高等数学课程

第六章 · 定积分的应用

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节 平面图形的面积

第二节 空间立体的体积

第三节 平面曲线的弧长

第一节	平面图形的面积
A	直角坐标下的面积
B	极坐标下的面积

直角坐标下的面积

由曲线 $y = f(x)$, x 轴，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

直角坐标下的面积

由曲线 $y = f(x)$, x 轴，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

由曲线 $x = f(y)$, y 轴，直线 $y = a$ 以及直线 $y = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b |f(y)|\,\mathrm{d}y$$

直角坐标下的面积

例 1　求由直线 $y = x + 1$, x 轴, $x = -2$ 和 $x = 2$ 所围成的图形的面积.

直角坐标下的面积

例 1　求由直线 $y = x + 1$, x 轴，$x = -2$ 和 $x = 2$ 所围成的图形的面积.

练习 1　求由曲线 $y = 1 - x^2$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

直角坐标下的面积

由曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$，直线 $x=a$ 以及直线 $x=b$ 所围成的图形的面积为

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

直角坐标下的面积

由曲线 $y=f(x)$, $y=g(x)$，直线 $x=a$ 以及直线 $x=b$ 所围成的图形的面积为

$$A=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$$

由曲线 $x=f(y)$, $x=g(y)$，直线 $y=a$ 以及直线 $y=b$ 所围成的图形的面积为

$$A=\int_a^b |f(y)-g(y)|\,\mathrm{d}y$$

例 2　求由抛物线 $y^2 = x$ 和直线 $x = 4$ 所围成的图形的面积.

例 2　求由抛物线 $y^2 = x$ 和直线 $x = 4$ 所围成的图形的面积.

练习 2　求由抛物线 $y^2 = x$ 和 $y^2 = 2 - x$ 所围成的图形的面积.

计算面积的步骤

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

2 确定积分区间

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

2 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

2 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到

3 确定被积函数

计算面积的步骤

1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到
3. 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到

计算面积的步骤

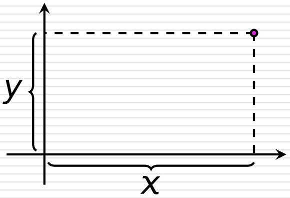
1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到
3. 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到
4. 计算积分结果

例 3　求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积.

第一节	平面图形的面积
A	直角坐标下的面积
B	极坐标下的面积

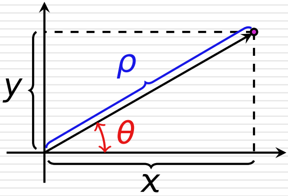
直角坐标与极坐标

直角坐标 (x, y)



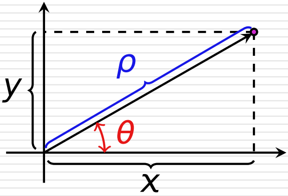
直角坐标与极坐标

直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为



直角坐标与极坐标

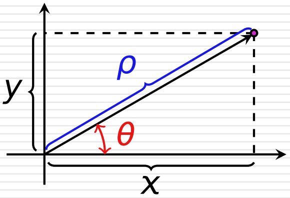
直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

直角坐标与极坐标

直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为



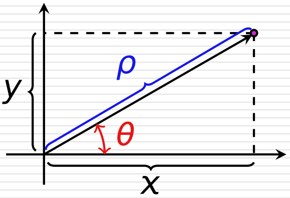
$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

例子　圆心在原点，半径为 a 的圆

- 它的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = a^2$

直角坐标与极坐标

直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

例子　圆心在原点，半径为 a 的圆

- 它的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 = a^2$
- 它的极坐标方程为 $\rho = a$

极坐标曲线

几种常见的极坐标曲线（参考课本附录 III）

- $\rho = 2a\cos\theta$ .... 圆

极坐标曲线

几种常见的极坐标曲线（参考课本附录 III）

- $\rho = 2a\cos\theta$ . . . . 圆
- $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ . . . . 双纽线

极坐标曲线

几种常见的极坐标曲线（参考课本附录III）

- $\rho = 2a\cos\theta$ . . . . 圆
- $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ . . . . 双纽线
- $\rho = a\cos 3\theta$ . . . . 三叶玫瑰线

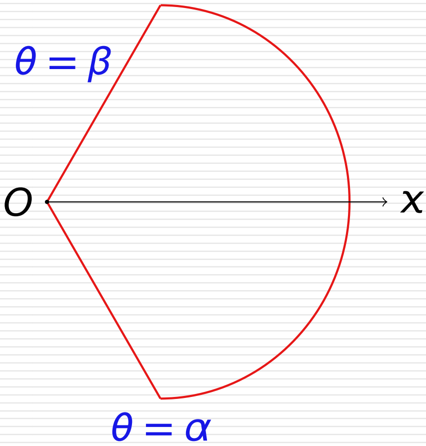
极坐标曲线

几种常见的极坐标曲线（参考课本附录 III）

- $\rho = 2a\cos\theta$ …………………………圆
- $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ ……………………双纽线
- $\rho = a\cos 3\theta$ ……………………三叶玫瑰线
- $\rho = a\cos 2\theta$ ……………………四叶玫瑰线

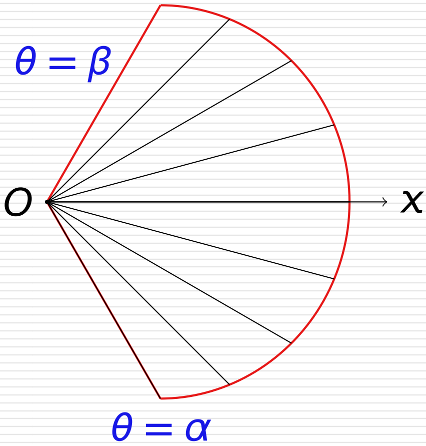
极坐标下的面积

由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的曲边扇形的面积



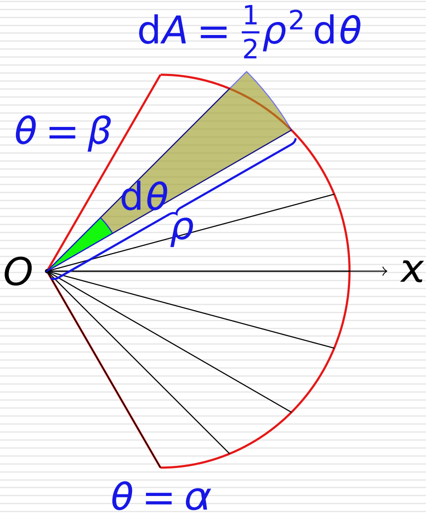
极坐标下的面积

由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的曲边扇形的面积



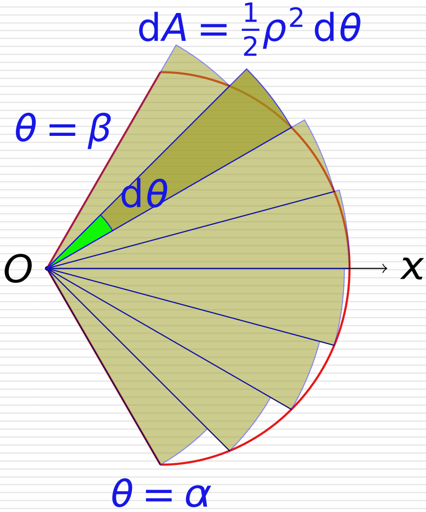
极坐标下的面积

由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha,\ \theta = \beta$ 所围成的曲边扇形的面积



极坐标下的面积

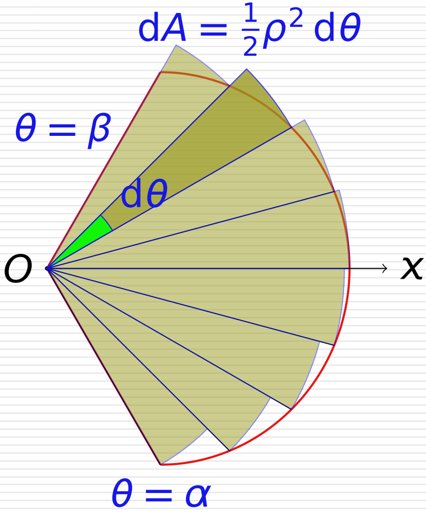
由曲线 $\rho = \rho(\theta)$ 及射线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 所围成的曲边扇形的面积



极坐标下的面积

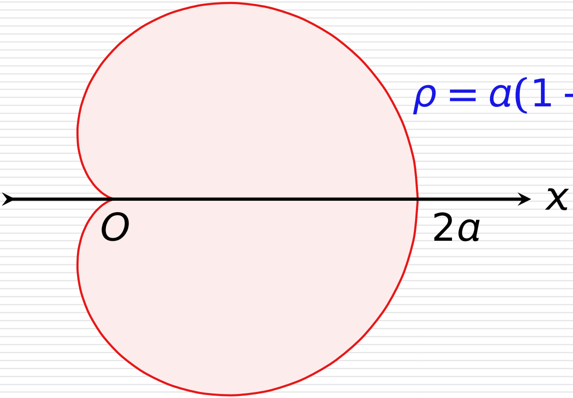
由曲线 $\rho=\rho(\theta)$ 及射线 $\theta=\alpha,\ \theta=\beta$ 所围成的**曲边扇形**的面积为

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2\,\mathrm{d}\theta$$



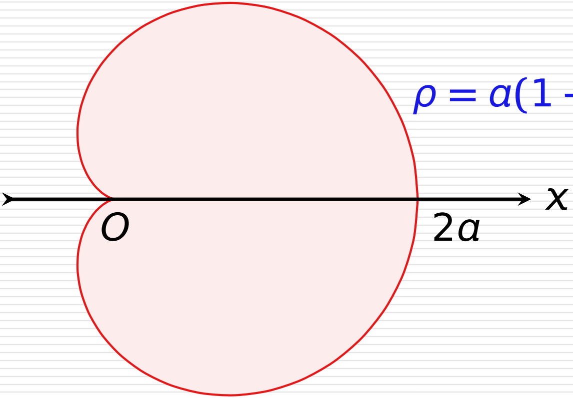
例 4　计算阿基米德螺线 $\rho = a\theta$（$a > 0$）上对应于 θ 从 0 到 2π 的一段弧与极轴所围成的图形的面积.

例 5 计算心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$（$a>0$）所围成的图形的面积.



极坐标下的面积

例 5 计算心形线 $\rho = a(1+\cos\theta)$（$a>0$）所围成的图形的面积.



思考 求双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围成图形的面积.

复习与提高：平面图形的面积

复习 1　(1) 求由曲线 $y = -x^2 + x + 2$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

复习 1　(1) 求由曲线 $y=-x^2+x+2$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

(2) 求由 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 所围成的图形的面积.

第二节	空间立体的体积
A	旋转体的体积
B	一般立体的体积

旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \, \mathrm{d}x$$

旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$

旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \,\mathrm{d}x$$

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 $y = c$ 所围成的平面图形，绕 $y = c$ 旋转而成的旋转体的体积是

旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 $y = c$ 所围成的平面图形，绕 $y = c$ 旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi (y - c)^2 \, dx$$

旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \, dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, dx$$

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 $y = c$ 所围成的平面图形，绕 $y = c$ 旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi (y - c)^2 \, dx = \pi \int_a^b [f(x) - c]^2 \, dx$$

旋转体的体积

由曲线 $x = f(y)$，直线 $y = a$, $y = b$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

旋转体的体积

由曲线 $x = f(y)$，直线 $y = a, y = b$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y = \int_a^b \pi x^2 \, \mathrm{d}y$$

旋转体的体积

由曲线 $x = f(y)$，直线 $y = a$, $y = b$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y = \int_a^b \pi x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, \mathrm{d}y$$

旋转体的体积

由曲线 $x=f(y)$，直线 $y=a$, $y=b$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y=\int_a^b \pi x^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_a^b [f(y)]^2\,\mathrm{d}y$$

由曲线 $x=f(y)$，直线 $y=a$, $y=b$ 及 $x=c$ 所围成的平面图形，绕 $x=c$ 旋转而成的旋转体的体积是

旋转体的体积

由曲线 $x = f(y)$，直线 $y = a$, $y = b$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y = \int_a^b \pi x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, \mathrm{d}y$$

由曲线 $x = f(y)$，直线 $y = a$, $y = b$ 及 $x = c$ 所围成的平面图形，绕 $x = c$ 旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y = \int_a^b \pi (x - c)^2 \, \mathrm{d}y$$

旋转体的体积

由曲线 $x = f(y)$，直线 $y = a$, $y = b$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y = \int_a^b \pi x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_a^b [f(y)]^2 \, \mathrm{d}y$$

由曲线 $x = f(y)$，直线 $y = a$, $y = b$ 及 $x = c$ 所围成的平面图形，绕 $x = c$ 旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y = \int_a^b \pi (x - c)^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_a^b [f(y) - c]^2 \, \mathrm{d}y$$

旋转体的体积

例 1　求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

旋转体的体积

例 1　求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

例 2　求由 $y=x$，$x=a$, 及 x 轴所围成的平面图形，分别绕 x 轴和绕 y 轴旋转所得的旋转体的体积.

第二节	空间立体的体积
A	旋转体的体积
B	一般立体的体积

一般立体的体积

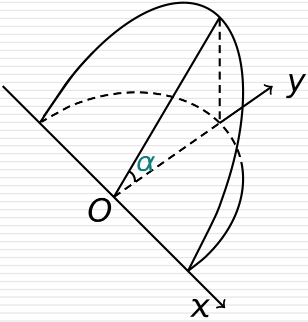
设立体在过点 $x = a$、$x = b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间，过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$，则该立体的体积为

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

例 3　一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，且与底面的交角为 α，计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

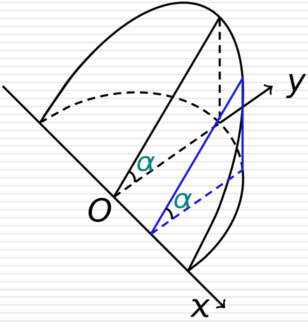
一般立体的体积

例 3　一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，且与底面的交角为 α，计算这平面截圆柱体所得立体的体积.



一般立体的体积

例 3　一平面经过半径为 R 的圆柱体的底圆中心，且与底面的交角为 α，计算这平面截圆柱体所得立体的体积.



复习与提高：旋转体的体积

复习 1　求由曲线 $y = -x^2 + 1$ 与 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

第三节	平面曲线的弧长
A	直角坐标下的弧长
B	极坐标下的弧长

直角坐标下的弧长

设曲线弧由参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ （$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$）给出，

则它的长度为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

直角坐标下的弧长

设曲线弧由参数方程 $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ （$\alpha \leqslant t \leqslant \beta$）给出，

则它的长度为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\phi'^{2}(t)+\psi'^{2}(t)}\,\mathrm{d}t$$

例 1　求摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$ 对应 $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

的一拱的长度.

直角坐标下的弧长

设曲线弧由直角坐标方程 $y = f(x)$（$a \leqslant x \leqslant b$）给出，则它的长度为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$$

直角坐标下的弧长

设曲线弧由直角坐标方程 $y=f(x)$（$a\leqslant x\leqslant b$）给出，则它的长度为

$$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

例 2　计算曲线 $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$ 上相应于 $a\leqslant x\leqslant b$ 的一段弧的长度.

第三节	平面曲线的弧长
A	直角坐标下的弧长
B	极坐标下的弧长

极坐标下的弧长

设曲线弧由极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$（$\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$）给出，则它的长度为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

极坐标下的弧长

设曲线弧由极坐标方程 $\rho = \rho(\theta)$（$\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$）给出，则它的长度为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

例 3　计算阿基米德螺线 $\rho = a\theta$（$a > 0$）相应于 $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ 的一段弧长.