高等数学课程

第四章 · 不定积分

2020 年 2 月 12 日

暨南大学数学系 吕荐瑞

第一节	不定积分的概念
第二节	换元积分法
第三节	分部积分法
第四节	有理分式的积分

第一节	不定积分的概念
A	原函数与不定积分
B	不定积分的性质
C	基本积分公式

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

一般地，已知函数 $y = f(x)$, 容易求出 $y' = f'(x)$.

反过来，如果已知 $y' = f'(x)$, 如何找出 $y = f(x)$?

- $(?)' = 2x$

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=\sin x$

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=\mathrm{e}^x$
- $(?)'=\sin x$

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=\sin x$
- $(?)'=e^x$
- $(?)'=\ln x$

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 如果存在函数 $F(x)$, 使得对于 I 中每一点 x 都满足 $F'(x)=f(x)$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个**原函数**.

定义　设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 如果存在函数 $F(x)$, 使得对于 I 中每一点 x 都满足 $F'(x)=f(x)$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

注记　函数的原函数不止一个. 例如, $(x^2)' = 2x$, 而且 $(x^2+2)' = 2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

定义　设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 如果存在函数 $F(x)$, 使得对于 I 中每一点 x 都满足 $F'(x)=f(x)$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

注记　函数的原函数不止一个. 例如, $(x^2)'=2x$, 而且 $(x^2+2)'=2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

性质　$f(x)$ 的任何两个原函数一定只差一个常数 C.

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 如果存在函数 $F(x)$, 使得对于 I 中每一点 x 都满足 $F'(x) = f(x)$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

注记 函数的原函数不止一个. 例如, $(x^2)' = 2x$, 而且 $(x^2+2)' = 2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

性质 $f(x)$ 的任何两个原函数一定只差一个常数 C.

事实 连续函数 $f(x)$ 的原函数一定存在（见下一章）.

定义 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数，称为 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

定义 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数，称为 $f(x)$ 的**不定积分**，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

在上面定义中，我们称 $\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 为积分变量.

定义 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数, 称为 $f(x)$ 的不定积分, 记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

在上面定义中, 我们称 $\int$ 为积分号, $f(x)$ 为被积函数, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式, x 为积分变量.

$$\boxed{F'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C}$$

例 1　求函数 $f(x) = 3x^2$ 的不定积分.

例 1　求函数 $f(x) = 3x^2$ 的不定积分.

例 2　求函数 $f(x) = \sin x$ 的不定积分.

例 1 求函数 $f(x)=3x^2$ 的不定积分.

例 2 求函数 $f(x)=\sin x$ 的不定积分.

练习 1 求不定积分.

(1) $\int x\,\mathrm{d}x$

(2) $\int x^2\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

例 3　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分.

例 3　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分.

例 4　求过点 $(1,3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

第一节	不定积分的概念
A	原函数与不定积分
B	不定积分的性质
C	基本积分公式

性质 1　导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1 $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

性质 1　导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1. $$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

2. $$\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

性质 1 导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1 $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

2 $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算：

1 $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$

2 $\int \mathrm{d}(F(x)) = F(x) + C$

性质 2 非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 2　非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3　两个函数的和/差的积分, 等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

第一节	不定积分的概念
A	原函数与不定积分
B	不定积分的性质
C	基本积分公式

基本积分公式 I

1 $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

基本积分公式 I

1. $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

2. $$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

基本积分公式 I

1 $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

2 $$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

3 $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

例 5　求不定积分

(1) $\int (2x + 5x^2 + 7x^3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int (2 - \sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

(3) $\int (2x + 1)^2\,\mathrm{d}x$

练习2　求不定积分

(1) $\int (1-2x^2)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

练习 2　求不定积分

(1) $\int(1-2x^2)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2})\,\mathrm{d}x$

(3) $\int(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x$

练习 3　求不定积分

(1) $\int \sqrt{x}(x-3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{(x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

基本积分公式 II

4 $\displaystyle\int e^x \, dx = e^x + C$

基本积分公式 II

4 $\int e^x \, dx = e^x + C$

5 $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

例 6　求不定积分：

(1) $\int (4\mathrm{e}^x - x^{\mathrm{e}})\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int 2^x \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$

例 6　求不定积分：

(1) $\int (4e^x - x^e)\,dx$

(2) $\int \dfrac{e^{2x}-1}{e^x-1}\,dx$

(3) $\int 2^x e^x\,dx$

练习 4　求不定积分：

(1) $\int (x^2 + 2^x)\,dx$

基本积分公式 III

6 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

基本积分公式 III

6 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7 $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

基本积分公式 III

6 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7 $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

8 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

基本积分公式 III

6 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7 $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

8 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

9 $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

基本积分公式 III

6 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7 $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

8 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

9 $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

10 $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

基本积分公式 III

6 $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

7 $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

8 $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$

9 $\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$

10 $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + C$

11 $\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + C$

例 7　求不定积分

(1) $\int (\sin x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

例 7　求不定积分

(1) $\int (\sin x + 2\cos x)\,dx$

(2) $\int \tan^2 x\,dx$

练习 5　求不定积分

(1) $\int \cot^2 x\,dx$

(2) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x}\,dx$

基本积分公式 IV

12 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

基本积分公式 IV

12 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

13 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

例 8　求不定积分：

(1) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

例 8　求不定积分：

(1) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x$

练习 6　求不定积分 $\int \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

例 9　求不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ \mathrm{e}^{x}, & x\geq 0\end{cases}$$

例 9　求不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0\\ \mathrm{e}^{x}, & x\geq 0\end{cases}$$

练习 7　求不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中

$$f(x)=\begin{cases}x^{2}+1, & x<1\\ 2x, & x\geq 1\end{cases}$$

复习与提高

选择　在下列等式中，正确的结果是 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\int f'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)$

(B) $\int \mathrm{d}f(x) = f(x)$

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)$

(D) $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)$

复习1　求不定积分

(1) $\int(\sin x-2e^{x})\,\mathrm{d}x$

(2) $\int\frac{(2x+3)^{2}}{x}\,\mathrm{d}x$

复习1　求不定积分

(1) $\int(\sin x-2e^x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int\frac{(2x+3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int\frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

复习 2　求不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1; \\ 2x^2, & x \geq 1. \end{cases}$$

复习与提高

题 1　设 e^{-x} 是 $f(x)$ 的原函数，求 $\int x^2 f(\ln x)\,dx$.

第一节	不定积分的概念
第二节	换元积分法
第三节	分部积分法
第四节	有理分式的积分

第二节	换元积分法
A	第一类换元法
B	第二类换元法

第一类换元法引例

例 1　求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,dx$.

第一类换元法

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x))$$

$$= \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$

例 2　求不定积分

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$

(2) $\int \sin(3x+4)\,\mathrm{d}x$

练习 1　求不定积分

(1) $\int \frac{dx}{(4x+5)^2}$

(2) $\int e^{-3x+2}\,dx$

练习 1　求不定积分

(1) $\int \frac{dx}{(4x+5)^2}$

(2) $\int e^{-3x+2}\,dx$

(3) $\int \sqrt{3x-1}\,dx$

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到.

例 3　求不定积分

(1) $\int x e^{x^2} \mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} \mathrm{d}x$

例 3　求不定积分

(1) $\int x e^{x^2} \, dx$

(2) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx$

(3) $\int x\sqrt{x^2 - 3} \, dx$

练习 2　求不定积分

(1) $\int x^2(x^3+1)^9\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

例 4　求不定积分（其中 $a > 0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2}$

例 4　求不定积分（其中 $a > 0$）:

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2}$$

练习 3　求不定积分:

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\ (a > 0).$$

例 4　求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$$

练习 3　求不定积分：

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ （a>0）.$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}.$$

例 5 求不定积分

(1) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

(2) $\int \sin^3 x \, dx$

例 5　求不定积分

(1) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

(2) $\int \sin^3 x \, dx$

练习 4　求不定积分

(1) $\int \cos^6 x \sin x \, dx$

(2) $\int \cos^5 x \, dx$

例 6　求不定积分 $\int \sin^2 x\,dx$.

例 6　求不定积分 $\int \sin^2 x \, dx$.

练习 5　求不定积分 $\int \cos^2 2x \, dx$.

换元积分法

例 7　求不定积分

(1) $\int \sec^4 x \tan^2 x \, dx$

(2) $\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx$

换元积分法

例 7　求不定积分

(1) $\int \sec^4 x \tan^2 x \, dx$

(2) $\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx$

练习 6　求不定积分

(1) $\int \sec^5 x \tan^5 x \, dx$

(2) $\int \sec^6 x \tan^6 x \, dx$

换元积分法

例 7 求不定积分

(1) $\int \sec^4 x \tan^2 x \, dx$

(2) $\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx$

练习 6 求不定积分

(1) $\int \sec^5 x \tan^5 x \, dx$

(2) $\int \sec^6 x \tan^6 x \, dx$

注记 $\int \csc^m x \cot^n x \, dx$ 的不定积分类似.

例 8　求不定积分

(1) $\int \tan x \, dx$

(2) $\int \csc x \, dx$

例 8　求不定积分

(1) $\int \tan x \, dx$

(2) $\int \csc x \, dx$

练习 7　求不定积分

(1) $\int \cot x \, dx$

(2) $\int \sec x \, dx$

第二节	换元积分法
A	第一类换元法
B	第二类换元法

第二类换元法

若 $x = \phi(t)$ 是单调、可导的函数，而且 $\phi'(t) \neq 0$，则有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t))$$

$$= \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$

例 9　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,dx$　　　　(2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

例 9　求不定积分

(1) $$\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,dx$$　(2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$$

练习 8　求不定积分

(1) $$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

例 9　求不定积分

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}} \mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

练习 8　求不定积分

(1) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

例 9　求不定积分

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}} \mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

练习 8　求不定积分

(1) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \mathrm{d}x$　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

思考　求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt{x-3}}$.

例 10　求不定积分 $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{x}}\,dx.$

例 11　求不定积分 $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$.

例 11　求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1}dx.$

练习 9　求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx.$

第二类换元法

例 12　求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}} dx.$

第二类换元法

例 12　求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}dx.$

练习 10　求不定积分 $\int \sqrt{1+e^x}dx.$

例 13　求不定积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $a > 0$.

例 13　求不定积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $a > 0$.

练习 11　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

例 14　求不定积分

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$　　　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$

例 14　求不定积分

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

练习 12　求不定积分 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$$

三角函数换元总结

1 $\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$,

令 $x=a\sin t,\ \ t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

三角函数换元总结

1 $$\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x,$$

令 $x=a\sin t,\ \ t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

2 $$\int f(x,\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x,$$

令 $x=a\tan t,\ \ t\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

三角函数换元总结

1 $$\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx,$$

$$令\ x = a\sin t,\quad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

2 $$\int f(x, \sqrt{x^2 + a^2})\,dx,$$

$$令\ x = a\tan t,\quad t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

3 $$\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx,$$

$$令\ x = a\sec t,\quad t \in [0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, \pi]$$

用万能公式换元

例 15　求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} dx.$

用万能公式换元

例 15　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x$.

解答　令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$.

用万能公式换元

例 15　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x$.

解答　令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$.

例 16　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$.

用万能公式换元

例 15　求不定积分 $\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)} \mathrm{d}x$.

解答　令 $u = \tan \frac{x}{2}$，则 $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

例 16　求不定积分 $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x} \mathrm{d}x$.

解答　令 $u = \tan x$，$\sin^2 x = \frac{u^2}{1+u^2}$，$\cos^2 x = \frac{1}{1+u^2}$.

积分公式大全

(1) $$\int 1\,dx = x + C$$

(2) $$\int x^{a}\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

(3) $$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$$

(4) $$\int a^{x}\,dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

(5) $$\int e^{x}\,dx = e^{x} + C$$

积分公式大全

(6) $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

(7) $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

(8) $$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

(9) $$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

积分公式大全

(10) $$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

(11) $$\int \csc x \, dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

(12) $$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

(13) $$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

积分公式大全

(14) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

(15) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

(16) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

(17) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

复习与提高

选择　设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)$ 等于 $\cdots\cdots$ (　　)

(A) $x+e^x+C$　　(B) $e^x+\frac{1}{2}x^2+C$

(C) $\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$　　(D) $e^x+\frac{1}{2}e^{2x}+C$

复习1　求不定积分:

(1) $\int (2x+5)^9 \, dx$

(2) $\int \dfrac{1}{(3x+4)^3} \, dx$

复习1　求不定积分：

(1) $\int (2x+5)^9 \, \mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{1}{(3x+4)^3} \, \mathrm{d}x$

(3) $\int \cos(5x+3) \, \mathrm{d}x$

复习2　求不定积分：

(1) $\int (x+1)e^{x^2+2x}\,dx$

(2) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

复习2　求不定积分:

(1) $\int (x+1)\mathrm{e}^{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \dfrac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \dfrac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

复习3　求不定积分：

(1) $\int \sin^2(x+1)\,dx$

(2) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

换元积分法

复习4　求不定积分:

(1) $\int \sec^4 x \tan^4 x \, dx$

(2) $\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx$

复习 5　求不定积分：

(1) $$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,dx$$

复习 5　求不定积分:

(1) $\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

复习 6　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \sqrt{e^x - 4}\,dx$

复习 7　求不定积分：

$$(1)\ \int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

复习 7 求不定积分:

(1) $$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

复习与提高：换元积分法

题 1　求不定积分：

(1) $\int x\sqrt{1-x}\,dx$

(2) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$

复习与提高：换元积分法

题 2　设 $x>1$，求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

复习与提高：换元积分法

题 2　设 $x>1$，求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解答 (方法 1)　令 $x=\sec t$，$t\in(0,\pi/2)$. 则有

$$原式 = \int \frac{\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{\sec t\tan t} = t+C = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)+C$$

复习与提高：换元积分法

题 2　设 $x>1$，求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

解答 (方法 1)　令 $x=\sec t$，$t\in(0,\pi/2)$. 则有

$$\text{原式} = \int \frac{\sec t \tan t \, \mathrm{d}t}{\sec t \tan t} = t + C = \arccos\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

解答 (方法 2)　令 $u=\sqrt{x^2-1}$，则有

$$\text{原式} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2+1} = \arctan u + C = \arctan\sqrt{x^2-1} + C$$

分部积分公式

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

例 1 求不定积分 $\int x \cos x \, dx$.

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,dx$.

例 2　求不定积分 $\int xe^{x}\,dx$.

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,dx$.

例 2　求不定积分 $\int xe^{x}\,dx$.

练习 1　求不定积分:

(1) $\int x\sin x\,dx$

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,dx$.

例 2　求不定积分 $\int xe^{x}\,dx$.

练习 1　求不定积分:

(1) $\int x\sin x\,dx$　　(2) $\int xe^{2x}\,dx$

例 3　求不定积分 $\int x^2 \cos x \, dx$.

例 3　求不定积分 $\int x^2 \cos x \, dx$.

例 4　求不定积分 $\int x^2 e^x \, dx$.

例 3　求不定积分 $\int x^2 \cos x \, dx$.

例 4　求不定积分 $\int x^2 e^x \, dx$.

练习 2　求不定积分：

(1) $\int x^2 \sin x \, dx$

例 3　求不定积分 $\int x^2 \cos x \, dx$.

例 4　求不定积分 $\int x^2 e^x \, dx$.

练习 2　求不定积分:

(1) $\int x^2 \sin x \, dx$　　　　(2) $\int x^2 e^{3x} \, dx$

例 5　求不定积分 $\int x \ln x \, dx$.

例 5　求不定积分 $\int x\ln x\,dx$.

例 6　求不定积分 $\int x\arctan x\,dx$.

例 5　求不定积分 $\int x\ln x\,dx$.

例 6　求不定积分 $\int x\arctan x\,dx$.

练习 3　求不定积分：

(1) $\int(2x+1)\ln x\,dx$

例 5　求不定积分 $\int x\ln x\,dx$.

例 6　求不定积分 $\int x\arctan x\,dx$.

练习 3　求不定积分:

(1) $\int (2x+1)\ln x\,dx$　　(2) $\int \arcsin x\,dx$

小结：分部积分

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 dv：

- $\int x e^x \, dx$
- $\int x \cos x \, dx$
- $\int x \ln x \, dx$
- $\int x \arctan x \, dx$

小结：分部积分

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 dv：

- $\int x e^x dx \qquad = \int x \, d(e^x)$
- $\int x \cos x \, dx$
- $\int x \ln x \, dx$
- $\int x \arctan x \, dx$

小结：分部积分

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\int x\,e^x\,dx = \int x\,d(e^x)$
- $\int x\cos x\,dx = \int x\,d(\sin x)$
- $\int x\ln x\,dx$
- $\int x\arctan x\,dx$

小结：分部积分

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 dv：

- $\int x e^x dx = \int x d(e^x)$
- $\int x \cos x dx = \int x d(\sin x)$
- $\int x \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\int x \arctan x dx$

小结：分部积分

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
- $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

例 7　求不定积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

例 7　求不定积分 $\int e^{x} \sin x \, dx$.

练习 4　求不定积分 $\int e^{2x} \cos x \, dx$

分部积分法

例 8　求不定积分 $\int \sec^3 x \, dx$.

分部积分法

例 9　求不定积分 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$.

复习与提高

复习 1　求不定积分：

(1) $\int x^2 e^{-x}\,dx$

复习与提高

复习1 求不定积分：

(1) $\int x^2 e^{-x}\,dx$

(2) $\int x\cos 3x\,dx$

复习与提高

复习2　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$

复习与提高

复习 2　求不定积分：

(1) $\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$

(2) $\int \arctan x \, \mathrm{d}x$

分部积分法：先分后合

题 1　求不定积分 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2\,dx$.

分部积分法：先分后合

题 1　求不定积分 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2\,dx$.

解答　原式 $=\int e^{2x}\sec^2 x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx$

分部积分法：先分后合

题 1　求不定积分 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2\,dx$.

解答　原式 $=\int e^{2x}\sec^2 x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx$

$$=\int e^{2x}\,d(\tan x)+2\int e^{2x}\tan x\,dx$$

分部积分法：先分后合

题 1　求不定积分 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2\,dx.$

解答　原式 $=\int e^{2x}\sec^2 x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx$

$$=\int e^{2x}\,d(\tan x)+2\int e^{2x}\tan x\,dx$$

$$=e^{2x}\tan x-2\int e^{2x}\tan x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx$$

分部积分法：先分后合

题 1　求不定积分 $\int e^{2x}(\tan x+1)^2\,dx$.

解答　原式 $=\int e^{2x}\sec^2 x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx$

$$=\int e^{2x}\,d(\tan x)+2\int e^{2x}\tan x\,dx$$

$$=e^{2x}\tan x-2\int e^{2x}\tan x\,dx+2\int e^{2x}\tan x\,dx$$

$$=e^{2x}\tan x+C$$

分部积分法：先分后合

题 2　求不定积分 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x.$

定义 1 如果 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为**有理分式**.

定义 1　如果 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理分式.

- 如果 $P(x)$ 次数 $<$ $Q(x)$ 次数，则称它为真分式;
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geqslant$ $Q(x)$ 次数，则称它为假分式.

定义 1　如果 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为**有理分式**.

- 如果 $P(x)$ 次数 $<Q(x)$ 次数，则称它为**真分式**；
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geqslant Q(x)$ 次数，则称它为**假分式**.

定理 1　假分式 $=$ 多项式 $+$ 真分式

第四节	有理分式的积分
A	分母为一次多项式
B	分母为二次多项式
C	分母为高次多项式

情形 1：分母为一次多项式

例 1　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x+1}\,dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x+1}\,dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x^2+4}{x+1}\,dx$

练习 1　求不定积分：

(1) $$\int \frac{x^2+3x+7}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{x^3+2x+4}{x-1}\,\mathrm{d}x$$

第四节	有理分式的积分
A	分母为一次多项式
B	分母为二次多项式
C	分母为高次多项式

情形 2：分母为二次多项式

例 2　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 x^2+px+q，其判别式为 $\Delta=p^2-4q$，此时

1. 若 $\Delta>0$，则 $x^2+px+q=(x+a)(x+b)$；
2. 若 $\Delta=0$，则 $x^2+px+q=(x+a)^2$；
3. 若 $\Delta<0$，则 x^2+px+q 是不可约的.

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 x^2+px+q，其判别式为 $\Delta=p^2-4q$，此时

1. 若 $\Delta>0$，则 $x^2+px+q=(x+a)(x+b)$；
2. 若 $\Delta=0$，则 $x^2+px+q=(x+a)^2$；
3. 若 $\Delta<0$，则 x^2+px+q 是不可约的.

定义 称一个多项式是不可约的，如果它不能表示为两个非常数多项式的乘积.

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 $x^2 + px + q$，判别式为 $\Delta = p^2 - 4q$.

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 x^2+px+q，判别式为 $\Delta=p^2-4q$.

1 若 $\Delta>0$，则 $\dfrac{rx+s}{x^2+px+q}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}$；

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 x^2+px+q，判别式为 $\Delta = p^2-4q$.

1 若 $\Delta > 0$，则 $\dfrac{rx+s}{x^2+px+q} = \dfrac{A}{x+a} + \dfrac{B}{x+b}$;

2 若 $\Delta = 0$，则 $\dfrac{rx+s}{x^2+px+q} = \dfrac{A}{x+a} + \dfrac{B}{(x+a)^2}$;

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 x^2+px+q，判别式为 $\Delta=p^2-4q$.

1 若 $\Delta>0$，则 $\dfrac{rx+s}{x^2+px+q}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}$;

2 若 $\Delta=0$，则 $\dfrac{rx+s}{x^2+px+q}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{(x+a)^2}$;

3 若 $\Delta<0$，则

$$\frac{rx+s}{x^2+px+q}=\frac{A(2x+p)}{x^2+px+q}+\frac{B}{x^2+px+q}.$$

例 3　求 $\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$

例 3　求 $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$

例 4　求 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$

例 3　求 $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$

例 4　求 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1}\mathrm{d}x$

例 5　求 $\displaystyle\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x$

练习 2　求 $\int \frac{x+3}{x^2+5x+4}\mathrm{d}x$

练习 2　求 $\int \frac{x+3}{x^2+5x+4} \mathrm{d}x$

练习 3　求 $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+4} \mathrm{d}x$

练习2 求 $\int \frac{x+3}{x^2+5x+4}\mathrm{d}x$

练习3 求 $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x$

练习4 求 $\int \frac{x+3}{x^2+4x+7}\mathrm{d}x$

第四节	有理分式的积分
A	分母为一次多项式
B	分母为二次多项式
C	分母为高次多项式

情形 3：分母为一般多项式

引例　已知 $35=5\cdot 7$，则有 $\dfrac{1}{35}=\dfrac{3}{7}-\dfrac{2}{5}$，

情形 3：分母为一般多项式

引例　已知 $35 = 5 \cdot 7$，则有 $\dfrac{1}{35} = \dfrac{3}{7} - \dfrac{2}{5}$，进而有

$$\frac{4}{35} = \frac{12}{7} - \frac{8}{5} = \left(1 + \frac{5}{7}\right) - \left(1 + \frac{3}{5}\right) = \frac{5}{7} - \frac{3}{5}.$$

情形 3：分母为一般多项式

定理 2　设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

情形 3：分母为一般多项式

定理 2　设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x)=Q_1(x)^{m_1}Q_2(x)^{m_2}\cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

定理 3　假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}}\cdots+\frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

情形 3：分母为一般多项式

定理 2　设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

定理 3　假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}} \cdots + \frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式.

分母为三次多项式

例 6　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^2 - x + 2}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x.$

分母为三次多项式

例 6　求不定积分 $\int \frac{x^2 - x + 2}{(x+1)^3} dx.$

例 7　求不定积分 $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x^2+1)} dx.$

分母为三次多项式

例 6　求不定积分 $\int \frac{x^2 - x + 2}{(x+1)^3} \mathrm{d}x$.

例 7　求不定积分 $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x^2+1)} \mathrm{d}x$.

练习 5　求不定积分 $\int \frac{2x + 10}{(x+1)(x^2+2x+5)} \mathrm{d}x$.

分母为四次多项式

例 8　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

复习与提高

复习 1　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x+7}{x^2+2x-3}\,dx.$

复习与提高

复习 1　求不定积分 $\int \frac{x+7}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x.$

复习 2　求不定积分 $\int \frac{4x+7}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x.$

复习与提高

复习 1 求不定积分 $\int \frac{x+7}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x.$

复习 2 求不定积分 $\int \frac{4x+7}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x.$

复习 3 求不定积分 $\int \frac{x^3+x^2}{x^2+4}\mathrm{d}x.$

有理分式的积分

复习 4　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$.

有理分式的积分

题 1　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)}$.

初等函数的不定积分

注记　初等函数的原函数未必都是初等函数．可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”，比如

$$\int e^{-x^2}\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \sqrt{1+x^4}\,dx.$$