

例 8　证明当 $x_2 > x_1$ 时不等式成立：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leqslant x_2 - x_1.$$

例 8　证明当 $x_2 > x_1$ 时不等式成立：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leqslant x_2 - x_1.$$

练习 3　证明：当 $x_2 > x_1$ 时有

$$\sin x_2 - \sin x_1 \leqslant x_2 - x_1.$$

拉格朗日定理

例 9　证明当 $x > 0$ 时不等式成立：

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

例 9 证明当 $x>0$ 时不等式成立：

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

注记 当 $-1<x<0$ 时，不等式同样成立.

第一节	微分中值定理
A	罗尔中值定理
B	拉格朗日中值定理
C	柯西中值定理

柯西定理

定理 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续，

(2) 在开区间 (a,b) 内都可导，

(3) 在开区间 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$，

则至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例 10　对函数 $f(x)=x^3$ 和 $g(x)=x^2+1$ 在区间 $[1,2]$ 上验证柯西定理.

复习与提高

复习 1　证明：当 $x>1$ 时，$e^x-e>e(x-1)$.

复习与提高

题 1　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=1$，$f(1)=0$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)f'(\xi)+\xi=0$.

第一节 微分中值定理

第二节 洛必达法则

第三节 泰勒公式

第四节 单调性与凹凸性

第五节 极值与最值

洛必达法则

在一定条件下，我们有下面的洛必达法则：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

第二节	洛必达法则
A	无穷小比值型
B	无穷大比值型
C	乘法减法型
D	幂指函数型

一、$\frac{0}{0}$ 型的洛必达法则

定理 1　如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$，而且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在（或为 ∞），则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

一、$\frac{0}{0}$ 型的洛必达法则

定理1 如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$，而且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在（或为 ∞），则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例1 求极限 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x-6}{x^2-4}$.

例 2　求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x^{2}-x}$.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x^{2}-x}$.

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^{3}}$.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x^{2}-x}$.

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^{3}}$.

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{2}}$.

练习 1　用洛必达法则求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$$

练习 1　用洛必达法则求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$

(2) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

练习 1　用洛必达法则求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$$

(2) $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 5x}$$

两种方法比较

注记 1　对于 $x \to 0$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型极限，现在我们有两种方法可以使用：

(1) 等价无穷小量代换

(2) 洛必达法则

一般地，方法 (1) 应该优先使用，因为方法 (2) 可能变得复杂.

两种方法比较

例 6　求函数极限.

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 6x}$$

两种方法比较

例 6　求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 6x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{\arcsin(x^3)}$

两种方法比较

练习 2　求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$$

第二节	洛必达法则
A	无穷小比值型
B	无穷大比值型
C	乘法减法型
D	幂指函数型

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型的洛必达法则

定理2 如果 $\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$，而且 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在（或为 ∞），则有

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

二、$\frac{\infty}{\infty}$型的洛必达法则

定理2 如果 $\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$，而且 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在（或为 ∞），则有

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)}=\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例7 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-x+4}$.

例 8　求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ （$n>0$）

例 8　求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$ （$n > 0$）

(2) 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

例 8　求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$（$n>0$）

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$

例 8　求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ （$n>0$）

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$

练习 3　求函数极限： $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$

例 8　求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ （$n>0$）

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$

练习 3　求函数极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$

思考　求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$

注记 2　洛必达法则未必总是有效．例如：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

注记 2　洛必达法则未必总是有效．例如：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

第二节	洛必达法则
A	无穷小比值型
B	无穷大比值型
C	乘法减法型
D	幂指函数型

三、$0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式

对于 $0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式，我们可以将它们变换为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，然后使用洛必达法则.

三、$0 \cdot \infty$ 型和 $\infty - \infty$ 型的未定式

对于 $0 \cdot \infty$ 型和 $\infty - \infty$ 型的未定式，我们可以将它们变换为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，然后使用洛必达法则.

例 9　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x\right)$

三、$0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式

对于 $0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式，我们可以将它们变换为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，然后使用洛必达法则.

例 9　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

洛必达法则

思考　用洛必达大则求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$.

洛必达法则

练习 4　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 \ln x$　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$

第二节	洛必达法则
A	无穷小比值型
B	无穷大比值型
C	乘法减法型
D	幂指函数型

四、1^{∞} 型，0^0 型和 ∞^0 型的未定式

对于 1^{∞} 型，0^0 型和 ∞^0 型的未定式，我们可以将它们变换为 $0\cdot\infty$ 型未定式，进而化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后使用洛必达法则.

四、1^∞ 型，0^0 型和 ∞^0 型的未定式

对于 1^∞ 型，0^0 型和 ∞^0 型的未定式，我们可以将它们变换为 $0\cdot\infty$ 型未定式，进而化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后使用洛必达法则.

$$\lim u(x)^{v(x)} = \lim e^{v(x)\ln u(x)} = e^{\lim v(x)\ln u(x)}$$

幂指函数型

例 10　求函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

幂指函数型

例 10　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

幂指函数型

例 10　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$

练习 5　求函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

练习 5　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\sin x}$

复习与提高

复习 1　求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}$$

(2) $$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}$$

(3) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^{3}-x^{2}-x+1}{x^{3}-3x+2}$$

复习与提高

复习2　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x$　　　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

复习与提高

复习3　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

复习与提高：倒代换

题 1　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$

第一节 微分中值定理

第二节 洛必达法则

第三节 泰勒公式

第四节 单调性与凹凸性

第五节 极值与最值

近似估计

假设 $f'(x_0)$ 存在．已经知道当 $x \to x_0$ 时有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o\left(x - x_0\right)$$

近似估计

假设 $f'(x_0)$ 存在. 已经知道当 $x \to x_0$ 时有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o\big(x - x_0\big)$$

是否存在二次多项式 $g(x)$ 使得当 $x \to x_0$ 时有

$$f(x) \overset{?}{=} g(x) + o\Big((x - x_0)^2\Big)$$

近似估计

假设 $f'(x_0)$ 存在．已经知道当 $x \to x_0$ 时有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o\big(x - x_0\big)$$

是否存在二次多项式 $g(x)$ 使得当 $x \to x_0$ 时有

$$f(x) \overset{?}{=} g(x) + o\left((x - x_0)^2\right)$$

令 $g(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2$，则有

$$A = f(x_0), \qquad B = f'(x_0), \qquad C = \frac{1}{2}f''(x_0).$$

$$f(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$$

$$f(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$$

令 $x \to x_0$，得到 $A = f(x_0)$,

$$f(x)=A+B(x-x_0)+C(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$$

令 $x\to x_0$，得到 $A=f(x_0)$，从而

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=B+C(x-x_0)+o(x-x_0).$$

$$f(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$$

令 $x \to x_0$，得到 $A = f(x_0)$，从而

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B + C(x - x_0) + o(x - x_0).$$

再令 $x \to x_0$，得到 $B = f'(x_0)$.

$$f(x)=A+B(x-x_0)+C(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$$

令 $x\to x_0$，得到 $A=f(x_0)$，从而

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=B+C(x-x_0)+o(x-x_0).$$

再令 $x\to x_0$，得到 $B=f'(x_0)$．因此

$$C=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$$

$$f(x)=A+B(x-x_0)+C(x-x_0)^2+o\left((x-x_0)^2\right)$$

令 $x\to x_0$，得到 $A=f(x_0)$，从而

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=B+C(x-x_0)+o(x-x_0).$$

再令 $x\to x_0$，得到 $B=f'(x_0)$. 因此

$$C=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)}{(x-x_0)^2}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{2(x-x_0)}$$

洛必达法则

$$f(x) = A + B(x - x_0) + C(x - x_0)^2 + o\left((x - x_0)^2\right)$$

令 $x \to x_0$，得到 $A = f(x_0)$，从而

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = B + C(x - x_0) + o(x - x_0).$$

再令 $x \to x_0$，得到 $B = f'(x_0)$. 因此

$$C = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{(x - x_0)^2}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{2(x - x_0)} \qquad \boxed{\text{洛必达法则}}$$

$$= \frac{1}{2} f''(x_0) \qquad \boxed{\text{导数的定义}}$$

定理 1 (带佩亚诺余项的泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 点存在 n 阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

定理 1 (带佩亚诺余项的泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 点存在 n 阶导数，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

解答　连续用 $n-1$ 次洛必达法则，再用导数的定义.

定理 2 (带拉格朗日余项的泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内存在 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in U(x_0)$ 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

定理 2 (带拉格朗日余项的泰勒公式)

设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内存在 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in U(x_0)$ 有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

解答　连续用 $n+1$ 次柯西中值定理.

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=o(x^n)$ …………………… 佩亚诺余项

或者 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ ………… 拉格朗日余项

ξ 介于 0 和 x 之间.

当 $x_0=0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x),$$

其中 $R_n(x)=o(x^n)$ …………………… 佩亚诺余项

或者 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ ………… 拉格朗日余项

ξ 介于 0 和 x 之间.

令 $\xi=\theta x$，则 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0<\theta<1$.

例 1　求 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的麦克劳林公式.

(1) $f(x) = \mathrm{e}^x$ ……………………… 应用

例 1　求 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的麦克劳林公式.

(1) $f(x) = e^x$ . . . . 应用

(2) $f(x) = \sin x$ . . . . 图形

例 1　求 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的麦克劳林公式.

(1) $f(x) = e^x$ · 应用

(2) $f(x) = \sin x$ · 图形

(3) $f(x) = \cos x$

例 1　求 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的麦克劳林公式.

(1) $f(x)=e^x$ . . . . 应用

(2) $f(x)=\sin x$ . . . . 图形

(3) $f(x)=\cos x$

(4) $f(x)=\ln(1+x)$ . . . . 应用

例 1 求 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的麦克劳林公式. 小结

(1) $f(x) = e^x$ . . . . 应用

(2) $f(x) = \sin x$ . . . . 图形

(3) $f(x) = \cos x$

(4) $f(x) = \ln(1 + x)$ . . . . 应用

(5) $f(x) = (1 + x)^\alpha$ . . . . 应用

例 2　证明常数 e 是无理数.

例 2　证明常数 e 是无理数.

证明　假设 $e = \dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n \geqslant 2$.

例 2　证明常数 e 是无理数.

证明　假设 $e = \dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n \geqslant 2$. 在 e^x 的麦克劳林公式中令 $x = 1$，得到（$0 < \theta < 1$）

$$\frac{m}{n} = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

例 2 证明常数 e 是无理数.

证明 假设 $e = \dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n \geqslant 2$. 在 e^x 的麦克劳林公式中令 $x = 1$，得到（$0 < \theta < 1$）

$$\frac{m}{n} = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

两边同时乘以 $n!$，得到

$$\frac{m \cdot n!}{n} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{e^{\theta}}{n+1}$$

例 2　证明常数 e 是无理数.

证明　假设 $e = \dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n \geqslant 2$. 在 e^x 的麦克劳林公式中令 $x = 1$，得到（$0 < \theta < 1$）

$$\frac{m}{n} = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

两边同时乘以 $n!$，得到

$$\frac{m \cdot n!}{n} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{e^{\theta}}{n+1}$$

由于 $0 < e^{\theta} < 3$,

例 2 证明常数 e 是无理数.

证明 假设 $e = \dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n \geqslant 2$. 在 e^x 的麦克劳林公式中令 $x = 1$，得到（$0 < \theta < 1$）

$$\frac{m}{n} = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

两边同时乘以 $n!$，得到

$$\frac{m \cdot n!}{n} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{e^{\theta}}{n+1}$$

由于 $0 < e^{\theta} < 3$，所以最后一项为分数，但是其他各项都为整数.

例 2 证明常数 e 是无理数.

证明 假设 $e=\dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n \geqslant 2$. 在 e^x 的麦克劳林公式中令 $x=1$，得到（$0<\theta<1$）

$$\frac{m}{n}=e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

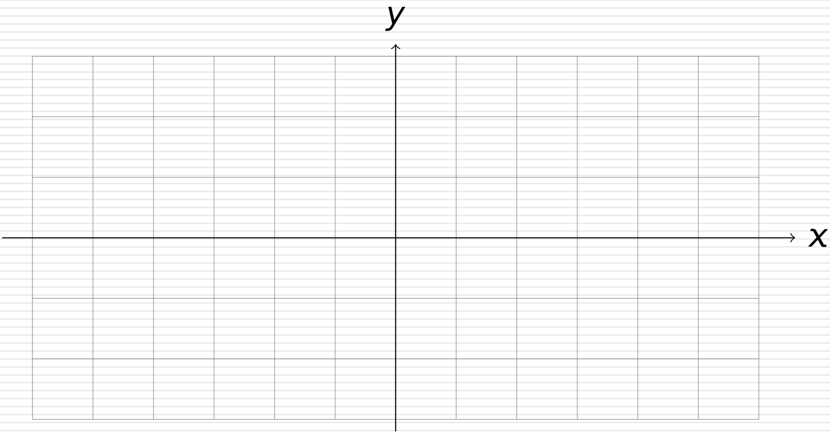
两边同时乘以 $n!$，得到

$$\frac{m\cdot n!}{n}=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{e^{\theta}}{n+1}$$

由于 $0<e^{\theta}<3$，所以最后一项为分数，但是其他各项都为整数. 矛盾. 返回

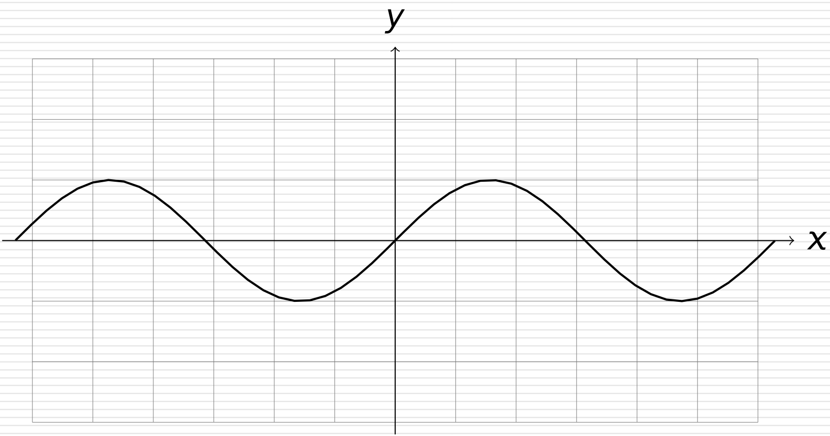
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



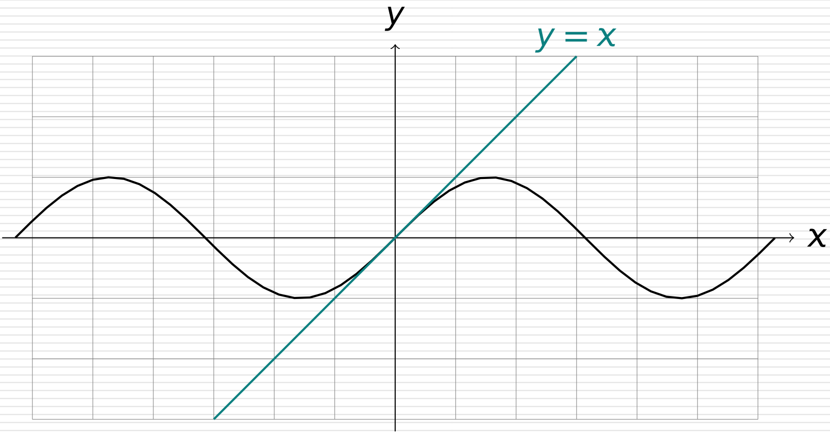
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



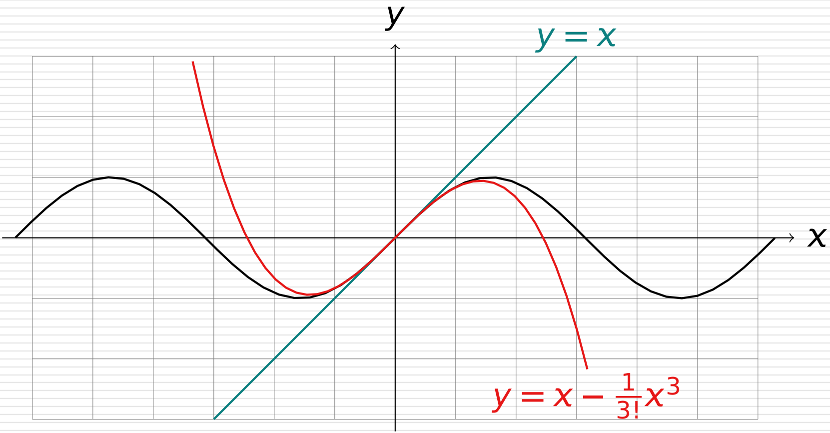
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



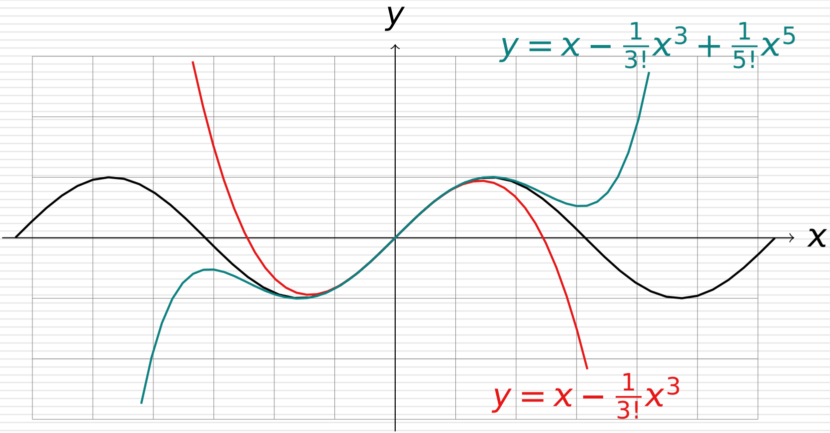
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



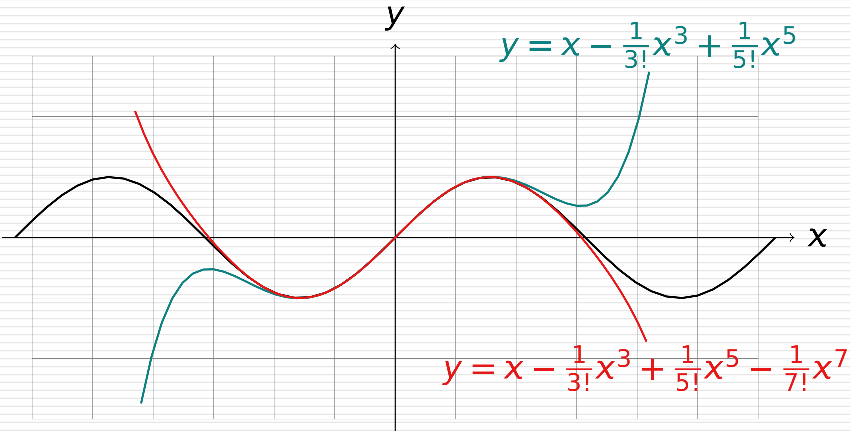
正弦函数的近似

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



正弦函数的近似

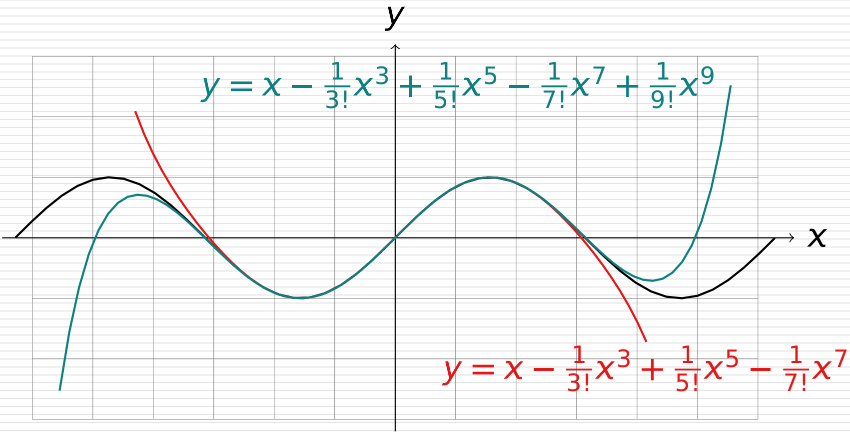
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



正弦函数的近似

返回

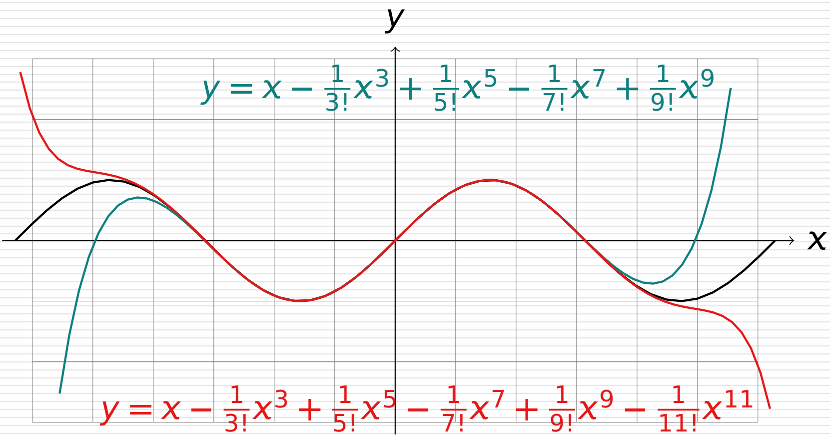
$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



正弦函数的近似

返回

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



利用泰勒公式证明不等式

例 3　证明：当 $x > 0$ 时，有 $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$.

利用泰勒公式证明不等式

例 3 证明：当 $x>0$ 时，有 $\ln(1+x)>x-\dfrac{x^2}{2}$.

解答 利用 $\ln(1+x)$ 的 1 阶麦克劳林公式.

返回

利用泰勒公式求极限

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

利用泰勒公式求极限

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$.

解答 利用 $\sqrt{1+x}$ 的 2 阶麦克劳林公式，求得极限等于 $-\dfrac{9}{32}$.

返回

初等函数的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + C_\alpha^3 x^3 + \cdots + C_\alpha^n x^n + R_n(x)$$

复习与提高

复习 1　求函数 $f(x) = \ln(2 + x)$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式.

复习与提高

题 1　求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x^2} + 2\cos x - 3}{x^4}$.

题 2 设函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数，$f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$. 证明至少存在一点 $\xi\in(-1,1)$，使得 $f'''(\xi)=3$.

第二节 洛必达法则

第三节 泰勒公式

第四节 单调性与凹凸性

第五节 极值与最值

第六节 函数图形的描绘

第四节	单调性与凹凸性
A	函数的单调性
B	曲线的凹凸性

定理 1 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，那么

(1) 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

(2) 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

定理 1 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，那么

(1) 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

(2) 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

注记 若在区间上 $f'(x) = 0$ 的点仅有有限个，仍有

(1) 在 (a,b) 上 $f'(x) \geqslant 0$ $\Rightarrow$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

(2) 在 (a,b) 上 $f'(x) \leqslant 0$ $\Rightarrow$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

例 1　确定下列函数的单调增减区间.

(1) $f(x) = x^3 - 3x$　　　　(2) $f(x) = x^3$

函数的单调性

例 1　确定下列函数的单调增减区间.

(1) $f(x)=x^3-3x$　　(2) $f(x)=x^3$

(3) $f(x)=x-\sin x$　　(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

函数的单调性

例 1　确定下列函数的单调增减区间.

(1) $f(x)=x^3-3x$　　(2) $f(x)=x^3$

(3) $f(x)=x-\sin x$　　(4) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

注记　通常可用这两类点来划分单调区间:

(1) 导数为零的点;　　(2) 导数不存在的点.

例 1 确定下列函数的单调增减区间.

(1) $f(x)=x^3-3x$ (2) $f(x)=x^3$

(3) $f(x)=x-\sin x$ (4) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

注记 通常可用这两类点来划分单调区间:

(1) 导数为零的点; (2) 导数不存在的点.

定义 导数为零的点称为函数的**驻点**.

零点问题

例 2　证明方程 $x^5 - 5x + 1 = 0$ 在 $[0,1]$ 上有唯一实根.

例 3 证明当 $x > 0$ 时有不等式 $e^x > 1 + x$.

不等式问题

例 3　证明当 $x>0$ 时有不等式 $e^x > 1+x$.

例 4　证明当 $x>0$ 时有 $x-\dfrac{x^3}{6} < \sin x$.

第四节	单调性与凹凸性
A	函数的单调性
B	曲线的凹凸性

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

(1) 如果对任何 I 上任何两点 x_1 和 x_2，恒有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

则称曲线 $f(x)$ 在区间 I 上是凹（上凹）的.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续.

(1) 如果对任何 I 上任何两点 x_1 和 x_2，恒有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

则称曲线 $f(x)$ 在区间 I 上是凹（上凹）的.

(2) 如果对任何 I 上任何两点 x_1 和 x_2，恒有

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} < f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

则称曲线 $f(x)$ 在区间 I 上是凸（下凹）的.

凹凸性的判别法

定理 2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，那么

(1) 如果 $x \in (a,b)$ 时，恒有 $f''(x) > 0$，则函数的曲线在 $[a,b]$ 上是凹的.

凹凸性的判别法

定理 2 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内有二阶导数，那么

(1) 如果 $x \in (a,b)$ 时，恒有 $f''(x) > 0$，则函数的曲线在 $[a,b]$ 上是凹的.

(2) 如果 $x \in (a,b)$ 时，恒有 $f''(x) < 0$，则函数的曲线在 $[a,b]$ 上是凸的.

定义　曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

定义　曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

性质　在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

. . . .

例 5 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 1 (x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

. . . .

例 5 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 1 (x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow f''(x_0) = 0$.

例 6 求曲线 $y = x^4$ 的凹凸区间和拐点.

定义　曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为拐点.

性质　在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

. . . .

例 5　求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 1　(x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$.

例 6　求曲线 $y = x^4$ 的凹凸区间和拐点.

注记 2　$f''(x_0) = 0$ $\not\Rightarrow$ (x_0, y_0) 为拐点.

定义　曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

性质　在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

....

例 5　求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 1　(x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow f''(x_0) = 0$.

例 6　求曲线 $y = x^4$ 的凹凸区间和拐点.

注记 2　$f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow (x_0, y_0)$ 为拐点.

曲线的凹凸性

例 7　求曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的凹凸区间和拐点.

曲线的凹凸性

例 7　求曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的凹凸区间和拐点.

练习 2　求下列曲线的凹凸区间和拐点.

(1) $y = x^2 - x^3$

曲线的凹凸性

例 7　求曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的凹凸区间和拐点.

练习 2　求下列曲线的凹凸区间和拐点.

(1) $y = x^2 - x^3$　　　　(2) $y = e^{-x}$

不等式问题

例 8　设 $x>0$，$y>0$，$x\neq y$，$n>1$，证明

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)>\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

复习与提高

选择 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 $\cdots\cdots$ (　　)

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1)-f(0)$

(B) $f'(1) > f(1)-f(0) > f'(0)$

(C) $f(1)-f(0) > f'(1) > f'(0)$

(D) $f'(1) > f(0)-f(1) > f'(0)$

复习与提高

复习 1　确定函数 $y = 2x^2 - \ln x$ 的单调增减区间.

复习与提高

复习 1 确定函数 $y = 2x^2 - \ln x$ 的单调增减区间.

复习 2 利用单调性重新证明第一节中的不等式.

复习与提高

题 1　判断并证明方程 $2\sin x = x + 1$ 的实根个数.

复习与提高

题 2　利用单调性重新证明本节例 8 的不等式.

第三节 泰勒公式

第四节 单调性与凹凸性

第五节 极值与最值

第六节 函数图形的描绘

第七节 曲线的曲率

第五节	极值与最值
A	函数的极值
B	函数的最值

定义 1　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义.

(1) 若 $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$，总有 $f(x) < f(x_0)$，则称

- x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点，
- $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.

定义 1 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义.

(1) 若 $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$，总有 $f(x) < f(x_0)$，则称

- x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点,
- $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.

(2) 若 $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$，总有 $f(x) > f(x_0)$，则称

- x_0 为 $f(x)$ 的一个极小值点,
- $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值.

定义 1　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义.

(1) 若 $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$，总有 $f(x) < f(x_0)$，则称

- x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点，
- $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.

(2) 若 $\forall x \in \mathring{U}(x_0)$，总有 $f(x) > f(x_0)$，则称

- x_0 为 $f(x)$ 的一个极小值点，
- $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值.

注记　极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

极值的必要条件

定理 1 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

极值的必要条件

定理 1 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

极值的必要条件

定理 1 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：

极值的必要条件

定理 1　设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

注记　我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y = x^3$.

极值的必要条件

定理 1 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0)=0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y=x^3$.
- 极值点未必都是驻点：

极值的必要条件

定理 1　设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0)=0$.

注记　我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y=x^3$.
- 极值点未必都是驻点：比如 $y=|x|$.

极值的第一判别法

定理 2 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 而且在它的某个去心邻域内可导.

极值的第一判别法

定理 2　设 $f(x)$ 在 x_0 点连续, 而且在它的某个去心邻域内可导.

(1) 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) > 0$，在右邻域内 $f'(x) < 0$，则 x_0 为极大值点.

极值的第一判别法

定理 2 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续，而且在它的某个去心邻域内可导.

(1) 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) > 0$，在右邻域内 $f'(x) < 0$，则 x_0 为极大值点.

(2) 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) < 0$，在右邻域内 $f'(x) > 0$，则 x_0 为极小值点.

极值的第一判别法

定理 2　设 $f(x)$ 在 x_0 点连续，而且在它的某个去心邻域内可导.

(1) 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) > 0$，在右邻域内 $f'(x) < 0$，则 x_0 为极大值点.

(2) 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) < 0$，在右邻域内 $f'(x) > 0$，则 x_0 为极小值点.

(3) 若在 x_0 的左邻域内和右邻域内 $f'(x)$ 的符号不变，则 x_0 不为极值点.

例 1 求函数的单调增减区间和极值.

(1) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$

例 1　求函数的单调增减区间和极值.

(1) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$

(2) $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

极值的第二判别法

定理 3 设 $f'(x_0) = 0$ 而且 $f''(x_0)$ 存在.

(1) 若 $f''(x_0) > 0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.

(2) 若 $f''(x_0) < 0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

极值的第二判别法

定理 3 设 $f'(x_0) = 0$ 而且 $f''(x_0)$ 存在.

(1) 若 $f''(x_0) > 0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.

(2) 若 $f''(x_0) < 0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

注记 1 当 $f''(x_0) = 0$ 时，上面的定理无法判定．例如 $f(x) = x^3$ 和 $f(x) = x^4$.

例 2　用极值的第二判别法求 $f(x)=x^3-3x$ 的极值.

例 2 用极值的第二判别法求 $f(x)=x^3-3x$ 的极值.

练习 2 用极值的第二判别法求函数的极值:

$$y=x^3-3x^2-9x-5$$

第五节	极值与最值
A	函数的极值
B	函数的最值

函数的最值

定义 2　设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义．如果有 $x_0 \in I$，使得对所有 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad （或 f(x) \geqslant f(x_0)），$$

则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值（或最小值）.

函数的最值

定义 2 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义. 如果有 $x_0 \in I$, 使得对所有 $x \in I$ 都有

$$f(x) \leqslant f(x_0) \quad （或 f(x) \geqslant f(x_0)）,$$

则称 $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**（或**最小值**）.

例 3 函数 $y = e^x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上没有最大值和最小值.

函数最值的求法：闭区间情形

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，而且在除有限个点外都可导．则可按照下面步骤求出函数的最值：

函数最值的求法：闭区间情形

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，而且在除有限个点外都可导．则可按照下面步骤求出函数的最值：

1. 求出函数所有的驻点，不可导点，和区间端点一起列出来作为最值可疑点．

函数最值的求法：闭区间情形

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，而且在除有限个点外都可导．则可按照下面步骤求出函数的最值：

1. 求出函数所有的驻点，不可导点，和区间端点一起列出来作为最值可疑点．
2. 求出函数在这些点的取值并比较，最大（小）者就为函数的最大（小）值．

例 4　求以下函数在指定区间上的最值.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ 在区间 $[-2, 3]$ 上.

例 4　求以下函数在指定区间上的最值.

(1) $f(x)=x^3-3x^2+7$ 在区间 $[-2,3]$ 上.

(2) $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $[-1,8]$ 上.

例 4　求以下函数在指定区间上的最值.

(1) $f(x)=x^3-3x^2+7$ 在区间 $[-2,3]$ 上.

(2) $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $[-1,8]$ 上.

练习 3　求以下函数在指定区间上的最值.

(1) $f(x)=x^4-2x^2+5$ 在区间 $[-2,3]$ 上.

函数最值的求法：唯一驻点情形

如果函数 $f(x)$ 在区间（开或闭，有限或无限）上可导，而且只有一个驻点 x_0．则 $f(x_0)$ 为极大值时就是最大值，为极小值时就是最小值．

例 5　将边长为 a 的一块正方形铁皮，四角各截去一个大小相同的小正方形，然后将四边折起做成一个无盖的方盒．问截掉的小正方形的长为多少时，所得方盒的容积最大？

复习与提高

选择 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 a 处…………………………………( )

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$

(B) $f(x)$ 的导数不存在

(C) $f(x)$ 取得极大值

(D) $f(x)$ 取得极小值

极值的判别法

例子 设 $f(x)$ 在 x_0 处有 n 阶导数，且 $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, f^{(n)}(x_0) \neq 0$. 证明：

(1) 当 n 为奇数时，$f(x)$ 在 x_0 点不取得极值.

(2) 当 n 为偶数时，$f(x)$ 在 x_0 点取得极值，且

- 当 $f^{(n)}(x_0) < 0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值；
- 当 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

解答　我们只证明 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 的情形.

解答　我们只证明 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 的情形．由带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式，有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$= f(x_0) + (x - x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) \right]$$

解答　我们只证明 $f^{(n)}(x_0)>0$ 的情形．由带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式，有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

$$=f(x_0)+(x-x_0)^n\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right]$$

其中的 $o(1)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量．

解答 我们只证明 $f^{(n)}(x_0) > 0$ 的情形．由带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式，有

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

$$= f(x_0) + (x - x_0)^n \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1)\right]$$

其中的 $o(1)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小量．由极限的局部保号性，存在 x_0 的去心邻域，使得在此邻域中

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + o(1) > 0.$$

解答　我们只证明 $f^{(n)}(x_0)>0$ 的情形．由带佩亚诺余项的 n 阶泰勒公式，有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

$$=f(x_0)+(x-x_0)^n\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)\right]$$

其中的 $o(1)$ 是 $x\to x_0$ 时的无穷小量．由极限的局部保号性，存在 x_0 的去心邻域，使得在此邻域中

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+o(1)>0.$$

所以当 n 为奇数时 $f(x)$ 在 x_0 点不取得极值，当 n 为偶数时 $f(x)$ 在 x_0 点取得极小值．

第三节	泰勒公式
第四节	单调性与凹凸性
第五节	极值与最值
第六节	函数图形的描绘
第七节	曲线的曲率

定义 1　给定曲线 $y = f(x)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$，称 $y = b$ 为其水平渐近线.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，称 $x = a$ 为其铅直渐近线.

定义 1　给定曲线 $y = f(x)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$，称 $y = b$ 为其水平渐近线.

(2) 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$，称 $x = a$ 为其铅直渐近线.

注记　(1) $x \to \infty$ 可以改为 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$.

定义 1 给定曲线 $y=f(x)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，称 $y=b$ 为其水平渐近线.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$，称 $x=a$ 为其铅直渐近线.

注记 (1) $x\to\infty$ 可以改为 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$.
(2) $x\to a$ 可以改为 $x\to a^+$ 或 $x\to a^-$.

例 1　求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的水平和铅直渐近线.

例 1　求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的水平和铅直渐近线.

例 2　求曲线 $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x^2}$ 的水平和铅直渐近线.

曲线的渐近线

练习 1　求曲线的水平和铅直渐近线.

(1) $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$　　(2) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$

定义 2 若直线 $y = kx + b$（$k \neq 0$）满足

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则称它是曲线 $y = f(x)$ 的一条**斜渐近线**.

定义 2　若直线 $y = kx + b$（$k \neq 0$）满足

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则称它是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

定理 1　直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线，当且仅当

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad 而且 \quad \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b.$$

定义 2　若直线 $y = kx + b$（$k \neq 0$）满足

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则称它是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

定理 1　直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线，当且仅当

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \quad 而且 \quad \lim_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b.$$

注记　$x \to \infty$ 可以改为 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$.

曲线的渐近线

例 3　求曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线.

曲线的渐近线

例 3　求曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线.

练习 2　求曲线 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的斜渐近线.

函数图形的描绘

例 4　描绘函数 $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ 的曲线.

第三节	泰勒公式
第四节	单调性与凹凸性
第五节	极值与最值
第六节	函数图形的描绘
第七节	曲线的曲率

曲率与曲率半径

- 弧微分：$\mathrm{d}s = \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$
- 角微分：$\mathrm{d}\alpha = \dfrac{y''}{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$
- 曲率：$K = \left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$
- 曲率半径：$\rho = \dfrac{1}{K}$