高等数学课程

第七章 · 微分方程

2020 年 2 月 12 日

暨南大学数学系 吕荐瑞

定义 1　含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程.

定义 1　含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程．其中出现的导数的最高阶数 n，称为微分方程的阶.

定义 1 含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

称为微分方程．其中出现的导数的最高阶数 n，称为微分方程的阶.

例子 判别下列微分方程的阶数：

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=x$

(2) $x\,\mathrm{d}x-y^2\,\mathrm{d}y=0$

(3) $y''+y'=\mathrm{e}^x$

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \end{cases}$

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

$y = x^2 + C$（C 为任意常数）

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

$y = x^2 + C$（C 为任意常数）

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式，得到 $C = 2$.

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

$$y = x^2 + C\text{（}C\text{ 为任意常数）}$$

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式，得到 $C = 2$．因此

$$y = x^2 + 2$$

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

$y = x^2 + C$（C 为任意常数）$\cdots\cdots\cdots\cdots$ 通解

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式，得到 $C = 2$．因此

$$y = x^2 + 2$$

例 1　求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \quad \cdots\cdots \text{初始条件} \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

$$y = x^2 + C\text{（}C\text{ 为任意常数）} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{通解}$$

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式，得到 $C = 2$．因此

$$y = x^2 + 2$$

例 1 求解一阶微分方程 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 2x \\ y\big|_{x=1} = 3 \end{cases}$ …… 初始条件

解答 对方程两边积分，得到

$y = x^2 + C$（C 为任意常数）…………… 通解

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式，得到 $C = 2$. 因此

$y = x^2 + 2$ …………………………… 特解

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①，得到 $C_1 = 1$.

例 2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①，得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 ②，得到 $C_2 = 0$.

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①，得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 ②，得到 $C_2 = 0$. 因此

例 2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0,\ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①，得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 ②，得到 $C_2 = 0$. 因此

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

例 2　求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y\big|_{x=0} = 0, \ y'\big|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答　对方程两边积分，得到

① $y' = -x + C_1$（C_1 为常数）

再对前式两边积分，得到

② $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + C_1 x + C_2$（$C_1, C_2$ 为常数）$\cdots$ 通解

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 ①，得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 ②，得到 $C_2 = 0$．因此

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x \cdots\cdots\cdots\cdots \text{特解}$$

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y') = 0$. 对应的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$.

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y') = 0$．对应的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$.

在这一章中，我们将研究 3 种一阶微分方程：

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y') = 0$．对应的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$．

在这一章中，我们将研究 3 种一阶微分方程：

1 可分离变量微分方程

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x,y,y')=0$．对应的初始条件为 $y|_{x=x_0}=y_0$.

在这一章中，我们将研究 3 种一阶微分方程：

1. 可分离变量微分方程
2. 齐次微分方程

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y') = 0$. 对应的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$.

在这一章中，我们将研究 3 种一阶微分方程：

1. 可分离变量微分方程
2. 齐次微分方程
3. 一阶线性微分方程

㈠ 可分离变量微分方程

形如 $f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$ 的方程称为可分离变量微分方程.

㈠ 可分离变量微分方程

形如 $f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x$ 的方程称为可分离变量微分方程.

对这种方程的两边同时积分，就可以求出它的通解.

可分离变量微分方程

例 1　求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{x}$ 的通解.

可分离变量微分方程

例 1　求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{y}{x}$ 的通解.

练习 1　求微分方程 $(1+y)\,\mathrm{d}x-(1-x)\,\mathrm{d}y=0$ 的通解.

例 2　求微分方程 $y' = -\dfrac{x}{y}$ 在初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 下的特解.

可分离变量微分方程

例 2　求微分方程 $y' = -\frac{x}{y}$ 在初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 下的特解.

练习 2　求微分方程 $\frac{x}{1+y}\mathrm{d}x - \frac{y}{1+x}\mathrm{d}y = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 的特解.

例 3 求微分方程 $y' = 2xy^2$ 的通解，以及在初始条件 $y\big|_{x=0} = -1$ 下的特解.

可分离变量微分方程

例 3　求微分方程 $y' = 2xy^2$ 的通解，以及在初始条件 $y\big|_{x=0} = -1$ 下的特解.

解答　通解为 $y = -\dfrac{1}{x^2 + C}$.

可分离变量微分方程

例 3　求微分方程 $y' = 2xy^2$ 的通解，以及在初始条件 $y\big|_{x=0} = -1$ 下的特解.

解答　通解为 $y = -\dfrac{1}{x^2 + C}$.

注记　通解 $\neq$ 全部解.

可分离变量微分方程

复习 1　求方程 $xy\,\mathrm{d}x + \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

㈡ 齐次微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程称为齐次微分方程.

㈡ 齐次微分方程

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程称为齐次微分方程.

例如:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{x-2y}{x+y}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}$$

齐次微分方程的解法

1 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

齐次微分方程的解法

1. 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$
2. 换元：令 $v = \frac{y}{x}$，则有 $y = xv$，

齐次微分方程的解法

1 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

2 换元：令 $v = \frac{y}{x}$，则有 $y = xv$，

从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v$.

齐次微分方程的解法

1 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

2 换元：令 $v = \frac{y}{x}$，则有 $y = xv$，

从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v$. 代入原方程得到

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$$

齐次微分方程的解法

1 标准化：将微分方程化为 $\frac{dy}{dx} = f(\frac{y}{x})$

2 换元：令 $v = \frac{y}{x}$，则有 $y = xv$，

从而 $\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$. 代入原方程得到

$$x\frac{dv}{dx} + v = f(v)$$

3 分离变量：得到 $$\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$$

齐次微分方程的解法

1 标准化：将微分方程化为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(\frac{y}{x})$

2 换元：令 $v=\frac{y}{x}$，则有 $y=xv$，

从而 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v$．代入原方程得到

$$x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=f(v)$$

3 分离变量：得到 $\dfrac{\mathrm{d}v}{f(v)-v}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

4 两边积分：得到通解，然后将 v 代回

齐次微分方程

例 1 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y^2}{xy-x^2}$ 的通解.

例 1　求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ 的通解.

练习 1　求微分方程 $y' = \frac{y+x}{x}$ 的通解.

例 2 求微分方程 $\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

例 2　求微分方程 $\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答　方程即为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$.

例 2 求微分方程 $\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答 方程即为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$.

- 令 $v=\frac{y}{x}$，得到 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=\tan v+v$.

例 2 求微分方程 $\left(x\tan\frac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答 方程即为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\frac{y}{x}+\frac{y}{x}$.

- 令 $v=\frac{y}{x}$，得到 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=\tan v+v$.
- 分离变量，得到 $\cot v\,\mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{x}$.

例 2 求微分方程 $\left(x\tan\dfrac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x = x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答 方程即为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}$.

- 令 $v=\dfrac{y}{x}$，得到 $x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=\tan v+v$.
- 分离变量，得到 $\cot v\,\mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.
- 两边积分，得到 $\ln|\sin v|=\ln|x|+C_0$.

例 2　求微分方程 $\left(x\tan\dfrac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答　方程即为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}$.

- 令 $v=\dfrac{y}{x}$，得到 $x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=\tan v+v$.
- 分离变量，得到 $\cot v\,\mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.
- 两边积分，得到 $\ln|\sin v|=\ln|x|+C_0$.
- 整理等式，得到 $\sin v=Cx$，即 $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$.

例 2　求微分方程 $\left(x\tan\dfrac{y}{x}+y\right)\mathrm{d}x=x\,\mathrm{d}y$ 在初始条件 $y|_{x=2}=\pi$ 下的特解.

解答　方程即为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x}$.

- 令 $v=\dfrac{y}{x}$，得到 $x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}+v=\tan v+v$.
- 分离变量，得到 $\cot v\,\mathrm{d}v=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.
- 两边积分，得到 $\ln|\sin v|=\ln|x|+C_0$.
- 整理等式，得到 $\sin v=Cx$，即 $\sin\dfrac{y}{x}=Cx$.

代入初始条件，得到 $C=\dfrac{1}{2}$，故特解为 $\sin\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}x$.

练习 2　求微分方程 $(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y = 0$ 在初始条件 $y|_{x=1}=0$ 下的特解.

齐次微分方程

复习 1　求微分方程 $(x+y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0$ 的通解.

㈢ 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

㈢ 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$，称为一阶线性齐次微分方程
- 若 $q(x) \not\equiv 0$，称为一阶线性非齐次微分方程

㈢ 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$，称为一阶线性齐次微分方程
- 若 $q(x) \not\equiv 0$，称为一阶线性非齐次微分方程

. . . .

(1) $y' + xy = x^2$ ✓

㈢ 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$，称为一阶线性齐次微分方程
- 若 $q(x) \not\equiv 0$，称为一阶线性非齐次微分方程

(1) $y' + xy = x^2$ ✓

(2) $y' + y^2 = \sin x$ ✗

㈢ 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$，称为一阶线性齐次微分方程
- 若 $q(x) \not\equiv 0$，称为一阶线性非齐次微分方程

. . . .

(1) $y' + xy = x^2$ ✓

(2) $y' + y^2 = \sin x$ ✗

(3) $yy' + xy = 1$ ✗

一阶线性齐次微分方程

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

一阶线性齐次微分方程

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

分离变量得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x$$

一阶线性齐次微分方程

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

分离变量得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x$$

两边同时积分，得到

$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_0$$

一阶线性齐次微分方程

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

· ·

分离变量得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -p(x)\,\mathrm{d}x$$

两边同时积分，得到

$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + C_0$$

消去对数，得到通解为（其中 $C = \pm e^{C_0}$）

$$y = Ce^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 1　求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

……………………………………

例 1　求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$xy' + y = x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 1　求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$xy' + y = x$

2 合并左边：$(xy)' = x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 1　求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$xy' + y = x$

2 合并左边：$(xy)' = x$

3 两边积分：$xy = \frac{1}{2}x^2 + C$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 1　求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$xy' + y = x$

2 合并左边：$(xy)' = x$

3 两边积分：$xy = \frac{1}{2}x^2 + C$

4 得到通解：$y = \frac{1}{2}x + C\frac{1}{x}$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 2　求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

例 2　求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形：$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 2　求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形：$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

2 合并左边：$\left(\frac{1}{x}y\right)' = x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

· ·

例 2　求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形： $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

2 合并左边： $\left(\frac{1}{x}y\right)' = x$

3 两边积分： $\frac{1}{x}y = \frac{1}{2}x^2 + C$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 2　求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形：$\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

2 合并左边：$\left(\frac{1}{x}y\right)' = x$

3 两边积分：$\frac{1}{x}y = \frac{1}{2}x^2 + C$

4 得到通解：$y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

例 3　求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 3　求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$e^x y' + e^x y = e^x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

....

例 3　求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$e^x y' + e^x y = e^x$

2 合并左边：$(e^x y)' = e^x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

例 3　求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$e^x y' + e^x y = e^x$

2 合并左边：$(e^x y)' = e^x$

3 两边积分：$e^x y = e^x + C$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

例 3　求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1 恒等变形：$e^x y' + e^x y = e^x$

2 合并左边：$(e^x y)' = e^x$

3 两边积分：$e^x y = e^x + C$

4 得到通解：$y = 1 + Ce^{-x}$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

. . . .

1 恒等变形：$v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

$\cdots\cdots$

1 恒等变形：$v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

2 合并左边：$\left(v(x)y\right)' = q(x)v(x)$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

1 恒等变形：$v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

2 合并左边：$\big(v(x)y\big)' = q(x)v(x)$

3 两边积分：$v(x)y = \int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

1 恒等变形：$v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

2 合并左边：$\left(v(x)y\right)' = q(x)v(x)$

3 两边积分：$v(x)y = \int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C$

4 得到通解：$y = \frac{1}{v(x)}\left(\int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C\right)$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

1 恒等变形：$v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

2 合并左边：$\big(v(x)y\big)' = q(x)v(x)$

3 两边积分：$v(x)y = \int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C$

4 得到通解：$y = \frac{1}{v(x)}\Big(\int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C\Big)$

问题　积分因子 $v(x)$ 是否一定存在？如何求出它？

积分因子法

问题　寻找 $v = v(x)$ 使得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = (v\,y)'$.

积分因子法

问题 寻找 $v = v(x)$ 使得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = (v\,y)'$.

解答 展开等式右边得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = v\,y' + v'\,y$.

积分因子法

问题 寻找 $v = v(x)$ 使得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = (v\,y)'$.

解答 展开等式右边得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = v\,y' + v'\,y$.

- 化简条件：$p(x)\,v = v'$,

积分因子法

问题　寻找 $v = v(x)$ 使得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = (v\,y)'$.

解答　展开等式右边得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = v\,y' + v'\,y$.

- 化简条件：$p(x)\,v = v'$，即 $p(x)\,v = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

积分因子法

问题　寻找 $v = v(x)$ 使得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = (v\,y)'$.

解答　展开等式右边得 $v\,y' + p(x)\,v\,y = v\,y' + v'\,y$.

- 化简条件：$p(x)\,v = v'$，即 $p(x)\,v = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$
- 分离变量：$\dfrac{\mathrm{d}v}{v} = p(x)$

积分因子法

问题　寻找 $v=v(x)$ 使得 $v\,y'+p(x)\,v\,y=(v\,y)'$.

解答　展开等式右边得 $v\,y'+p(x)\,v\,y=v\,y'+v'\,y$.

- 化简条件：$p(x)\,v=v'$，即 $p(x)\,v=\dfrac{dv}{dx}$
- 分离变量：$\dfrac{dv}{v}=p(x)$
- 求解方程：$\ln v=\int p(x)\,dx$，即 $v=e^{\int p(x)\,dx}$

一阶线性微分方程的通解

对一阶线性非齐次微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

一阶线性微分方程的通解

对一阶线性非齐次微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

令积分因子为

$$v(x) = e^{\int p(x)\,dx}$$

一阶线性微分方程的通解

对一阶线性非齐次微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

令积分因子为

$$v(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$$

则方程的通解为

$$y = \frac{1}{v(x)}\left(\int q(x)v(x)\,\mathrm{d}x + C\right)$$

一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x} \left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C \right)$$

. . . .

一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解为

$$y = e^{-\int p(x)\,dx}\left(\int q(x)e^{\int p(x)\,dx}\,dx + C\right)$$

. . . .

注记 1　公式已经包含了任意常数，因此计算积分时不需要再加上任意常数.

一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 的通解为

$$y = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

. . . .

注记 1　公式已经包含了任意常数，因此计算积分时不需要再加上任意常数.

注记 2　若 $\int p(x)\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)|$，则代入公式时去掉绝对值号不影响结果.

一阶线性微分方程

例 4　求 $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$ 的通解.

一阶线性微分方程

例 4　求 $y' - \dfrac{2}{x+1}y = (x+1)^3$ 的通解.

练习 1　求 $y' + y = \mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

复习与提高

复习 1　求一阶微分方程 $xy' + y = 3x^2$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 下的特解.

复习与提高

复习 1　求一阶微分方程 $xy' + y = 3x^2$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 下的特解.

解答　通解 $y = \dfrac{1}{x}\left(x^3 + C\right)$，特解 $y = \dfrac{1}{x}\left(x^3 - 1\right)$.

复习与提高

题 1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x+y}$.

复习与提高

题 1 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{x+y}$.

注记 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + p(y)x = q(y)$ 也是一阶线性微分方程.

复习与提高

题 2　求可导函数 $\phi(x)$，使其满足

$$\phi(x)+\int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x.$$

复习与提高

题 2　求可导函数 $\phi(x)$，使其满足

$$\phi(x) + \int_0^x \phi(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^x.$$

解答　求导得到微分方程，解得 $\phi(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$.

第三节	齐次微分方程
第四节	一阶线性微分方程
第五节	**可降阶的高阶微分方程**
第六节	高阶线性微分方程
第七节	常系数齐次线性微分方程

(一) $y'' = f(x)$ 型

解法　逐次积分.

㈠ $y'' = f(x)$ 型

解法　逐次积分.

例 1　求 $y'' = e^{2x}$ 的通解.

㈡ $y'' = f(x, y')$ 型

解法　令 $p = y'$，则 $y'' = p'$，方程变成

$$p' = f(x, p).$$

㈡ $y'' = f(x, y')$ 型

解法　令 $p = y'$，则 $y'' = p'$，方程变成

$$p' = f(x, p).$$

例 2　求 $y'' = \frac{1}{x} y'$ 的通解.

㈡ $y'' = f(x, y')$ 型

解法 令 $p = y'$，则 $y'' = p'$，方程变成

$$p' = f(x, p).$$

例 2 求 $y'' = \frac{1}{x} y'$ 的通解.

练习 1 求 $xy'' + y' = 0$ 的通解.

㈢ $y'' = f(y, y')$ 型

解法　令 $p = y'$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，方程变成

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p).$$

㈢ $y'' = f(y, y')$ 型

解法　令 $p = y'$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，方程变成

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p).$$

例 3　求方程 $y'' = \frac{3}{2}y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=3} = 1$, $y'|_{x=3} = 1$ 的特解.

㈢ $y'' = f(y, y')$ 型

解法　令 $p = y'$，则 $y'' = p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，方程变成

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p).$$

例 3　求方程 $y'' = \frac{3}{2}y^2$ 满足初始条件 $y|_{x=3} = 1$，$y'|_{x=3} = 1$ 的特解.

练习 2　求 $y'' = 3\sqrt{y}$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$，$y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

第四节 一阶线性微分方程

第五节 可降阶的高阶微分方程

第六节 高阶线性微分方程

第七节 常系数齐次线性微分方程

第八节 常系数非齐次线性微分方程

二阶线性微分方程

二阶线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x).$

二阶线性微分方程

二阶线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$.

- 若 $f(x) \equiv 0$，称为二阶齐次线性微分方程
- 若 $f(x) \not\equiv 0$，称为二阶非齐次线性微分方程

研究二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0.$

研究二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$.

定理 1　如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程的两个解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)\quad (C_1,\ C_2\ \text{为任意常数})$$

也是方程的解.

研究二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$.

定理 1 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程的两个解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$$

也是方程的解.

定理 2 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程的两个线性无关的特解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})$$

就是方程的通解.

研究二阶齐次线性微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$.

定理 1 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程的两个解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \quad (C_1,\ C_2 \text{ 为任意常数})$$

也是方程的解.

定理 2 如果 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是方程的两个线性无关的特解，那么

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \quad (C_1,\ C_2 \text{ 为任意常数})$$

就是方程的通解.

例 1 求微分方程 $y''+y=0$ 的通解.

线性相关与线性无关

定义 1 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得当 $x \in I$ 时有恒等式

$$k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n \equiv 0$$

成立，则称这 n 个函数线性相关；否则称线性无关.

线性相关与线性无关

定义 1 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是定义在区间 I 上的 n 个函数，如果存在 n 个不全为零的常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得当 $x \in I$ 时有恒等式

$$k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n \equiv 0$$

成立，则称这 n 个函数线性相关；否则称线性无关.

注记 $y_1(x), y_2(x)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)}$ 恒为常数.

线性相关与线性无关

例 2　判断下列各组函数是线性相关还是线性无关：

(1) $\sin x$, $\cos x$

(2) 1, $\sin^2 x$, $\cos^2 x$

(3) 1, x, x^2

(4) $1+2x+3x^2$, $4+5x+6x^2$, $7+8x+9x^2$

定义 2　齐次线性微分方程 (1) 的解称为齐次解，而非齐次线性微分方程 (2) 的解称为非齐次解.

(1)　$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

(2)　$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

定义 2 齐次线性微分方程 (1) 的解称为齐次解，而非齐次线性微分方程 (2) 的解称为非齐次解.

(1) $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

(2) $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

定理 3 线性微分方程的解有下列性质:

1. 非齐次解 + 齐次解 = 非齐次解
2. 非齐次解 − 齐次解 = 非齐次解
3. 非齐次解 − 非齐次解 = 齐次解

(1) $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

(2) $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

(1) $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

(2) $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

定理 4 (二阶非齐次线性微分方程的解的结构)

假设 $Y(x)$ 是齐次线性方程 (1) 的通解，而 $y^*(x)$ 是非齐次线性方程 (2) 的一个特解，则

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是非齐次线性方程 (2) 的通解.

(1) $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

(2) $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

定理 4 (二阶非齐次线性微分方程的解的结构)

假设 $Y(x)$ 是齐次线性方程 (1) 的通解，而 $y^*(x)$ 是非齐次线性方程 (2) 的一个特解，则

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是非齐次线性方程 (2) 的通解．即有

$$\boxed{\text{齐次通解} + \text{非齐次特解} = \text{非齐次通解}}$$

(1) $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$$

(2) $$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$$

定理 4 (二阶非齐次线性微分方程的解的结构)

假设 $Y(x)$ 是齐次线性方程 (1) 的通解，而 $y^*(x)$ 是非齐次线性方程 (2) 的一个特解，则

$$y = Y(x) + y^*(x)$$

是非齐次线性方程 (2) 的通解．即有

$$\boxed{\text{齐次通解} + \text{非齐次特解} = \text{非齐次通解}}$$

例 3 求微分方程 $y'' + y = x^2$ 的通解.

定理 5 (叠加原理) 设 $y_1^*(x)$ 和 $y_2^*(x)$ 分别是下列两个方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x),$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解.

定理 5 (叠加原理) 设 $y_1^*(x)$ 和 $y_2^*(x)$ 分别是下列两个方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x),$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*(x) + y_2^*(x)$ 是方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的特解.

例 4 求微分方程 $y'' + y = x^2 + e^x$ 的一个特解.

复习与提高

选择　设非齐次线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程的通解为$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $C[y_1(x) - y_2(x)]$

(B) $y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$

(C) $C[y_1(x) + y_2(x)]$

(D) $y_1(x) + C[y_1(x) + y_2(x)]$

复习与提高

选择　设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性微分方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的解，C_1，C_2 为任意常数，则该方程的通解为 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $C_1y_1 + C_2y_2 + y_3$

(B) $C_1y_1 + C_2y_2 + (C_1 + C_2)y_3$

(C) $C_1y_1 + C_2y_2 - (1 - C_1 - C_2)y_3$

(D) $C_1y_1 + C_2y_2 + (1 - C_1 - C_2)y_3$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

. . . .

例 1　求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

例 1　求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

例 1　求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + y$，则 $z' + 3z = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

例 1　求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + y$，则 $z' + 3z = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{-3x}$，即 $y' + y = Ce^{-3x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

……………………………………………

例 1　求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + y$，则 $z' + 3z = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{-3x}$，即 $y' + y = Ce^{-3x}$

4 求解方程：得 $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-3x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

. . . .

例 2　求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

....

例 2　求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

....

例 2　求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + 2y$，则 $z' + 2z = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

. . . .

例 2　求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + 2y$，则 $z' + 2z = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{-2x}$，即 $y' + 2y = Ce^{-2x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

. . . .

例 2　求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + 2y$，则 $z' + 2z = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{-2x}$，即 $y' + 2y = Ce^{-2x}$

4 求解方程：得 $y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1. 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
2. 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1. 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
2. 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$
3. 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1. 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
2. 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$
3. 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$
4. 求解方程：得 $y = e^{ax}\left(\int Ce^{(b-a)x}\,dx + C'\right)$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$

4 求解方程：得 $y = \mathrm{e}^{ax}\left(\int Ce^{(b-a)x}\,\mathrm{d}x + C'\right)$

- 当 $a \neq b$ 时，$y = C_1\,\mathrm{e}^{ax} + C_2\,\mathrm{e}^{bx}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$

4 求解方程：得 $y = e^{ax}\left(\int Ce^{(b-a)x}\,dx + C'\right)$

- 当 $a \neq b$ 时，$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$
- 当 $a = b$ 时，$y = (C_1 + C_2 x)e^{ax}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$

4 求解方程：得 $y = e^{ax}\left(\int Ce^{(b-a)x}\,dx + C'\right)$

- 当 $a \neq b$ 时，$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$
- 当 $a = b$ 时，$y = (C_1 + C_2 x)e^{ax}$

问题　常数 a 和 b 是否一定存在？如何求出它？

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' - ay$，则 $z' - bz = 0$

3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$，即 $y' - ay = Ce^{bx}$

4 求解方程：得 $y = e^{ax}\left(\int Ce^{(b-a)x}\,dx + C'\right)$

- 当 $a \neq b$ 时，$y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$
- 当 $a = b$ 时，$y = (C_1 + C_2 x)e^{ax}$

问题　常数 a 和 b 是否一定存在？如何求出它？

解答　a 和 b 是方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根.

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

. . . .

设其特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根为 r_1 和 r_2.

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

设其特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根为 r_1 和 r_2.

1 若 $r_1 \neq r_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

设其特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根为 r_1 和 r_2.

1 若 $r_1 \neq r_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2 若 $r_1 = r_2 = r$ 为相同实根，则方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

研究二阶常系数齐次线性方程：$y'' + py' + qy = 0$

设其特征方程 $r^2 + pr + q = 0$ 的两个根为 r_1 和 r_2.

1 若 $r_1 \neq r_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2 若 $r_1 = r_2 = r$ 为相同实根，则方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}$$

3 若 $r_1 = \alpha + i\beta, r_2 = \alpha - i\beta$ 为共轭复根，则方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

二阶常系数齐次线性方程

例 3　求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

二阶常系数齐次线性方程

例 3　求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

例 4　求微分方程 $y'' + 2y' + y = 0$, $y|_{x=0} = 4$, $y'|_{x=0} = -2$ 的特解.

例 3　求微分方程 $y'' - 2y' - 3y = 0$ 的通解.

例 4　求微分方程 $y'' + 2y' + y = 0$, $y|_{x=0} = 4$, $y'|_{x=0} = -2$ 的特解.

例 5　求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解.

研究 n 阶常系数齐次线性方程：

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

研究 n 阶常系数齐次线性方程:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

求出对应的特征方程

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$$

的全部根,

研究 n 阶常系数齐次线性方程：

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+p_2y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=0$$

. . . .

求出对应的特征方程

$$r^n+p_1r^{n-1}+p_2r^{n-2}+\cdots+p_{n-1}r+p_n=0$$

的全部根，可以写出微分方程的通解：

- 一个 k 重实根 r 给出通解的 k 项

$$e^{rx}(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})$$

- 一对 k 重复根 $r_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ 给出通解的 $2k$ 项

$$e^{\alpha x}\big[(C_1+C_2x+\cdots+C_kx^{k-1})\cos\beta x$$

$$+(D_1+D_2x+\cdots+D_kx^{k-1})\sin\beta x\big]$$

例 6　求微分方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

n 阶常系数齐次线性方程

例 6　求微分方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

例 7　求微分方程 $y^{(4)} + y = 0$ 的通解.

n 阶常系数齐次线性方程

例 6　求微分方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

例 7　求微分方程 $y^{(4)} + y = 0$ 的通解.

例 8　求微分方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ 的通解.

n 阶常系数齐次线性方程

例 6　求微分方程 $y^{(4)} - 2y''' + 5y'' = 0$ 的通解.

例 7　求微分方程 $y^{(4)} + y = 0$ 的通解.

例 8　求微分方程 $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$ 的通解.

例 9　求微分方程 $y^{(5)} - y^{(4)} = 0$ 的通解.

复习与提高

题 1 求微分方程 $y'' + ay = 0$ 的通解.

复习与提高

题 1　求微分方程 $y'' + ay = 0$ 的通解.

题 2　求一个以 $y_1 = \mathrm{e}^x$，$y_2 = 2x\mathrm{e}^x$，$y_3 = \cos 2x$，$y_4 = 3\sin 2x$ 为特解的 4 阶常系数齐次线性微分方程，并求其通解.

第四节	一阶线性微分方程
第五节	可降阶的高阶微分方程
第六节	高阶线性微分方程
第七节	常系数齐次线性微分方程
第八节	常系数非齐次线性微分方程

研究二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

. . . .

研究二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

由第六节和第七节的结论，只需讨论求该微分方程的一个特解的方法.

研究二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

……………………………………………

由第六节和第七节的结论，只需讨论求该微分方程的一个特解的方法.

……………………………………………

1 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$ 型

2 $f(x) = e^{\lambda x} [P_l(x) \cos \omega x + Q_n(x) \sin \omega x]$ 型

问题 1　求二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的一个特解，其中 $f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} P_m(x)$，$P_m(x)$ 是 m 次多项式.

问题 1　求二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的一个特解，其中 $f(x) = e^{\lambda x}P_m(x)$，$P_m(x)$ 是 m 次多项式.

解法　设方程的一个特解为 $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$，其中 k 等于 λ 作为特征方程的根的重数．用待定系数法确定 $Q_m(x)$.

问题 1　求二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的一个特解，其中 $f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$，$P_m(x)$ 是 m 次多项式.

解法　设方程的一个特解为 $y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x}$，其中 k 等于 λ 作为特征方程的根的重数. 用待定系数法确定 $Q_m(x)$.

注记　对 n 阶常系数非齐次线性微分方程有同样解法.

例 1　求方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的一个特解.

例 1　求方程 $y'' - 2y' - 3y = 3x + 1$ 的一个特解.

例 2　求微分方程 $y'' - 5y' + 6y = xe^{2x}$ 的通解.

问题 2 求二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的一个特解，其中

$$f(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x\right],$$

$P_l(x)$ 是 l 次多项式，$Q_n(x)$ 是 n 次多项式.

问题 2　求二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的一个特解，其中

$$f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x\right],$$

$P_l(x)$ 是 l 次多项式，$Q_n(x)$ 是 n 次多项式.

解法　设方程的一个特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m(x)\cos\omega x + S_m(x)\sin\omega x\right],$$

其中 $m = \max\{l, n\}$，k 等于 $\lambda + \omega i$ 作为特征方程的根的重数．用待定系数法确定 $R_m(x)$ 和 $S_m(x)$.

问题 2　求二阶常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

的一个特解，其中

$$f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x\right],$$

$P_l(x)$ 是 l 次多项式，$Q_n(x)$ 是 n 次多项式.

解法　设方程的一个特解为

$$y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m(x)\cos\omega x + S_m(x)\sin\omega x\right],$$

其中 $m = \max\{l, n\}$，k 等于 $\lambda + \omega i$ 作为特征方程的根的重数. 用待定系数法确定 $R_m(x)$ 和 $S_m(x)$.

注记　对 n 阶常系数非齐次线性微分方程有同样解法.

例 3　求微分方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特特解.

例 3　求微分方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的一个特解.

例 4　求微分方程 $y'' - y = e^{x}\cos 2x$ 的一个特解.

复习与提高

题 1　求二阶微分方程 $y'' + 4y' + 4y = \mathrm{e}^{\alpha x}$ 的通解.

复习与提高

题 1　求二阶微分方程 $y'' + 4y' + 4y = e^{\alpha x}$ 的通解.

题 2　求二阶微分方程 $y'' - 2y' - 3y = e^{x} + 3x + 1$ 的通解.

复习与提高

选择　微分方程 $y'' + y = x^2 + 1 + \sin x$ 的特解形式可设为$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $y^* = ax^2 + bx + c + x(A\sin x + B\cos x)$

(B) $y^* = x(ax^2 + bx + c + A\sin x + B\cos x)$

(C) $y^* = ax^2 + bx + c + A\sin x$

(D) $y^* = ax^2 + bx + c + A\cos x$

复习与提高

选择 已知常系数线性微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 有特解 $y^* = e^{-x}(1 + xe^{2x})$，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$

(B) $a = 0$, $b = 1$, $c = -2$

(C) $a = 0$, $b = -1$, $c = 2$

(D) $a = 0$, $b = -1$, $c = -2$