高等数学课程

第五章 · 定积分

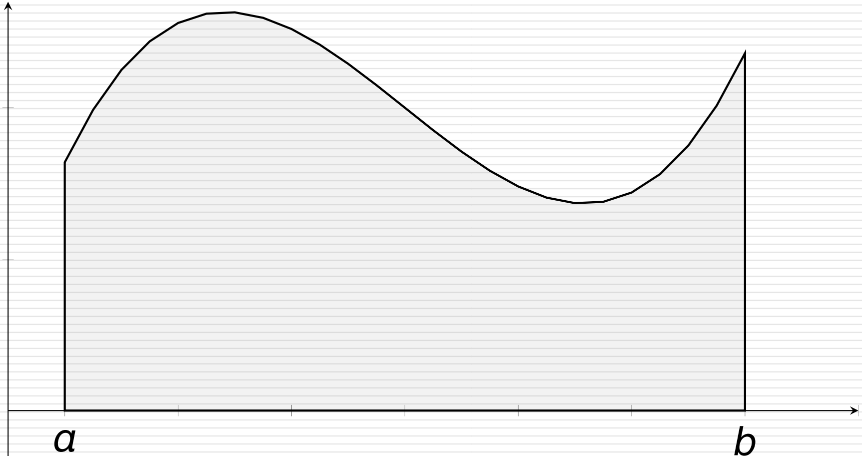
2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

曲边梯形的面积

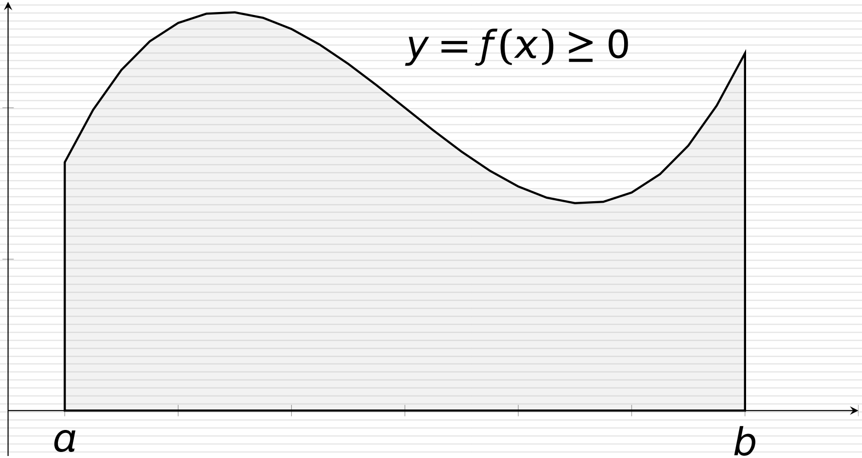
引例 计算由抛物线 $y = x^2$, 直线 $x = 1$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

曲边梯形的面积



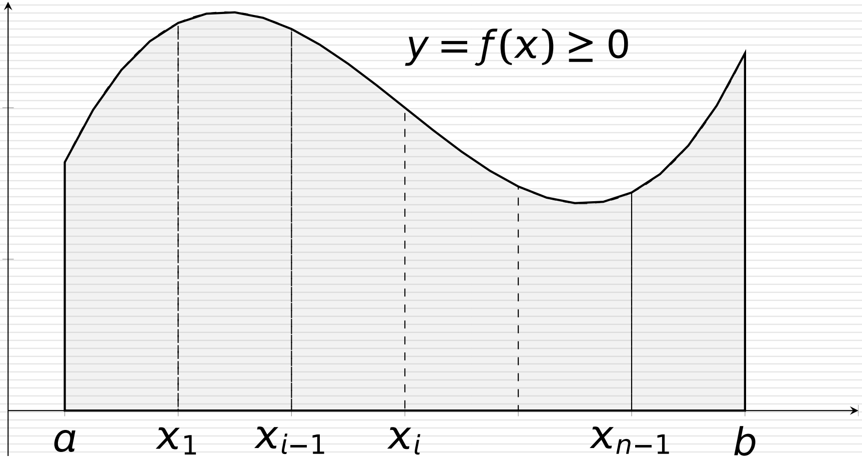
$S =$

曲边梯形的面积



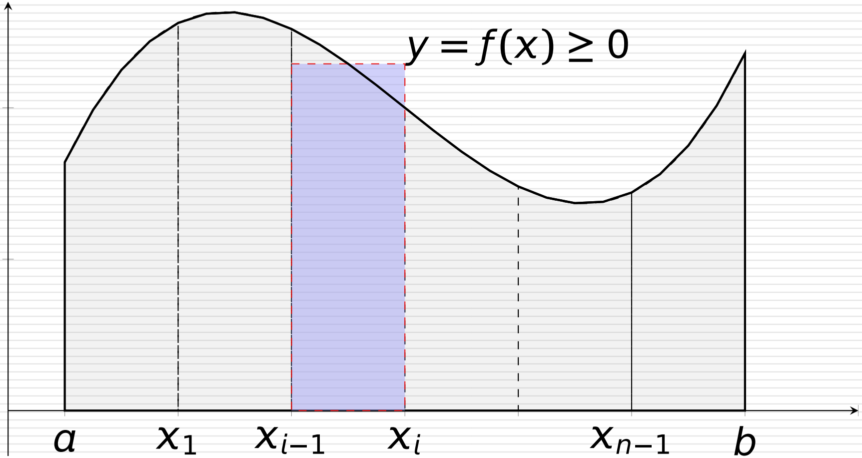
$S =$

曲边梯形的面积



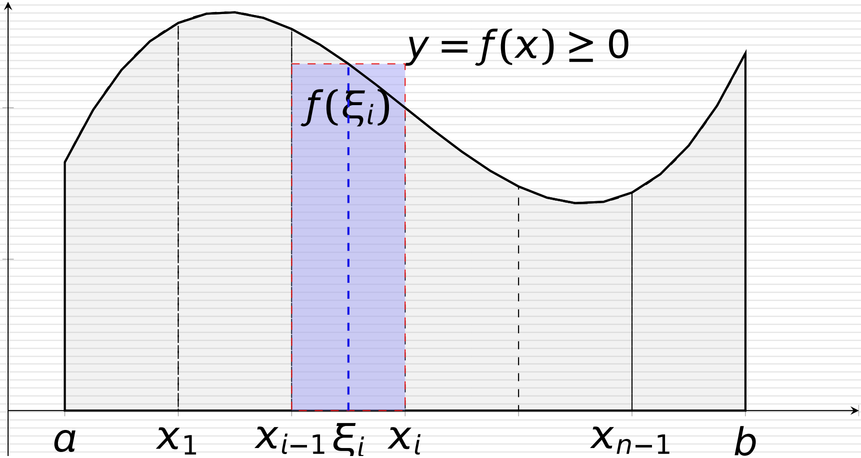
$$S = \sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



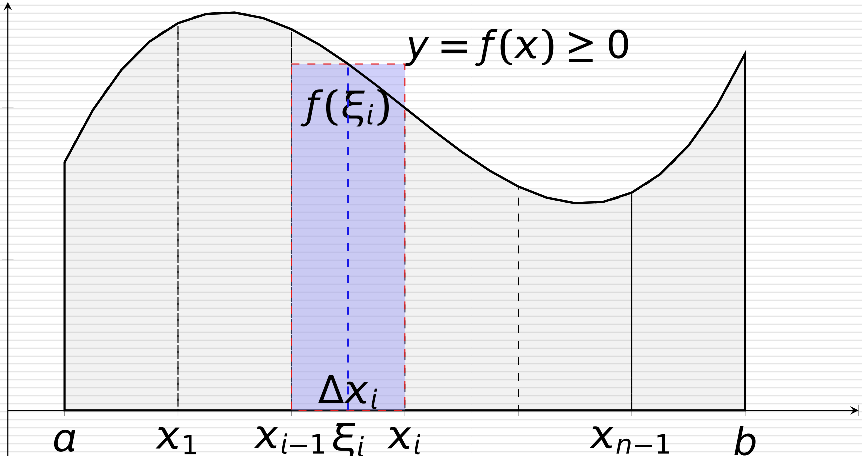
$$S=\sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



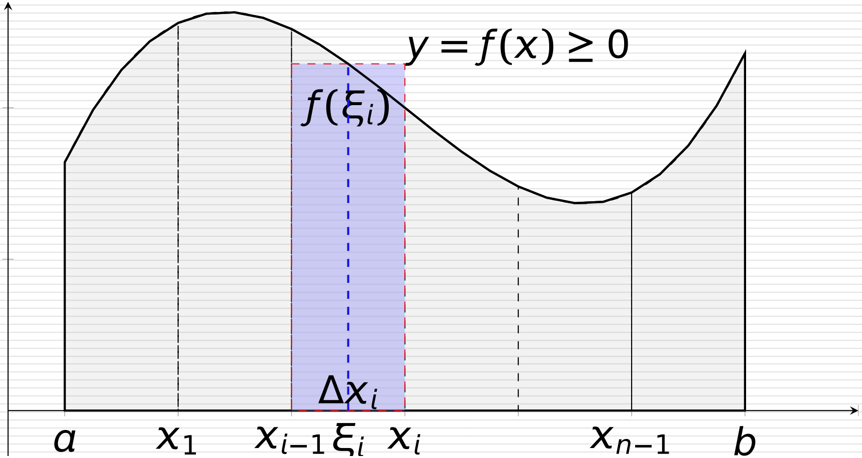
$$S = \sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



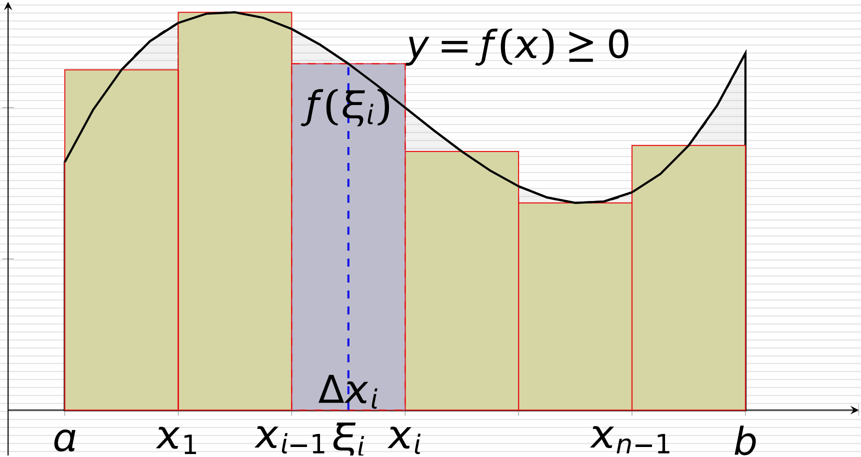
$$S = \sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



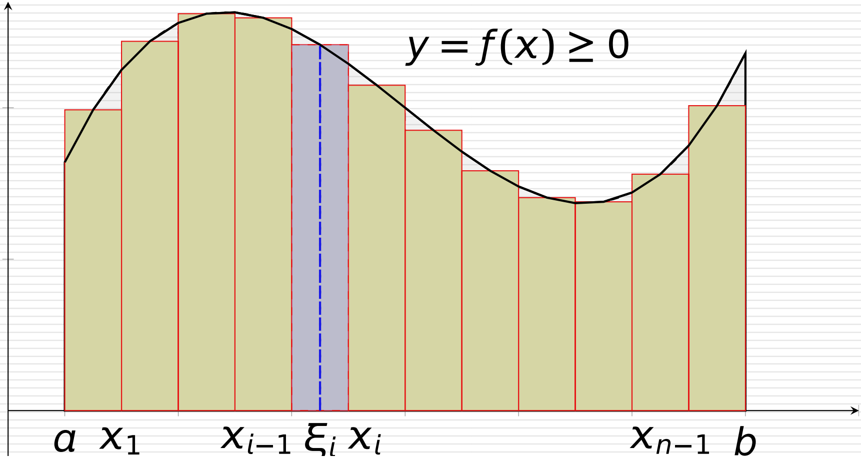
$$S = \sum_i \Delta S_i \qquad f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积



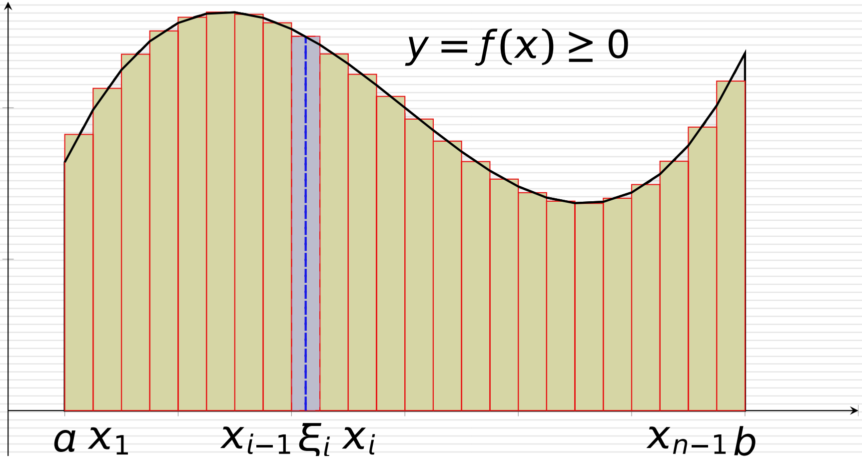
$$S=\sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积



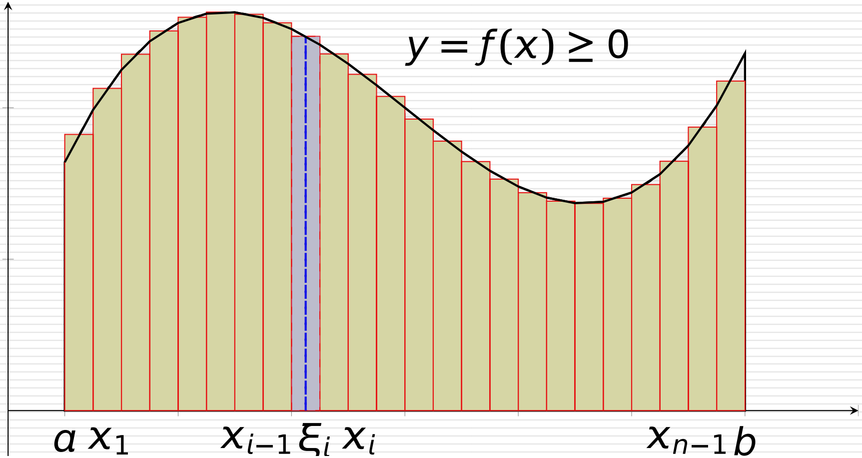
$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积



$$S=\sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积



$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积

例 1　计算由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

曲边梯形的面积

例 1　计算由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

1. 将区间 $[a,b]$ 任意划分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$, 各段的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

曲边梯形的面积

例 1　计算由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

1. 将区间 $[a,b]$ 任意划分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$, 各段的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \leq i \leq n$.
2. 在每小段区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任意选取一点 ξ_i, 得到面积的近似值为 $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

曲边梯形的面积

例 1　计算由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

1. 将区间 $[a,b]$ 任意划分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$, 各段的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$.
2. 在每小段区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任意选取一点 ξ_i，得到面积的近似值为 $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.
3. 令 $\lambda = \max_i\{\Delta x_i\}$, 则当 $\lambda \to 0$ 时就得到面积的实际值为 $S = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

变速直线运动的位移

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

变速直线运动的位移

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

1. 将时间段 $[a, b]$ 任意划分为 n 段 $[t_{i-1}, t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

变速直线运动的位移

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

1 将时间段 $[a, b]$ 任意划分为 n 段 $[t_{i-1}, t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

2 在每小段区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任意选取一点 ξ_i，得到位移的近似值为 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

变速直线运动的位移

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

1 将时间段 $[a,b]$ 任意划分为 n 段 $[t_{i-1},t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

2 在每小段区间 $[t_{i-1},t_i]$ 上任意选取一点 ξ_i，得到位移的近似值为 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

3 令 $\lambda = \max_i\{\Delta t_i\}$, 则当 $\lambda \to 0$ 时就得到位移的实际值为 $s = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，

1. 用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间任意划分为 n 段 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，

1. 用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间任意划分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
2. 在每段 $[x_{i-1},x_i]$ 上任意选取点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，

1. 用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间任意划分为 n 段 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
2. 在每段 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意选取点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max_i\{\Delta x_i\}$，如果 $\lambda \to 0$ 时近似和的极限存在，

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义,

1. 用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间任意划分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$, 其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
2. 在每段 $[x_{i-1},x_i]$ 上任意选取点 ξ_i, 得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max_i\{\Delta x_i\}$, 如果 $\lambda \to 0$ 时近似和的极限存在, 我们就称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是可积的, 并将这个极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分,

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义,

1. 用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间任意划分为 n 段 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$,其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
2. 在每段 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意选取点 ξ_i,得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\lambda = \max_i\{\Delta x_i\}$,如果 $\lambda \to 0$ 时近似和的极限存在,我们就称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是可积的,并将这个极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分,记为

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

定积分

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

定积分

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中:

定积分

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中：

- x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式

定积分

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中：

- x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式
- a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$ 称为积分区间

注记 1 定积分的值只与被积函数 f 和积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么字母无关．即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

注记 1　定积分的值只与被积函数 f 和积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么字母无关．即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

注记 2　如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续函数（或者是只有有限个间断点的有界函数），则它在 $[a,b]$ 上是可积的.

注记 3　如果 $a > b$，我们规定

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

注记 3　如果 $a > b$，我们规定

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

特别地，如果 $a = b$，我们可以得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

注记 4　设由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 S

- 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S.$$

注记 4 设由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 S

- 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S.$$

- 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq 0$，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -S.$$

性质 1　设 k 为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 1　设 k 为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 2 (函数可加性)

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3 (区间可加性) 设 $a < c < b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3 (区间可加性) 设 $a < c < b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

注记 1 即使 c 不在 a 和 b 之间，上述性质依然是成立的.

性质 4　如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$，那么

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b-a$$

性质 5　设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

性质 5　设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

性质 5　设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

推论　$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

例 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 和 $\int_0^1 x^2\,dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

例 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 和 $\int_0^1 x^2\,dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

练习 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_1^2 x\,dx$ 和 $\int_1^2 x^2\,dx$

例 1 比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 和 $\int_0^1 x^2\,dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

练习 1 比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_1^2 x\,dx$ 和 $\int_1^2 x^2\,dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

性质 6　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则有

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

性质 6 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

例 2 估计下面的积分值：

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

性质 7 (积分中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

性质 7 (积分中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

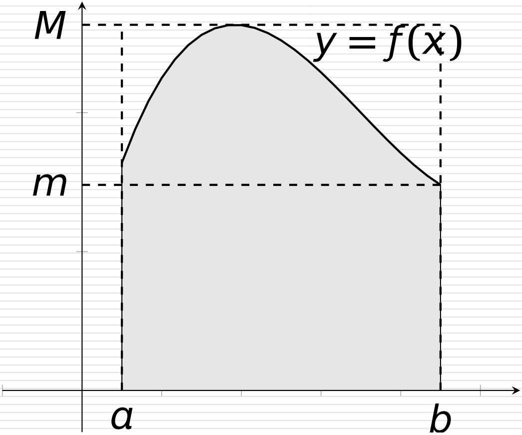
注记 2 上述性质也是说，存在 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$$

说明连续函数在区间 $[a,b]$ 上的平均值是可以取到的.

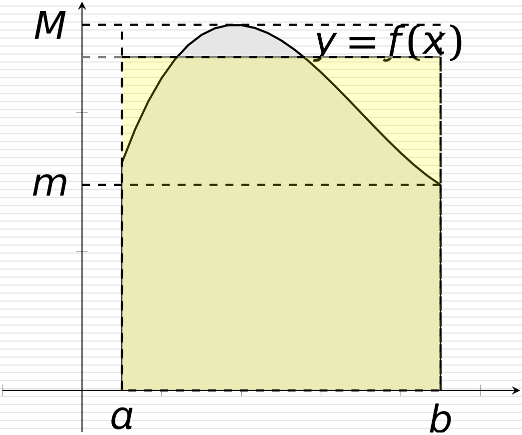
积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



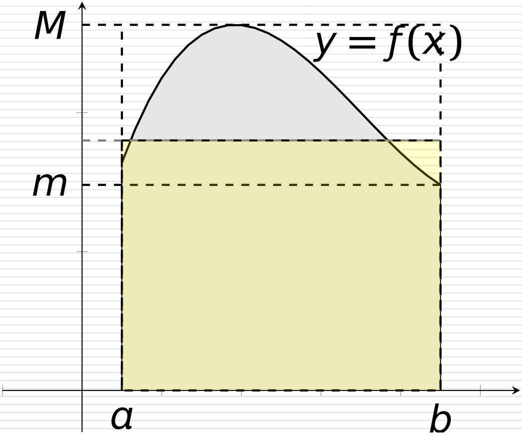
积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



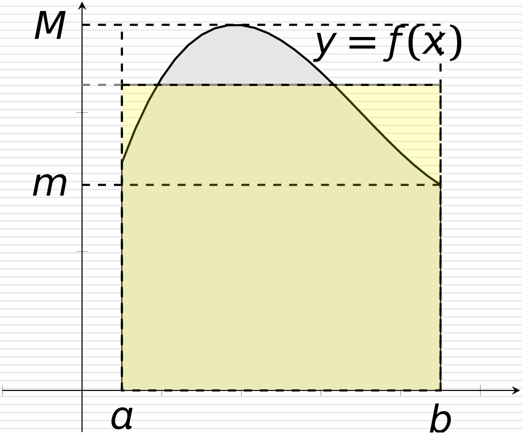
积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



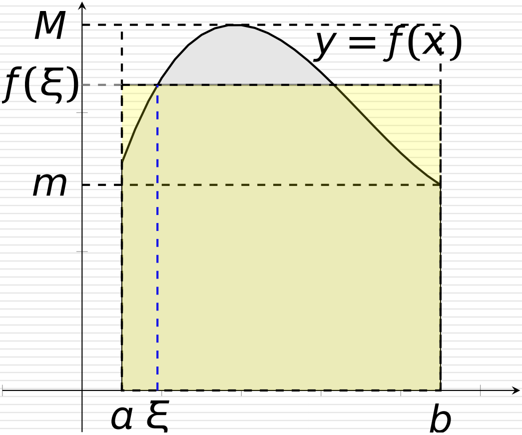
积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



定积分的保号性

题 1　设在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 连续，$f(x) \geqslant 0$，且 $f(x)$ 不恒为零，证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

变速直线运动

引例　设物体在直线上运动，速度函数为 $v(t)$，位置函数为 $s(t)$，则在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内经过的路程为

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t = s(T_2) - s(T_1).$$

变速直线运动

引例　设物体在直线上运动，速度函数为 $v(t)$，位置函数为 $s(t)$，则在时间间隔 $[T_1, T_2]$ 内经过的路程为

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)\,\mathrm{d}t = s(T_2) - s(T_1).$$

已知关系式 $s'(t) = v(t)$，即 $s(t)$ 是 $v(t)$ 的原函数.

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，变上限积分

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，**变上限积分**

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

定理 1　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，**变上限积分**

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad x\in[a,b].$$

定理 1　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则有

$$\Phi'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

注记 1　上述定理说明，对于闭区间上的连续函数，它的原函数总是存在的.

微积分基本公式

定理 2　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

若记 $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$，则上式又可表示为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

微积分基本公式

定理 2　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

若记 $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$，则上式又可表示为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

它称为微积分基本公式或牛顿—莱布尼茨公式.

微积分基本公式

例 1　求下列定积分.

(1) $\int_0^1 x^2 \, dx$

(2) $\int_2^4 \frac{dx}{x}$

(3) $\int_{-1}^3 |2-2x| \, dx$

微积分基本公式

练习 1　求下列定积分.

(1) $\int_0^1 e^x \, dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$

(3) $\int_{-1}^{2} |2x| \, dx$

定理 3　对于更一般的变限积分，有下面求导公式：

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(b(x))\cdot b'(x) - f(a(x))\cdot a'(x)$$

特别地，我们有

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x), \qquad \left(\int_{x}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x)$$

例 2　求下列变限积分的导数.

(1) $\int_0^x e^{2t}\,dt$

(2) $\int_x^{-1} \cos^2 t\,dt$

(3) $\int_x^{x^2} \sin t\,dt$

例 2　求下列变限积分的导数.

(1) $\int_{0}^{x} \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$

(2) $\int_{x}^{-1} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$

(3) $\int_{x}^{x^2} \sin t\,\mathrm{d}t$

练习 2　求下列变限积分的导数.

(1) $\int_{0}^{x^2} \arctan t\,\mathrm{d}t$

(2) $\int_{\cos x}^{0} t^2\,\mathrm{d}t$

例 2　求下列变限积分的导数.

(1) $\int_0^x e^{2t}\,dt$

(2) $\int_x^{-1} \cos^2 t\,dt$

(3) $\int_x^{x^2} \sin t\,dt$

练习 2　求下列变限积分的导数.

(1) $\int_0^{x^2} \arctan t\,dt$

(2) $\int_{\cos x}^{0} t^2\,dt$

(3) $\int_{\ln x}^{e^x} t^3\,dt$

例 3　求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x} (\mathrm{e}^t-1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

例 3　求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x} \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x} (\mathrm{e}^t - 1) \, \mathrm{d}t}{x^2}$

练习 3　求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x} \cos^2 t \, \mathrm{d}t}{x}$

例 3 求函数极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x} e^t \, dt}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}(e^t-1)\, dt}{x^2}$

练习 3 求函数极限.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x}\cos^2 t \, dt}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^{0}\arctan t \, dt}{x^2}$

例 4　求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)\,\mathrm{d}t$ 的极值.

例 4　求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)\,\mathrm{d}t$ 的极值.

练习 4　求函数 $f(x)=\int_0^x t(t-4)\,\mathrm{d}t$ 的极值.

分段函数的定积分

例 5　求 k 的值，使得 $\int_k^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{40}{3}$，其中

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leqslant 2; \\ x^2+1, & x > 2. \end{cases}$$

积分中值定理

注记　积分中值定理的 “$\xi \in [a,b]$” 可以改进为 “$\xi \in (a,b)$”.

积分中值定理

注记　积分中值定理的“$\xi \in [a,b]$”可以改进为“$\xi \in (a,b)$”.

定理 (积分中值定理)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

积分中值定理

注记 积分中值定理的“$\xi \in [a,b]$”可以改进为“$\xi \in (a,b)$”.

定理 (积分中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明 利用微积分基本公式和微分中值定理.

例 6 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且 $f(x)>0$. 证明

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

在 $(0,+\infty)$ 上是单调递增的.

变限积分的导数

复习 3　求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{1-\cos x}$$

定积分与极限

题 1　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x.$

定积分与极限

题 2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

定积分与极限

题 2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解答　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+i/n}\cdot\dfrac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2.$$

定积分与极限

题 2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解答　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+i/n}\cdot\dfrac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln 2.$$

思考　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$.

定积分不等式

题 3　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调递增，证明

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

定积分不等式

题 3　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调递增，证明

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

解答　令 $L(t)=\int_a^t xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$，则有

$$L'(t)=\frac{t-a}{2}f(t)-\frac{1}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \overset{?}{\geqslant} 0$$

要说明上面不等式，有两种方法.

定积分不等式

题 4　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

定积分不等式

题 5 设连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减．试证明对于任何 $q \in [0,1]$，都有不等式

$$\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant q\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

复习与提高

选择 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x g(x)f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ 等于 . . . . ( )

(A) $g(x)f(x)$

(B) $g'(x)f'(x)$

(C) $g'(x)f(x)+g(x)f'(x)$

(D) $g(x)f(x)+g'(x)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

复习与提高

选择　假设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则必有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

定积分的换元法

设 $f(x)$ 连续，$x = \phi(t)$ 有连续导数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

其中，当 $x = a$ 时，$t = \alpha$；当 $x = b$ 时，$t = \beta$.

例 1　求下列定积分.

(1) $\int_{-1}^{2} xe^{x^2}\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

例 1　求下列定积分.

(1) $\int_{-1}^{2} x e^{x^2} \, dx$

(2) $\int_{0}^{8} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$

练习 1　求下列定积分.

(1) $\int_{0}^{1} \frac{x \, dx}{x^2+1}$

(2) $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$

定积分的换元法

例 2　求定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

定积分的换元法

例 2　求定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

练习 2　求定积分 $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

定积分的换元法

例 2　求定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

练习 2　求定积分 $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

练习 3　求定积分 $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx.$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

定理　(1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

…………………………………………

证明　(1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t=-x$）

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

....

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t=-x$）

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-t)\,dt$（令 $t=-x$）

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t = -x$）

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

从而 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t=-x$）

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

从而 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

奇偶性与定积分

例 3　求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1} x^3 \, dx$

(2) $\int_{-1}^{1} (x+1)^3 \, dx$

奇偶性与定积分

例 3　求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1} x^3 \, dx$

(2) $\int_{-1}^{1} (x+1)^3 \, dx$

例 4　证明 $\int_{0}^{2\pi} \sin^3 x \, dx = 0.$

奇偶性与定积分

练习 4　求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

周期性与定积分

例 5　设 $f(x)$ 是连续的周期函数，周期为 T.

(1) 证明 $\displaystyle\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$

(2) 证明 $\displaystyle\int_a^{a+nT} f(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x$（$n \in \mathbb{N}$）

(3) 计算 $\displaystyle\int_0^{n\pi} \sqrt{1+\sin 2x}\,\mathrm{d}x$

三角函数的定积分

例 6　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

(1) 证明 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$

(2) 证明 $\displaystyle\int_0^{\pi} x f(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$

(3) 计算 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$

分段函数的定积分

例 7　计算 $\int_1^4 f(x-2)\,\mathrm{d}x$，其中函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\cos x}, & -\pi<x<0;\\ xe^{-x^2}, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

换元积分法

复习 1　求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$

(2) $\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$

换元积分法

复习 1　求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$

复习 2　求定积分 $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

复习与提高

题 1　设 $f(x)$ 连续，求下面函数 $\Phi(x)$ 的导数：

$$\Phi(x) = \int_0^x f(2x+3t)\,\mathrm{d}t$$

定积分的分部积分法

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

定积分的分部积分法

例 1　求下列定积分.

(1) $\int_1^5 \ln x \, dx$

(2) $\int_0^1 x e^x \, dx$

定积分的分部积分法

例 1　求下列定积分.

(1) $\int_{1}^{5} \ln x \, dx$

(2) $\int_{0}^{1} x e^{x} \, dx$

例 2　求定积分 $\int_{0}^{4} e^{\sqrt{x}} \, dx$.

定积分的分部积分法

练习 1　求下列定积分.

(1) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

定积分的分部积分法

例 3　求 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ 的递归公式，并求出 I_n.

定积分的分部积分法

例 3　求 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, \mathrm{d}x$ 的递归公式，并求出 I_n.

例 4　设 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} \, \mathrm{d}t$，求 $\int_0^1 x f(x) \, \mathrm{d}x$.

复习与提高

复习 1　求下列定积分：

(1) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$;

(2) $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

复习与提高

复习 1　求下列定积分：

(1) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$;

(2) $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

复习 2　求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$.

复习与提高

题 1 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数，而且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$. 求 $\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}x$.

第二节	定积分的性质
第三节	微积分基本公式
第四节	定积分的换元积分法
第五节	定积分的分部积分法
第六节	反常积分

第六节	反常积分
A	无限区间上的积分
B	对无界函数的积分

无限区间上的积分 1

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

无限区间上的积分 1

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

- 如果极限存在，则称反常积分收敛；
- 如果极限不存在，则称反常积分发散.

例 1　求反常积分

(1) $\int_{0}^{+\infty} x e^{-x^2} \mathrm{d}x$

例 1　求反常积分

(1) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$

练习1　求反常积分

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

练习1　求反常积分

(1) $\int_{0}^{+\infty} e^{-x}\,dx$

(2) $\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

无限区间上的积分 2

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

$$= F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

无限区间上的积分 2

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

$$= F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

- 如果极限存在，则称反常积分收敛；
- 如果极限不存在，则称反常积分发散.

无限区间上的积分 3

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$．则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

无限区间上的积分 3

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

- 如果两个极限都存在，则称反常积分收敛；
- 如果其中一个极限不存在，则称反常积分发散.

无限区间上的积分 3

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$．则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

- 如果两个极限都存在，则称反常积分收敛；
- 如果其中一个极限不存在，则称反常积分发散．

例 2　反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ 发散．

例 3 求反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

第六节	反常积分
A	无限区间上的积分
B	对无界函数的积分

无界函数的积分

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续且有原函数 $F(x)$，而在趋于点 a 时无界（a 称为瑕点）. 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+)$$

无界函数的积分

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续且有原函数 $F(x)$，而在趋于点 a 时无界（a 称为瑕点）．则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+)$$

设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续且有原函数 $F(x)$，而在趋于点 b 时无界（b 称为瑕点）．则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_{a}^{b^-} = F(b^-) - F(a)$$

无界函数的积分

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续且有原函数 $F(x)$，而在趋于点 a 时无界（a 称为瑕点）．则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+)$$

设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续且有原函数 $F(x)$，而在趋于点 b 时无界（b 称为瑕点）．则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_{a}^{b^-} = F(b^-) - F(a)$$

注记　如果上述极限不存在，则称反常积分发散．

例 4　求反常积分

(1) $\int_0^1 \ln x \, dx$

例 4　求反常积分

(1) $\int_0^1 \ln x \, dx$

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ $(p > 0)$

例 4　求反常积分

(1) $\int_0^1 \ln x \, dx$

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ （$p > 0$）

练习 2　求反常积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

无界函数的积分

设 $f(x)$ 仅在趋于点 $c \in (a,b)$ 时无界．则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= [F(x)]_a^{c^-} + [F(x)]_{c^+}^b$$

$$= F(c^-) - F(a) + F(b) - F(c^+)$$

$$= F(b) - F(a) + F(c^-) - F(c^+)$$

注记　如果其中一个极限不存在，则称反常积分发散.

无界函数的积分

例 5　研究反常积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^3}$.

无界函数的积分

例 5　研究反常积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^3}$.

注记　虽然 $[-1, 1]$ 为对称区间，且 $\frac{1}{x^3}$ 是奇函数，但由于函数在 $x = 0$ 处有瑕点，不能说积分等于 0.

复习与提高

复习 1　求下列反常积分

(1) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$　　(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$

反常积分的换元法

例 6　求反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(x+1)^3}}$.

注记　这个反常积分既有无限区间又有瑕点 0.