高等数学课程

第八章 · 空间解析几何与向量代数

2020 年 2 月 12 日

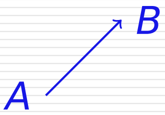
■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	向量及其线性运算
A	向量的概念
B	向量的线性运算
C	空间直角坐标系
D	利用坐标作向量的线性运算
E	向量的模、方向角、投影

向量：既有大小，又有方向的量称为向量.

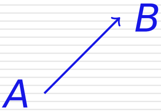
向量：既有大小，又有方向的量称为向量.

- 向量的表示：$\overrightarrow{AB}$，或 $\vec{a}$，或 $\boldsymbol{a}$



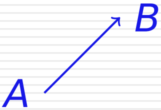
向量：既有大小，又有方向的量称为向量.

- 向量的表示：$\overrightarrow{AB}$，或 $\vec{a}$，或 $\boldsymbol{a}$
- 向量的相等：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的大小和方向都相同，称两者相等，记为 $\vec{a}=\vec{b}$



向量：既有大小，又有方向的量称为向量.

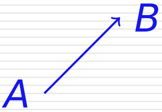
- 向量的表示：$\overrightarrow{AB}$，或 $\vec{a}$，或 $\boldsymbol{a}$
- 向量的相等：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的大小和方向都相同，称两者相等，记为 $\vec{a}=\vec{b}$



向量的模：向量的大小称为向量的模，记为 $|\overrightarrow{AB}|$，或 $|\vec{a}|$，或 $|\boldsymbol{a}|$

向量：既有大小，又有方向的量称为向量.

- 向量的表示：$\overrightarrow{AB}$，或 $\vec{a}$，或 $\boldsymbol{a}$
- 向量的相等：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的大小和方向都相同，称两者相等，记为 $\vec{a}=\vec{b}$

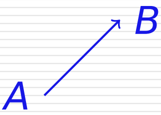


向量的模：向量的大小称为向量的模，记为 $|\overrightarrow{AB}|$，或 $|\vec{a}|$，或 $|\boldsymbol{a}|$

- 单位向量：模为 1 的向量，常记为 $\vec{e}$

向量：既有大小，又有方向的量称为向量.

- 向量的表示：$\overrightarrow{AB}$，或 $\vec{a}$，或 $\boldsymbol{a}$
- 向量的相等：若 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的大小和方向都相同，称两者相等，记为 $\vec{a} = \vec{b}$



向量的模：向量的大小称为向量的模，记为 $|\overrightarrow{AB}|$，或 $|\vec{a}|$，或 $|\boldsymbol{a}|$

- 单位向量：模为 1 的向量，常记为 $\vec{e}$
- 零向量：模为 0 的向量，记为 $\vec{0}$

平行 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，记为 $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

平行 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，记为 $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

- 规定零向量与任何向量都平行.

平行 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，记为 $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

- 规定零向量与任何向量都平行.

共线 若两个向量可平移到一条直线上，则称它们共线.

平行 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，记为 $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

- 规定零向量与任何向量都平行.

共线 若两个向量可平移到一条直线上，则称它们共线.

- 两向量平行等同于两向量共线.

平行 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的方向相同或相反，则称 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行，记为 $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

- 规定零向量与任何向量都平行.

共线 若两个向量可平移到一条直线上，则称它们共线.

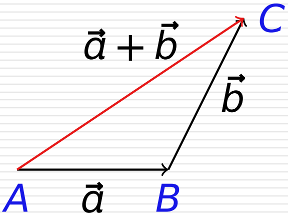
- 两向量平行等同于两向量共线.

共面 若三个或更多个向量可平移到一个平面上，则称它们共面.

第一节	向量及其线性运算
A	向量的概念
B	向量的线性运算
C	空间直角坐标系
D	利用坐标作向量的线性运算
E	向量的模、方向角、投影

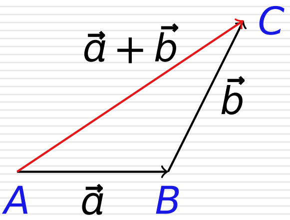
向量的加法

三角形法则：

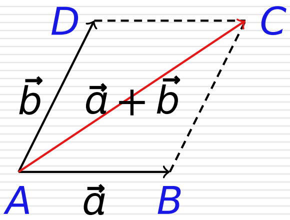


向量的加法

三角形法则：

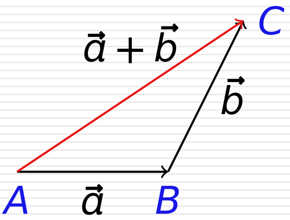


平行四边形法则：

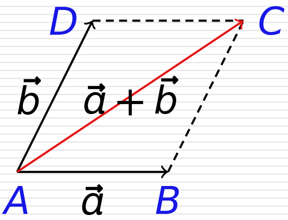


向量的加法

三角形法则：



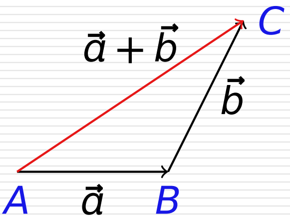
平行四边形法则：



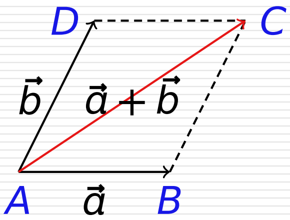
性质 1　向量的加法满足下列运算定律：

向量的加法

三角形法则：



平行四边形法则：

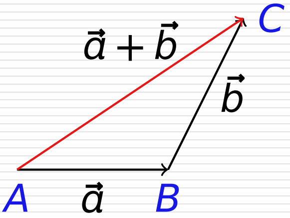


性质 1　向量的加法满足下列运算定律：

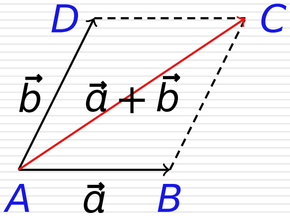
- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

向量的加法

三角形法则：



平行四边形法则：

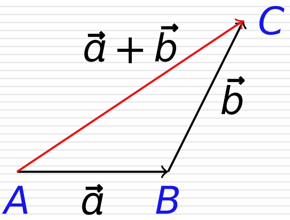


性质 1　向量的加法满足下列运算定律：

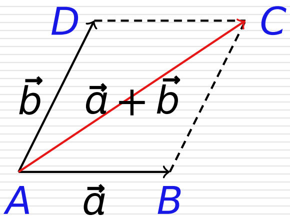
- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

向量的加法

三角形法则：



平行四边形法则：



性质 1　向量的加法满足下列运算定律：

- $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
- $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

向量的减法

与 $\vec{a}$ 大小相同而方向相反的向量，称为 $\vec{a}$ 的负向量，记为 $-\vec{a}$.

向量的减法

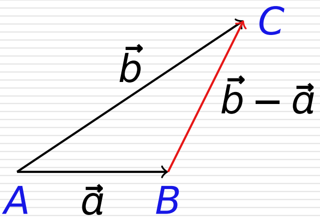
与 $\vec{a}$ 大小相同而方向相反的向量，称为 $\vec{a}$ 的负向量，记为 $-\vec{a}$.

三角形法则：$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

向量的减法

与 $\vec{a}$ 大小相同而方向相反的向量，称为 $\vec{a}$ 的负向量，记为 $-\vec{a}$.

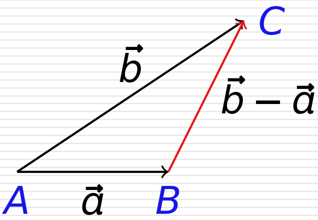
三角形法则：$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$



向量的减法

与 $\vec{a}$ 大小相同而方向相反的向量，称为 $\vec{a}$ 的负向量，记为 $-\vec{a}$.

三角形法则：$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

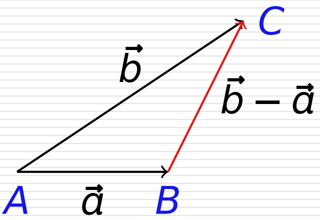


- $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$

向量的减法

与 $\vec{a}$ 大小相同而方向相反的向量，称为 $\vec{a}$ 的负向量，记为 $-\vec{a}$.

三角形法则：$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

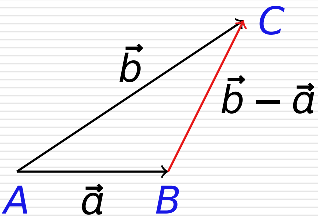


- $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$
- $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$

向量的减法

与 $\vec{a}$ 大小相同而方向相反的向量，称为 $\vec{a}$ 的负向量，记为 $-\vec{a}$.

三角形法则：$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$



- $\vec{a}-\vec{a}=\vec{0}$
- $|\vec{a}+\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$
- $|\vec{a}-\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|+|\vec{b}|$

向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$.

向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$. 规定 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$，而且

向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$．规定 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$，而且

- 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向

向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$．规定 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$，而且

- 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向
- 若 $\lambda < 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向

向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$．规定 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$，而且

- 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向
- 若 $\lambda < 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向
- 若 $\lambda = 0$，则 $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$. 规定 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$，而且

- 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向
- 若 $\lambda < 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向
- 若 $\lambda = 0$，则 $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$. 规定 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$，而且

- 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向
- 若 $\lambda < 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向
- 若 $\lambda = 0$，则 $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

性质 2　向量的数乘满足下列性质：

- $1\vec{a} = \vec{a}$,

向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$. 规定 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$，而且

- 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向
- 若 $\lambda < 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向
- 若 $\lambda = 0$，则 $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

性质 2　向量的数乘满足下列性质：

- $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$

向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$．规定 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$，而且

- 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向
- 若 $\lambda < 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向
- 若 $\lambda = 0$，则 $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

性质 2　向量的数乘满足下列性质：

- $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$
- $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a})$

向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$. 规定 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$，而且

- 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向
- 若 $\lambda < 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向
- 若 $\lambda = 0$，则 $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

性质 2　向量的数乘满足下列性质：

- $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$
- $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a})$
- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$,

向量的数乘

数 λ 与向量 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记为 $\lambda\vec{a}$．规定 $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$，而且

- 若 $\lambda > 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向
- 若 $\lambda < 0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向
- 若 $\lambda = 0$，则 $\lambda\vec{a} = \vec{0}$

性质 2　向量的数乘满足下列性质：

- $1\vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$
- $\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a} = \mu(\lambda\vec{a})$
- $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$, $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$

例 1 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 为单位向量.

例 1　设 $\vec{a}$ 为非零向量，则 $\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ 为单位向量.

例 2　设 M 为平行四边形 $ABCD$ 对角线的交点，$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$，$\overrightarrow{AD} = \vec{b}$，试用 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$、$\overrightarrow{MD}$.

定理 1 设 $\vec{a}$ 为非零向量，则有

$$\vec{b} \parallel \vec{a} \Longleftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}$$

其中实数 λ 是唯一的.

第一节	向量及其线性运算
A	向量的概念
B	向量的线性运算
C	空间直角坐标系
D	利用坐标作向量的线性运算
E	向量的模、方向角、投影

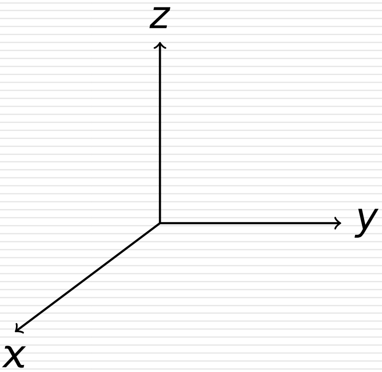
空间直角坐标系

空间直角坐标系

- 三个坐标轴

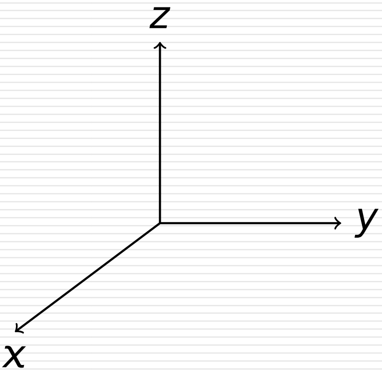
空间直角坐标系

- 三个坐标轴



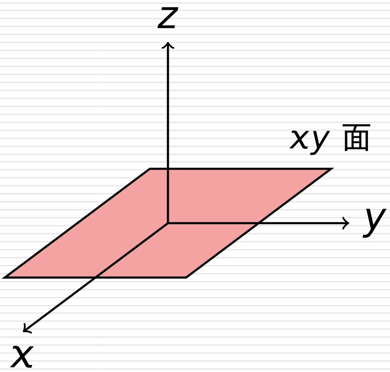
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面



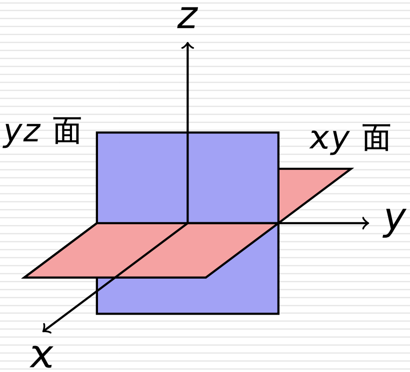
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面



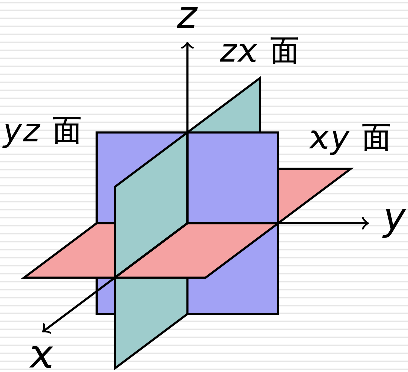
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面



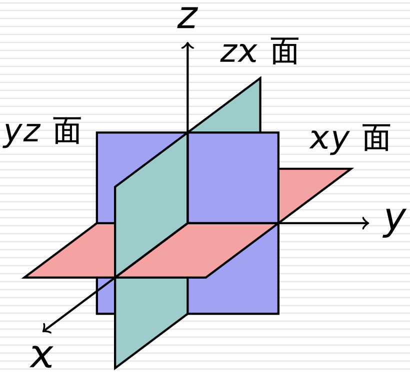
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面



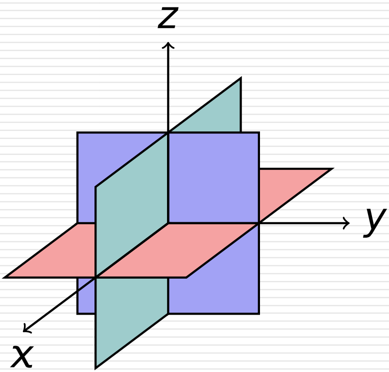
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



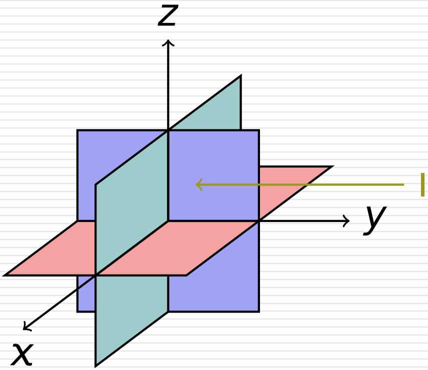
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



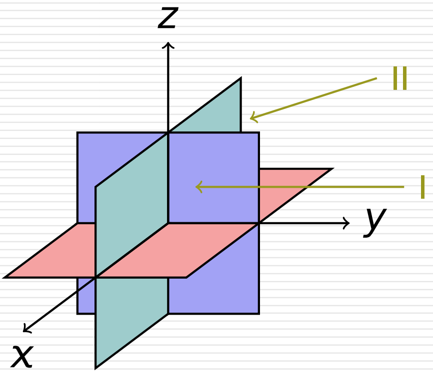
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



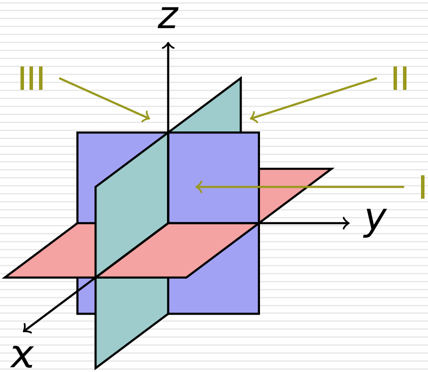
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



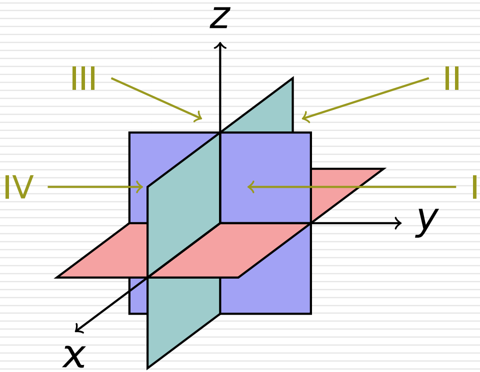
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



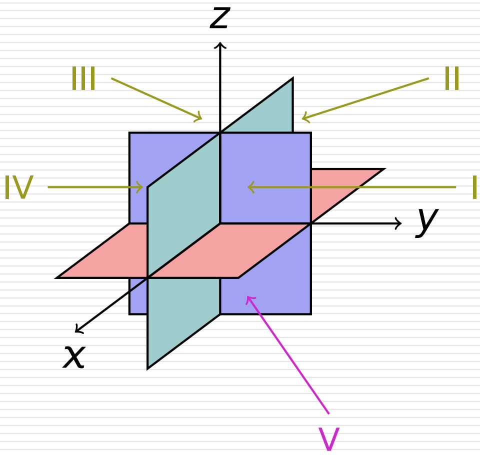
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



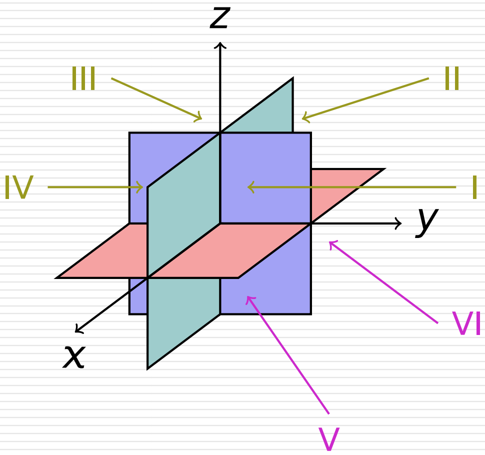
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



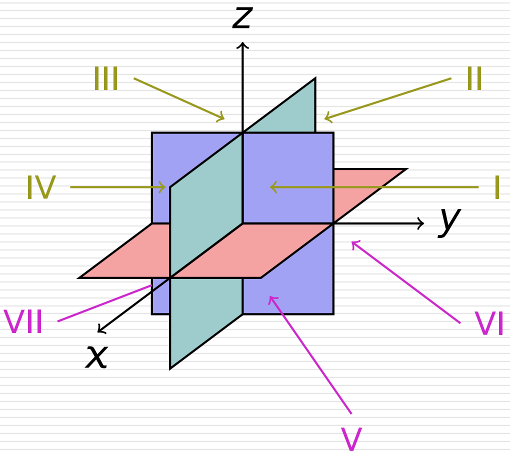
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



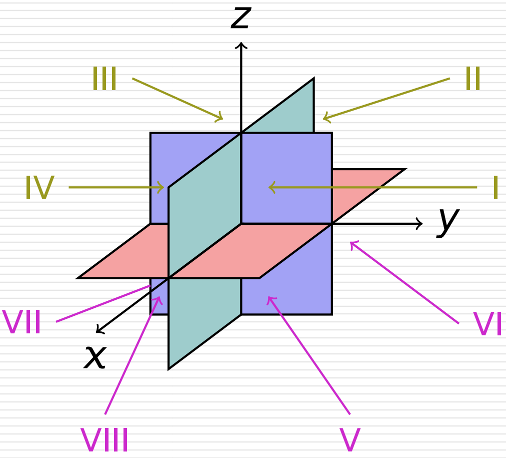
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



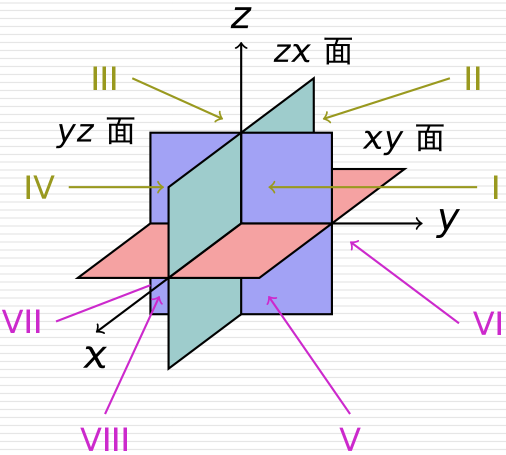
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



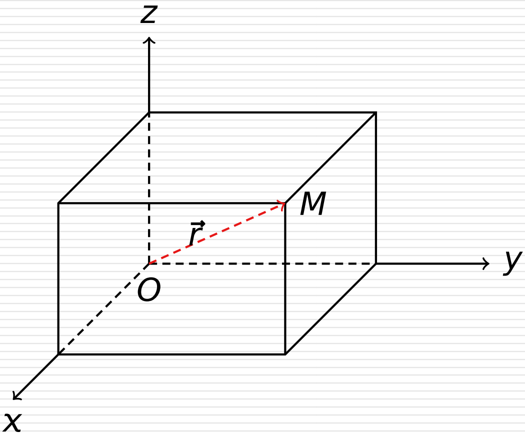
空间直角坐标系

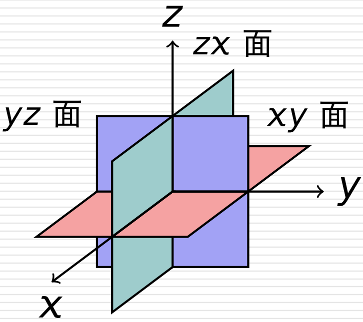
- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



在空间直角坐标系中，我们有

$$\text{点 } M \longleftrightarrow \text{坐标 } (x,y,z) \longleftrightarrow \text{向量 } \vec{r} = \overrightarrow{OM}$$



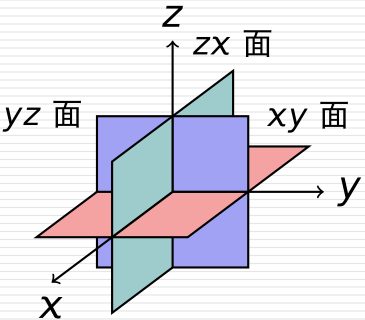


坐标面上的点:

$$xy\text{ 面} \longleftrightarrow z = 0$$

$$yz\text{ 面} \longleftrightarrow x = 0$$

$$zx\text{ 面} \longleftrightarrow y = 0$$



坐标面上的点：

$$xy\text{ 面} \leftrightarrow z = 0$$

$$yz\text{ 面} \leftrightarrow x = 0$$

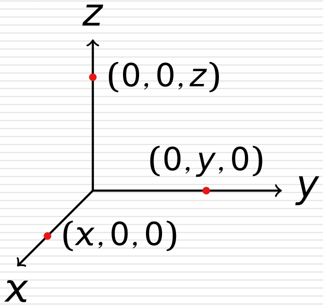
$$zx\text{ 面} \leftrightarrow y = 0$$

坐标轴上的点：

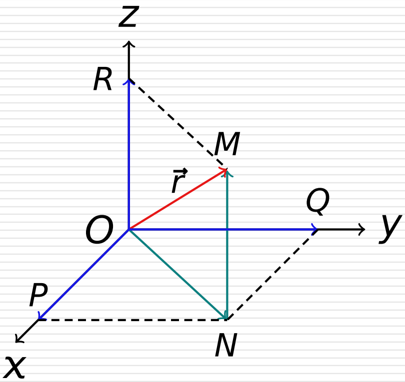
$$x\text{ 轴} \leftrightarrow y = z = 0$$

$$y\text{ 轴} \leftrightarrow z = x = 0$$

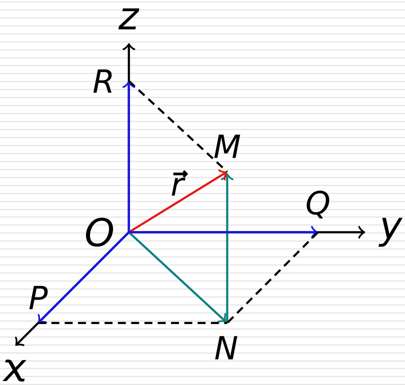
$$z\text{ 轴} \leftrightarrow x = y = 0$$



向量的坐标分解

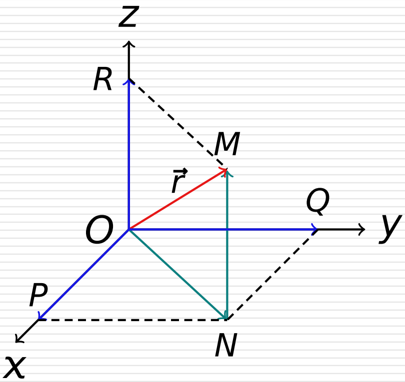


向量的坐标分解



- x 轴上单位向量 $\vec{i}$
- y 轴上单位向量 $\vec{j}$
- z 轴上单位向量 $\vec{k}$

向量的坐标分解



- x 轴上单位向量 $\vec{i}$
- y 轴上单位向量 $\vec{j}$
- z 轴上单位向量 $\vec{k}$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OR}$$

$$= \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

向量的坐标运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，λ 为实数.

向量的坐标运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，λ 为实数．由向量的坐标分解可得

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

向量的坐标运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，λ 为实数．由向量的坐标分解可得

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

向量的坐标运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，λ 为实数．由向量的坐标分解可得

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时，$\vec{b}\parallel\vec{a}\Leftrightarrow\vec{b}=\lambda\vec{a}\Leftrightarrow\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}$

向量的坐标运算

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，λ 为实数．由向量的坐标分解可得

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$$

$$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$$

当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时，$\vec{b}\parallel\vec{a}\Leftrightarrow\vec{b}=\lambda\vec{a}\Leftrightarrow\dfrac{b_x}{a_x}=\dfrac{b_y}{a_y}=\dfrac{b_z}{a_z}$

平行向量对应坐标成比例

向量的坐标运算

例 3　求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x} - 3\vec{y} = \vec{a} & (1) \\ 3\vec{x} - 2\vec{y} = \vec{b} & (2) \end{cases}$$

其中 $\vec{a} = (2, 1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 1, -2)$.

例 4　已知两点 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$，在直线 AB 上求点 M，使得 $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{MB}$.

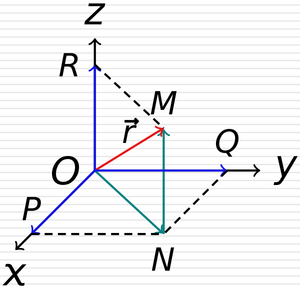
向量的坐标运算

例 4　已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$ 以及实数 $\lambda \neq -1$，在直线 AB 上求点 M，使得 $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$.

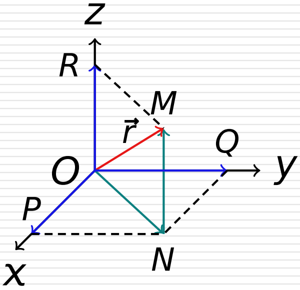
注记　点 M 的坐标等于向量 $\overrightarrow{OM}$ 的坐标.

第一节	向量及其线性运算
A	向量的概念
B	向量的线性运算
C	空间直角坐标系
D	利用坐标作向量的线性运算
E	向量的模、方向角、投影

向量的模・两点距离

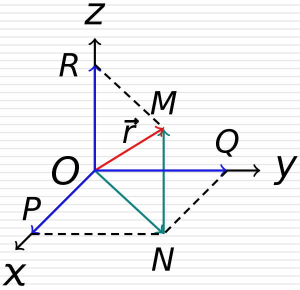


向量的模 · 两点距离



$$\vec{r}=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$
$$=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=(x,y,z)$$

向量的模 · 两点距离

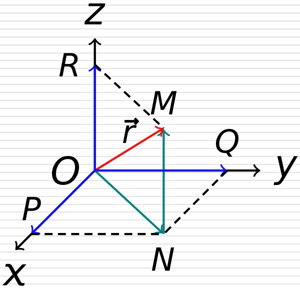


$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

$$\therefore \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

向量的模 · 两点距离



$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR}$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z)$$

$$\therefore \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

设 $A(x_1, y_1, z_1)$，$B(x_2, y_2, z_2)$，则有

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

例 5　求证以 $M_1(4,3,1)$，$M_2(7,1,2)$，$M_3(5,2,3)$ 为顶点的三角形是等腰三角形.

例 6　在 z 轴上求与两点 $A(-4,1,7)$ 和 $B(3,5,-2)$ 等距离的点.

例 7　已知两点 $A(4,0,5)$ 和 $B(7,1,3)$，求与 $\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量 $\vec{e}$.

向量的夹角

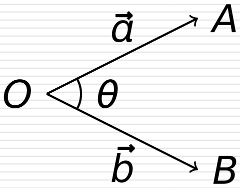
设有非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$,

向量的夹角

设有非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，任取空间中一点 O，作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

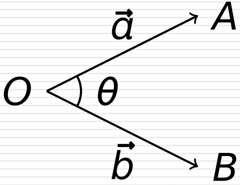
向量的夹角

设有非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，任取空间中一点 O，作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



向量的夹角

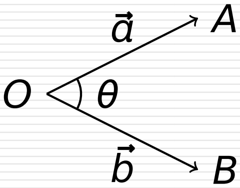
设有非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，任取空间中一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.



称 $\angle AOB=\theta$（$0\leqslant\theta\leqslant\pi$）为向量的 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角，

向量的夹角

设有非零向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$，任取空间中一点 O，作 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$，$\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.



称 $\angle AOB = \theta$（$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$）为向量的 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角，记为 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$.

方向角和方向余弦

给定 $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$，称 $\vec{r}$ 与三个坐标轴的夹角 α，β，γ 为方向角.

方向角和方向余弦

给定 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$，称 $\vec{r}$ 与三个坐标轴的夹角 α，β，γ 为方向角．方向角的余弦称为方向余弦.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

方向余弦

方向余弦满足下面性质：

方向余弦

方向余弦满足下面性质：

- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

方向余弦

方向余弦满足下面性质：

- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
- $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \vec{e}_{\vec{r}}$

例 8　已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$，$M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

例 9　设点 A 位于第 I 卦限，向量 $\overrightarrow{OA}$ 与 x 轴、y 轴的夹角依次为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，且 $|\overrightarrow{OA}| = 6$，求点 A 的坐标.

向量的投影

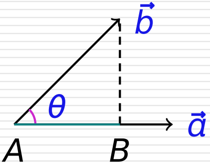
若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$，记 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\vec{b}| \cos\theta$$

向量的投影

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$，记 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为

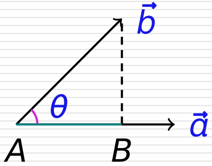
$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\vec{b}| \cos\theta$$



向量的投影

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$，记 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\, \vec{b} = |\vec{b}| \cos\theta$$

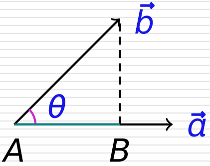


同理，若 $\vec{b} \neq \vec{0}$，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\, \vec{a}$

向量的投影

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$，记 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\cos\theta$$

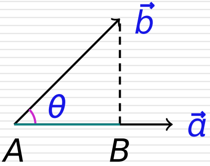


同理，若 $\vec{b} \neq \vec{0}$，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta$.

向量的投影

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\angle(\vec{a},\vec{b}) = \theta$，记 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\cos\theta$$



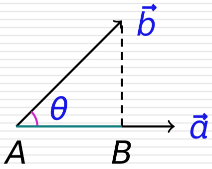
同理，若 $\vec{b} \neq \vec{0}$，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta$.

性质 3　向量投影有线性运算：

向量的投影

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \theta$，记 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\cos\theta$$



同理，若 $\vec{b} \neq \vec{0}$，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta$.

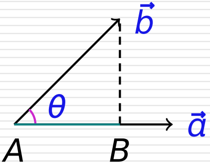
性质 3　向量投影有线性运算：

1 $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}$

向量的投影

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\angle(\vec{a},\vec{b}) = \theta$，记 $\vec{b}$ 在 $\vec{a}$ 上的投影为

$$\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b} = |\vec{b}|\cos\theta$$



同理，若 $\vec{b} \neq \vec{0}$，$\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta$.

性质 3　向量投影有线性运算：

1. $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}$
2. $\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a} + \mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}$

例 10 设正方体的一条对角线为 OM，一条棱为 OA，且 $|OA| = a$. 求 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OM}$ 方向上的投影 $\mathrm{Prj}_{\overrightarrow{OM}}\overrightarrow{OA}$.

复习与提高

题 1　设三角形 $\triangle ABC$ 的三边 $\overrightarrow{BC}=\vec{a}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$，三边中点依次为 D, E, F．证明

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}.$$

复习与提高

选择　下列哪组角可作为空间向量的方向角 · · · (　　)

(A) $30°, 45°, 60°$　　(B) $45°, 60°, 90°$

(C) $60°, 90°, 120°$　　(D) $45°, 90°, 135°$

第一节	向量及其线性运算
第二节	数量积与向量积
第三节	平面及其方程
第四节	空间直线及其方程
第五节	曲面及其方程
第六节	空间曲线及其方程

第二节	数量积与向量积
A	两向量的数量积
B	两向量的向量积

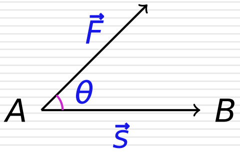
两向量的数量积

例 1　设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下，沿与力夹角为 θ 的直线移动，位移为 $\vec{s}$. 则力 $\vec{F}$ 所做的功为

两向量的数量积

例 1　设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下，沿与力夹角为 θ 的直线移动，位移为 $\vec{s}$．则力 $\vec{F}$ 所做的功为

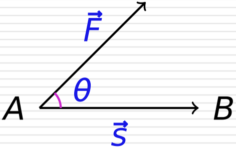
$$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\theta$$



两向量的数量积

例 1　设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下，沿与力夹角为 θ 的直线移动，位移为 $\vec{s}$. 则力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\theta$$



定义 1　设向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，称

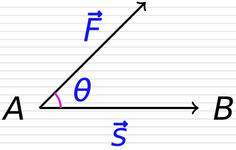
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**数量积**（点乘）.

两向量的数量积

例 1　设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下，沿与力夹角为 θ 的直线移动，位移为 $\vec{s}$. 则力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W = |\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\theta = \vec{F}\cdot\vec{s}$$



定义 1　设向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，称

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积（点乘）.

数量积与投影

数量积与投影的关系如下：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$$

数量积与投影

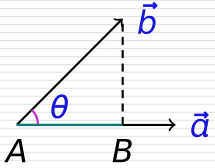
数量积与投影的关系如下：

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$

数量积与投影

数量积与投影的关系如下：

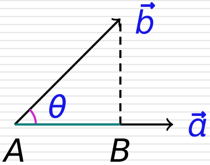
$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}$$



数量积与投影

数量积与投影的关系如下：

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta=|\vec{a}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\,\vec{b}$$



同理，我们有 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{b}|\,|\vec{a}|\cos\theta=|\vec{b}|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}$.

数量积的性质

性质 1　规定零向量和任何向量都垂直，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

数量积的性质

性质 1　规定零向量和任何向量都垂直，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

性质 2　向量的数量积符合下列运算定律：

数量积的性质

性质 1　规定零向量和任何向量都垂直，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

性质 2　向量的数量积符合下列运算定律：

1 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

数量积的性质

性质 1　规定零向量和任何向量都垂直，则有

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

性质 2　向量的数量积符合下列运算定律：

1 $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

2 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

数量积的性质

性质 1　规定零向量和任何向量都垂直，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

性质 2　向量的数量积符合下列运算定律：

1 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$

2 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

3 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

数量积的性质

性质1　规定零向量和任何向量都垂直，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

性质2　向量的数量积符合下列运算定律：

1. $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$
2. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
3. $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
4. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

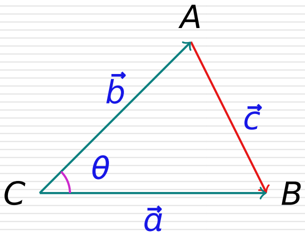
例 2　试用向量证明三角形的余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

例 2　试用向量证明三角形的余弦定理

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

解答　设 $\overrightarrow{CB} = \vec{a},\ \overrightarrow{CA} = \vec{b},\ \overrightarrow{AB} = \vec{c}.$



数量积的坐标表示

设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$，$\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$，

数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

对于非零向量，由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$，

数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

对于非零向量，由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$，得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

对于非零向量，由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$，得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\qquad}$$

数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

对于非零向量，由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$，得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

对于非零向量，由 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$，得

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

此式即为两向量的夹角公式.

例 3　已知三个点 $M(1,1,1)$, $A(2,2,1)$ 和 $B(2,1,2)$, 求 $\angle AMB$.

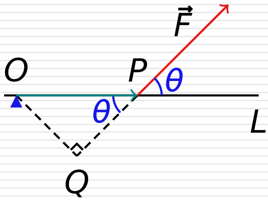
第二节	数量积与向量积
A	两向量的数量积
B	两向量的向量积

力矩问题

例 4　设 O 为杠杆 L 的支点，有一个与杠杆夹角为 θ 的力 $\vec{F}$ 作用在杠杆的 P 点上.

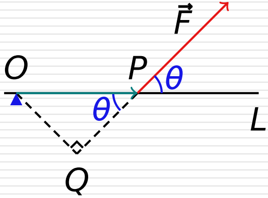
力矩问题

例 4　设 O 为杠杆 L 的支点，有一个与杠杆夹角为 θ 的力 $\vec{F}$ 作用在杠杆的 P 点上．则力 $\vec{F}$ 作用在杠杆上的力矩 $\vec{M}$ 是一个向量：



力矩问题

例 4　设 O 为杠杆 L 的支点，有一个与杠杆夹角为 θ 的力 $\vec{F}$ 作用在杠杆的 P 点上．则力 $\vec{F}$ 作用在杠杆上的力矩 $\vec{M}$ 是一个向量：



- $|\vec{M}| = |OQ|\,|\vec{F}| = |\overrightarrow{OP}|\,|\vec{F}|\sin\theta$
- $\vec{M}\perp\overrightarrow{OP}$，$\vec{M}\perp\vec{F}$，$\overrightarrow{OP}$、$\vec{F}$、$\vec{M}$ 符合右手定则

两向量的向量积

定义 2　设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，定义向量 $\vec{c}$

两向量的向量积

定义 2　设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，定义向量 $\vec{c}$

大小：$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$

两向量的向量积

定义 2　设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，定义向量 $\vec{c}$

大小：$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$

方向：$\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ 且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手定则

两向量的向量积

定义 2　设 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ，定义向量 $\vec{c}$

大小：$|\vec{c}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$

方向：$\vec{c}\perp\vec{a}, \vec{c}\perp\vec{b}$ 且 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 符合右手定则

称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积（叉乘），记为

$$\vec{a}\times\vec{b} = \vec{c}$$

弗莱明右手定则

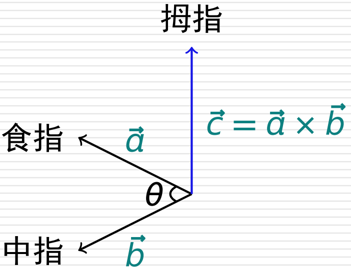
右手定则是一个在数学及物理学上使用的定则，

弗莱明右手定则

右手定则是一个在数学及物理学上使用的定则，由英国物理学家约翰 · 弗莱明于 19 世纪末发明.

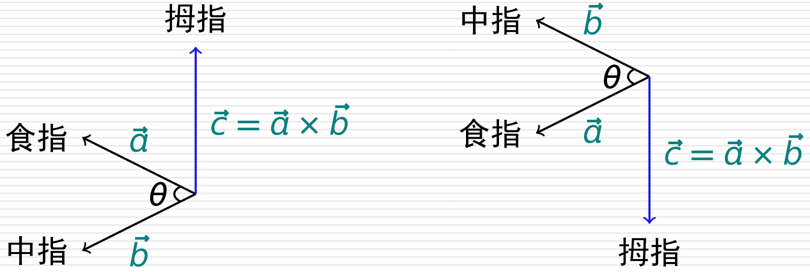
弗莱明右手定则

右手定则是一个在数学及物理学上使用的定则，由英国物理学家约翰 · 弗莱明于 19 世纪末发明.



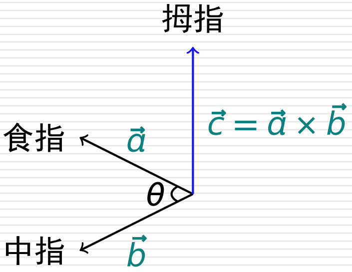
弗莱明右手定则

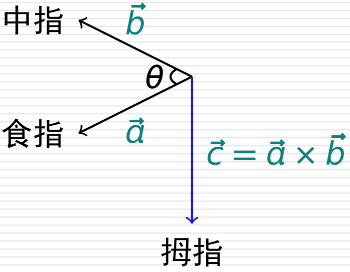
右手定则是一个在数学及物理学上使用的定则，由英国物理学家约翰・弗莱明于 19 世纪末发明.



弗莱明右手定则

右手定则是一个在数学及物理学上使用的定则，由英国物理学家约翰 · 弗莱明于 19 世纪末发明.





$[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]$ 符合右手定则 $\longleftrightarrow$ [食指，中指，拇指]

向量积的性质

性质 3　规定零向量和任何向量都平行，则有

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

向量积的性质

性质 3　规定零向量和任何向量都平行，则有

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a} \parallel \vec{b}$$

性质 4　向量的向量积符合下列运算定律：

向量积的性质

性质 3　规定零向量和任何向量都平行，则有

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

性质 4　向量的向量积符合下列运算定律：

1 $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

向量积的性质

性质 3　规定零向量和任何向量都平行，则有

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Longleftrightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$$

性质 4　向量的向量积符合下列运算定律：

1 $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

2 $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$

向量积的性质

性质 3　规定零向量和任何向量都平行，则有

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

性质 4　向量的向量积符合下列运算定律：

1. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$
2. $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

向量积的性质

性质 3　规定零向量和任何向量都平行，则有

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

性质 4　向量的向量积符合下列运算定律：

1 $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

2 $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

3 $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

4 $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

向量积的坐标表示

设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$,

向量积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x\right)$$

向量积的坐标表示

设 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则有

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

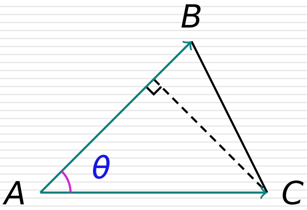
$$=\left(a_yb_z-a_zb_y,a_zb_x-a_xb_z,a_xb_y-a_yb_x\right)$$

其中二阶行列式的定义为 $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}=ad-bc.$

例 5　已知 $\triangle ABC$ 的顶点为 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

例 5　已知 ΔABC 的顶点为 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$ 和 $C(2,4,7)$，求 ΔABC 的面积.

解答　$S = \frac{1}{2}|AB|\,|AC|\sin\theta = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$



复习与提高

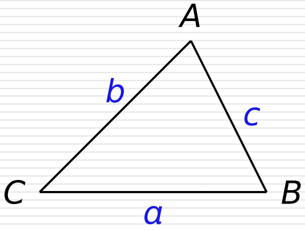
题 1 已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta = \frac{3\pi}{4}$，且 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$，$|\vec{b}| = 3$，求 $|\vec{a} - \vec{b}|$.

题 1　已知向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角 $\theta = \frac{3\pi}{4}$，且 $|\vec{a}| = \sqrt{2}$，$|\vec{b}| = 3$，求 $|\vec{a} - \vec{b}|$. .... $\sqrt{17}$

复习与提高

题 2　证明三角形的正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$



复习与提高

题 3 在顶点为 $A(1,-1,2)$, $B(1,1,0)$, $C(1,3,-1)$ 的三角形中, 求 AC 边上的高 BD 的长度.

题 3 在顶点为 $A(1,-1,2)$, $B(1,1,0)$, $C(1,3,-1)$ 的三角形中, 求 AC 边上的高 BD 的长度. $\cdots\cdots\cdots\frac{2}{5}$

复习与提高

选择　下列关系式错误的是 ……………… (　　)

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$　　(B) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(C) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　　(D) $\vec{a}\times\vec{a}=0$

复习与提高

选择　设 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 是非零向量，且满足 $|\vec{a}+\vec{b}| = |\vec{a}-\vec{b}|$，则必有 …………………………………（　　）

(A) $\vec{a} - \vec{b} = \vec{0}$　　(B) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

(C) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$　　(D) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

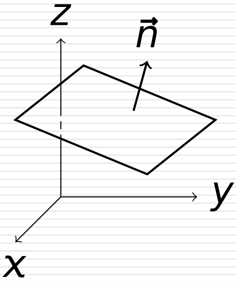
第三节	平面及其方程
A	平面的点法式方程
B	平面的一般方程
C	两平面的夹角

平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$，求该平面 Π 的方程.

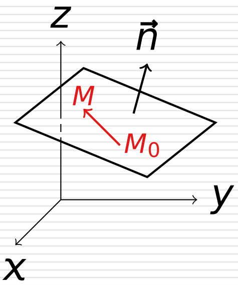
平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n}=(A,B,C)$，求该平面 Π 的方程.



平面的点法式方程

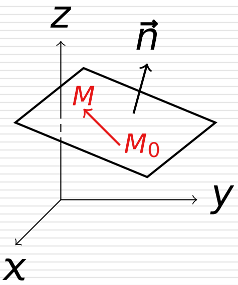
设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$，求该平面 Π 的方程.



平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$，求该平面 Π 的方程.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

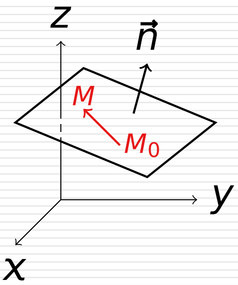


平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$，求该平面 Π 的方程.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

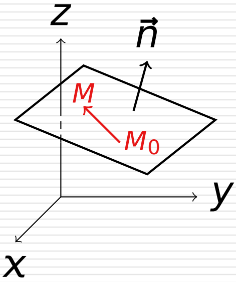
■ 称它为平面的点法式方程,



平面的点法式方程

设一平面通过已知点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n}=(A,B,C)$，求该平面 Π 的方程.

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$



- 称它为平面的点法式方程，
- 称 $\vec{n}$ 为平面的法向量.

例 1　求过点 $(2,-3,0)$ 且以 $\vec{n}=(1,-2,3)$ 为法向量的平面的方程.

例 1　求过点 $(2,-3,0)$ 且以 $\vec{n}=(1,-2,3)$ 为法向量的平面的方程.

例 2　已知三个点坐标 $M_1(2,-1,4)$, $M_2(-1,3,-2)$ 和 $M_3(0,2,3)$，求过这三个点的平面的方程.

第三节	平面及其方程
A	平面的点法式方程
B	平面的一般方程
C	两平面的夹角

平面的一般方程

平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

等价于平面的一般方程

$$Ax+By+Cz+D=0$$

平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0.$

平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0.$

- $D = 0$ 表示平面过原点

平面的一般方程为 $Ax+By+Cz+D=0.$

- $D=0$ 表示平面过原点
- $A=0$ 表示平面平行于 x 轴

平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0.$

- $D = 0$ 表示平面过原点
- $A = 0$ 表示平面平行于 x 轴
- $B = 0$ 表示平面平行于 y 轴

平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$.

- $D = 0$ 表示平面过原点
  - $A = 0$ 表示平面平行于 x 轴
  - $B = 0$ 表示平面平行于 y 轴
  - $C = 0$ 表示平面平行于 z 轴

平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$.

- $D = 0$ 表示平面过原点
- $A = 0$ 表示平面平行于 x 轴
- $B = 0$ 表示平面平行于 y 轴
- $C = 0$ 表示平面平行于 z 轴
- $A = B = 0$ 表示平面平行于 xy 面

平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0.$

- $D = 0$ 表示平面过原点
  - $A = 0$ 表示平面平行于 x 轴
  - $B = 0$ 表示平面平行于 y 轴
  - $C = 0$ 表示平面平行于 z 轴
- $A = B = 0$ 表示平面平行于 xy 面
- $A = C = 0$ 表示平面平行于 xz 面

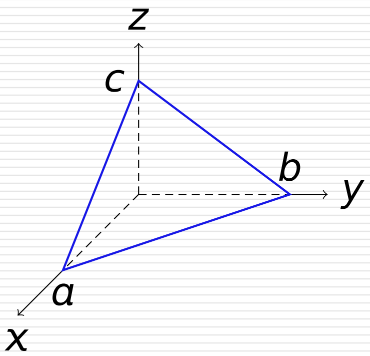
平面的一般方程为 $Ax + By + Cz + D = 0$.

- $D = 0$ 表示平面过原点
- $A = 0$ 表示平面平行于 x 轴
- $B = 0$ 表示平面平行于 y 轴
- $C = 0$ 表示平面平行于 z 轴
- $A = B = 0$ 表示平面平行于 xy 面
- $A = C = 0$ 表示平面平行于 xz 面
- $B = C = 0$ 表示平面平行于 yz 面

例 3　求通过 x 轴和点 $(4,-3,-1)$ 的平面的方程.

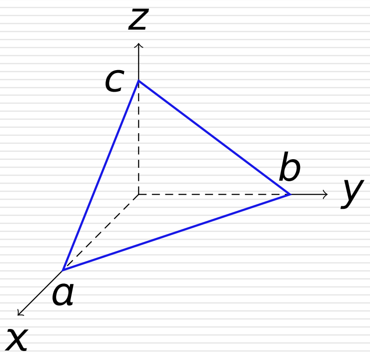
例 4　设一平面与三个坐标轴的交点分别为 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$．求该平面的方程.

例 4　设一平面与三个坐标轴的交点分别为 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$. 求该平面的方程.



例 4　设一平面与三个坐标轴的交点分别为 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$．求该平面的方程.

平面方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

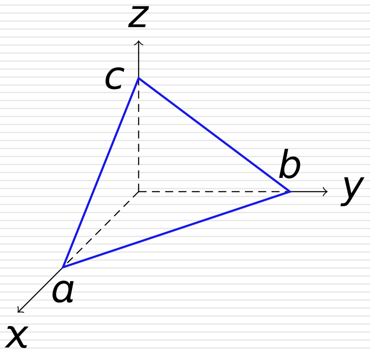


例 4　设一平面与三个坐标轴的交点分别为 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$．求该平面的方程.

平面方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

这称为平面的截距式方程.

其中 a，b，c 称为截距.



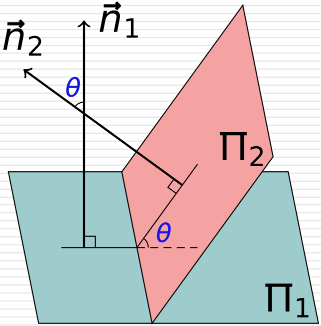
第三节	平面及其方程
A	平面的点法式方程
B	平面的一般方程
C	两平面的夹角

两平面的夹角

设平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$，则两平面的夹角 θ（$0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$）的余弦为

两平面的夹角

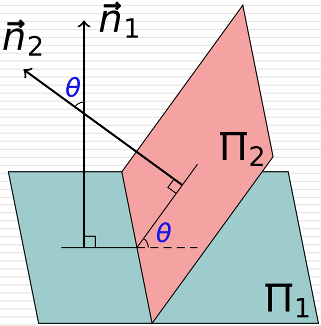
设平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$，则两平面的夹角 θ（$0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$）的余弦为



两平面的夹角

设平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$，则两平面的夹角 θ（$0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$）的余弦为

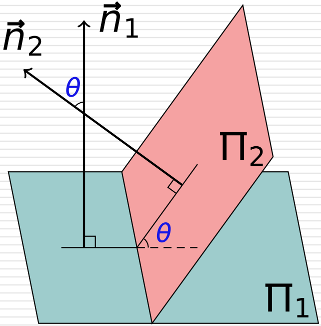
$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$



两平面的夹角

设平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$，则两平面的夹角 θ（$0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$）的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

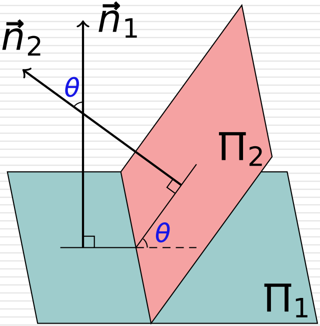


若 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$，$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$，

两平面的夹角

设平面 Π_1 和 Π_2 的法向量分别为 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$，则两平面的夹角 θ（$0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$）的余弦为

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$



若 $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$，$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$，则有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

两平面的夹角

$$\Pi_1: \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

$$\Pi_2: \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

两平面的夹角

$$\Pi_1: \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

$$\Pi_2: \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

$$\Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

两平面的夹角

$$\Pi_1: \quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

$$\Pi_2: \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

$$\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

$$\Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

$$\Pi_1 \parallel \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

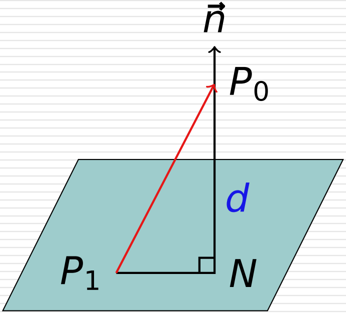
例 5　求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

例 5　求两平面 $x-y+2z-6=0$ 和 $2x+y+z-5=0$ 的夹角.

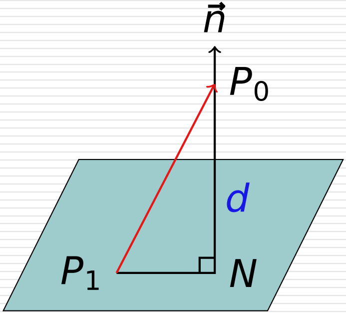
例 6　一平面通过两点 $M_1(1,1,1)$ 和 $M_2(0,1,-1)$ 且垂直于平面 $x+y+z=0$，求它的方程.

例 7 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 外一点，求 P_0 到该平面的距离.

例 7 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求 P_0 到该平面的距离.



例 7 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点，求 P_0 到该平面的距离.



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

复习与提高

选择 平面 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 与平面 $2x+3y-4z=1$ 的位置关系是……………………………( )

(A) 相交但不垂直　　(B) 互相垂直

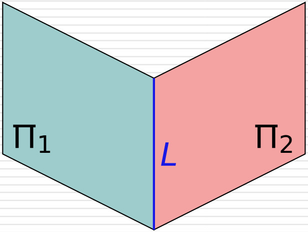
(C) 平行但不重合　　(D) 互相重合

第四节	空间直线及其方程
A	空间直线的方程
B	两直线的夹角
C	直线与平面的夹角

1. 直线的一般式方程

空间直线可视为两平面的交线，其一般式方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$



2. 直线的对称式方程

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和其方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$，则它的方程为

2. 直线的对称式方程

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和其方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$，则它的方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

2. 直线的对称式方程

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和其方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$，则它的方程为

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

此式称为直线的对称式方程或点向式方程.

3. 直线的参数式方程

在对称式方程中令

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_o}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

3. 直线的参数式方程

在对称式方程中令

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_o}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

得到直线的参数式方程:

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

例 1　用对称式方程及参数式方程表示直线

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

第四节	空间直线及其方程
A	空间直线的方程
B	两直线的夹角
C	直线与平面的夹角

两直线的夹角

两直线的夹角，是指两者的方向向量的夹角（取锐角或直角）.

两直线的夹角

两直线的夹角，是指两者的方向向量的夹角（取锐角或直角）.

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2),$$

两直线的夹角

两直线的夹角，是指两者的方向向量的夹角（取锐角或直角）.

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1), \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2),$$

则有

$$\cos\theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|} =$$

两直线的夹角

两直线的夹角，是指两者的方向向量的夹角（取锐角或直角）.

设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1),\quad \vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2),$$

则有

$$\cos\theta=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|}=\frac{\left|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\,\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

两直线的夹角

$$L_1: \quad \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$$

$$L_2: \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$$

两直线的夹角

$L_1: \quad \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$

$L_2: \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$$

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$$

$$\Longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

两直线的夹角

$L_1:\quad \vec{s}_1=(m_1,n_1,p_1)$

$L_2:\quad \vec{s}_2=(m_2,n_2,p_2)$

$$\cos\theta=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}$$

$$L_1\perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1\perp\vec{s}_2$$

$$\Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

$$L_1 \parallel L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$$

$$\Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

两直线的夹角

$L_1: \quad \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$

$L_2: \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$

$$\cos\theta = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}$$

$$L_1 \perp L_2 \iff \vec{s}_1 \perp \vec{s}_2$$

$$\iff m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

$$L_1 \parallel L_2 \iff \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$$

$$\iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

注记　在空间中，两条直线垂直时未必相交.

例 2　求直线 L_1 和 L_2 的夹角.

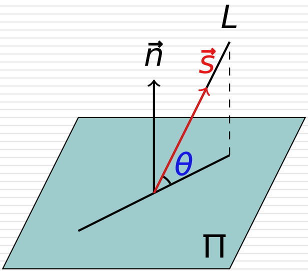
$$L_1: \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{1}$$

$$L_2: \quad \frac{x}{2} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z}{-1}$$

第四节	空间直线及其方程
A	空间直线的方程
B	两直线的夹角
C	直线与平面的夹角

直线与平面的夹角

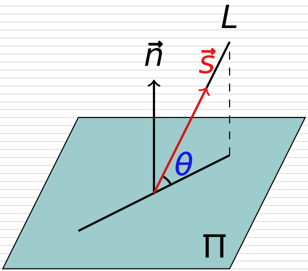
当直线和平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线所夹锐角θ，称为直线和平面的夹角.



直线与平面的夹角

当直线和平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线所夹锐角θ，称为直线和平面的夹角.

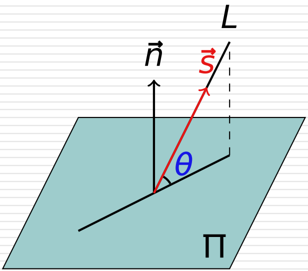
$$\sin\theta = \cos(\angle(\vec{s},\vec{n}))$$



直线与平面的夹角

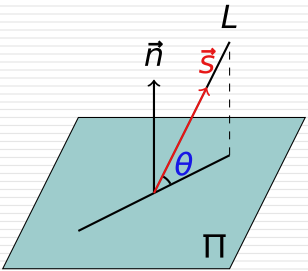
当直线和平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线所夹锐角θ，称为直线和平面的夹角.

$$\sin\theta = \cos(\angle(\vec{s},\vec{n})) = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$$



直线与平面的夹角

当直线和平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线所夹锐角 θ，称为直线和平面的夹角.



$$\sin\theta = \cos(\angle(\vec{s},\vec{n})) = \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$$

当直线和平面垂直时，规定它们的夹角为 $\frac{\pi}{2}$.

直线与平面的夹角

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$，平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，

直线与平面的夹角

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$，平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，则两者夹角满足

$$\sin\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$$

直线与平面的夹角

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$，平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，则两者夹角满足

$$\sin\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

直线与平面的夹角

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$，平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，则两者夹角满足

$$\sin\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$L\perp\Pi \Longleftrightarrow \vec{s}\parallel\vec{n} \quad\Longleftrightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

直线与平面的夹角

设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$，平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$，则两者夹角满足

$$\sin\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

$$L\perp\Pi\iff\vec{s}\parallel\vec{n}\iff\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$$

$$L\parallel\Pi\iff\vec{s}\perp\vec{n}\iff Am+Bn+Cp=0$$

例 3　求过点 $(1,-2,4)$ 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线的方程.

例 4　求与两平面 $x-4z=3$ 和 $2x-y-5z=1$ 的交线平行，且过点 $(-3,2,5)$ 的直线的方程.

例 5　求直线 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$ 与平面 $2x+y+z-6=0$ 的交点.

例 6 求过点 $(2,1,3)$ 且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$ 垂直相交的直线的方程.

平面束的方程

过直线

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

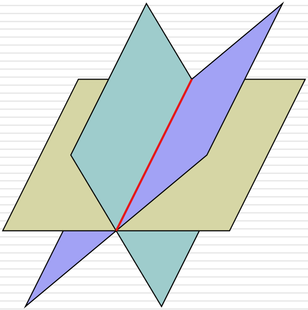
的平面束的方程为

平面束的方程

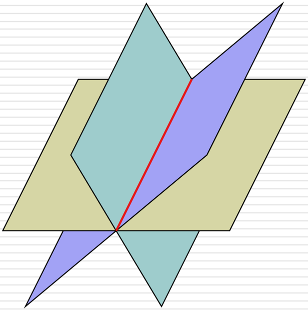
过直线

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

的平面束的方程为



平面束的方程



过直线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的平面束的方程为

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中 λ_1, λ_2 不全为零.

平面束的方程

在平面束方程（λ_1, λ_2 不全为零）

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

中通常固定 $\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = \lambda$，得到简化写法

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

平面束的方程

在平面束方程（λ_1, λ_2 不全为零）

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1) \\ +\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

中通常固定 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda$，得到简化写法

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1 \\ +\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

注记　简化写法缺少平面 $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

例 7 求直线 $\begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{cases}$ 在平面 $x+y+z=0$ 的投影直线的方程.

题 1　一直线过点 $A(1,2,1)$ 且垂直于直线

$$L_1: \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$$

又和直线

$$L_2: \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$$

相交，求此直线方程.

复习与提高

题 1　一直线过点 $A(1,2,1)$ 且垂直于直线

$$L_1:\ \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$$

又和直线

$$L_2:\ \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$$

相交，求此直线方程.

答案　$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{-5}.$$

复习与提高

题 2　求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y = 2x \\ z = x - 1 \end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases} y = 3x - 4 \\ z = 2x - 1 \end{cases}$ 都相交的直线 L.

复习与提高

题 2 求过点 $M_0(1,1,1)$ 且与两直线 $L_1:\begin{cases} y=2x \\ z=x-1 \end{cases}$ 和 $L_2:\begin{cases} y=3x-4 \\ z=2x-1 \end{cases}$ 都相交的直线 L.

答案 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{2}$.

复习与提高

题 3　求过直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

复习与提高

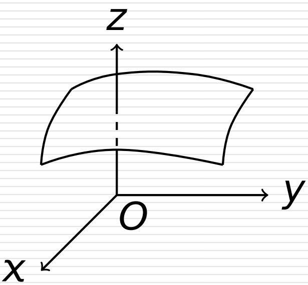
题 3　求过直线 $L:\begin{cases} x+5y+z=0 \\ x-z+4=0 \end{cases}$ 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 夹成 $\dfrac{\pi}{4}$ 角的平面方程.

答案　$x+20y+7z-12=0$?

第五节	曲面及其方程
A	曲面方程的概念
B	旋转曲面
C	柱面
D	二次曲面

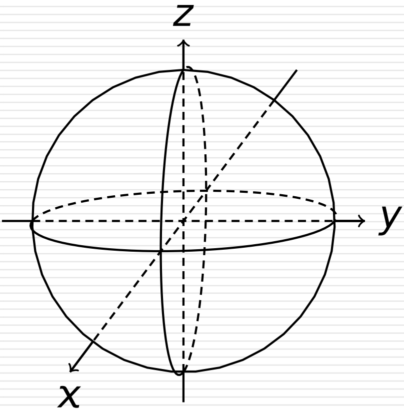
方程与曲面

- 方程 $F(x,y,z)=0$ 对应一个曲面 S
- 曲面 S 对应一个方程 $F(x,y,z)=0$



球面

- 球心在原点，半径为 R 的球面
- 方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$



第五节	曲面及其方程
A	曲面方程的概念
B	旋转曲面
C	柱面
D	二次曲面

旋转曲面

设在 yz 面上的曲线 C 的方程为 $f(y,z)=0.$

它绕 z 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

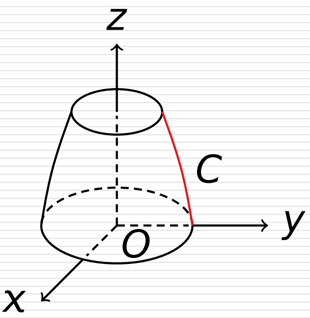
旋转曲面

设在 yz 面上的曲线 C 的方程为 $f(y,z)=0$.

它绕 z 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

曲线 C 称为旋转曲面的母线,



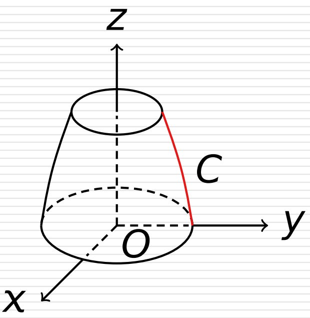
旋转曲面

设在 yz 面上的曲线 C 的方程为 $f(y,z)=0$.

它绕 z 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

曲线 C 称为旋转曲面的母线,

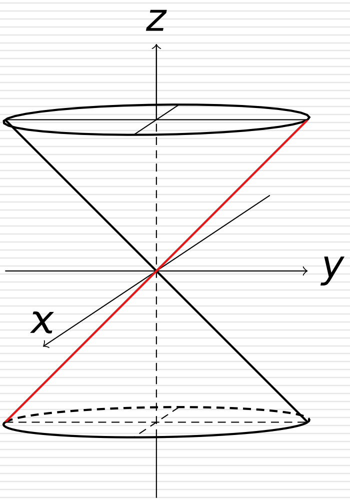


它绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

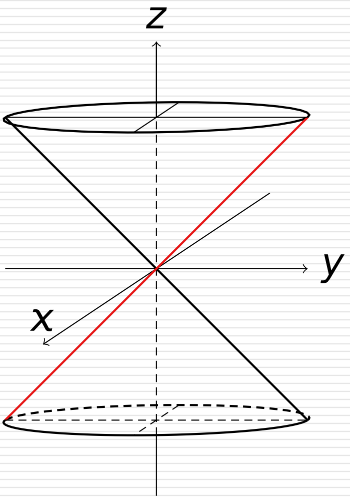
圆锥面

- yz 面上的直线 $z = ay$ 绕 z 轴旋转一周
- 圆锥面 $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$



圆锥面

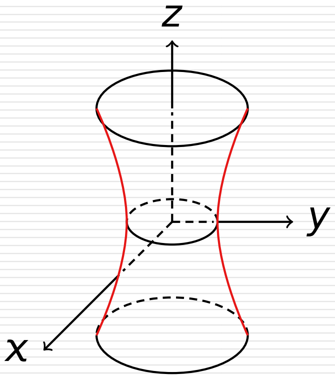
- yz 面上的直线 $z = ay$ 绕 z 轴旋转一周
- 圆锥面 $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$



注记　用平面去截圆锥面，可以得到三种圆锥曲线.

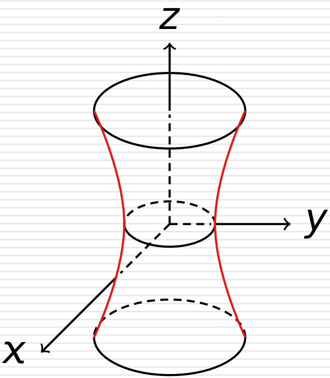
旋转单叶双曲面

将 yz 面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转一周，得到 旋转单叶双曲面 $\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$



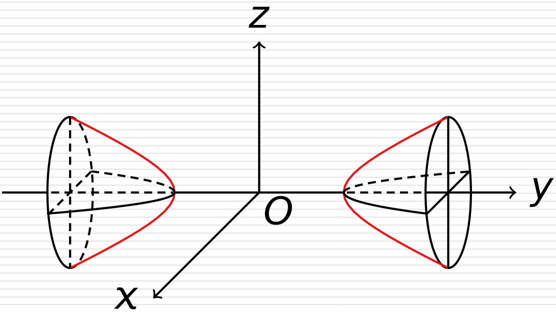
旋转单叶双曲面

将 yz 面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转一周，得到 旋转单叶双曲面 $\frac{x^2+y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.（实例：广州塔）



旋转双叶双曲面

将 yz 面上的双曲线 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ 绕 y 轴旋转一周，得到 旋转双叶双曲面 $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2+z^2}{c^2} = 1.$

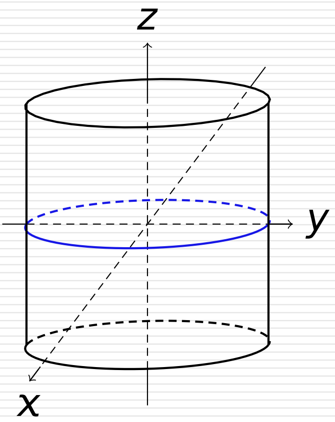


第五节	曲面及其方程
A	曲面方程的概念
B	旋转曲面
C	柱面
D	二次曲面

例子 $x^2 + y^2 = R^2$

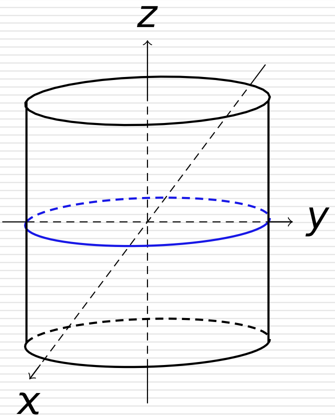
例子 $x^2+y^2=R^2$ 圆柱面

例子　$x^2+y^2=R^2$ 圆柱面

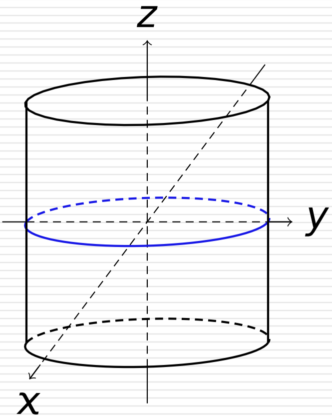


例子 $x^2+y^2=R^2$ 圆柱面

由平行于 z 轴的直线沿 xy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而得.



例子　$x^2+y^2=R^2$ 圆柱面



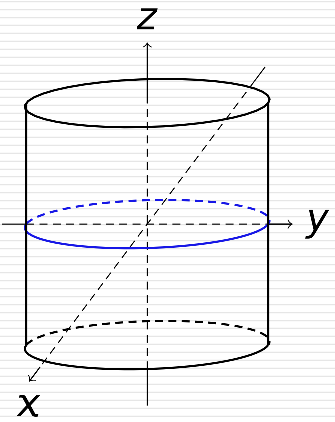
由平行于 z 轴的直线沿 xy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而得.

准线：xy 面的圆 $x^2+y^2=R^2$.

母线：平行于 z 轴的直线.

例子 $x^2+y^2=R^2$ 圆柱面

由平行于 z 轴的直线沿 xy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而得.

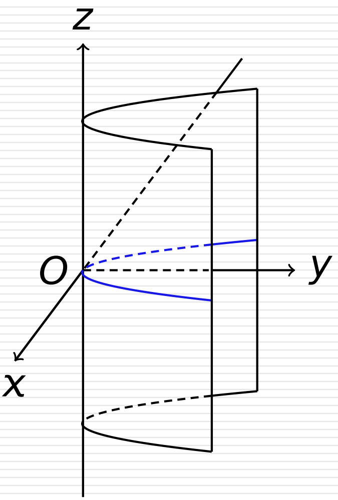


准线：xy 面的圆 $x^2+y^2=R^2$.

母线：平行于 z 轴的直线.

一般地，方程 $F(x,y)=0$ 在空间中表示一个柱面.

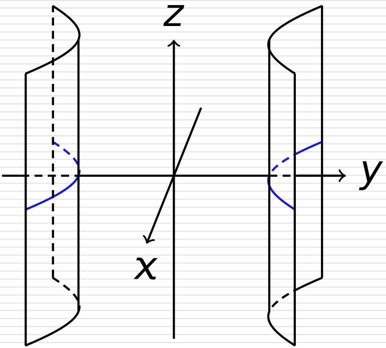
例子 $y = x^2$ 抛物柱面



准线 xy 面上的抛物线 $y = x^2$

母线 平行于 z 轴的直线

例子 $y^2 - x^2 = 1$ 双曲柱面



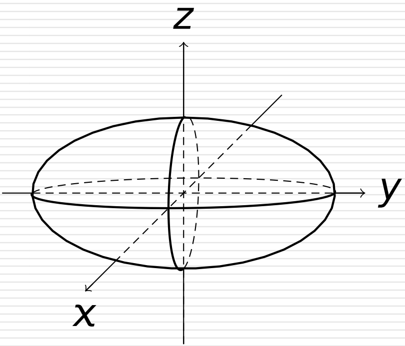
准线 xy 面上的双曲线

母线 平行于 z 轴的直线

第五节	曲面及其方程
A	曲面方程的概念
B	旋转曲面
C	柱面
D	二次曲面

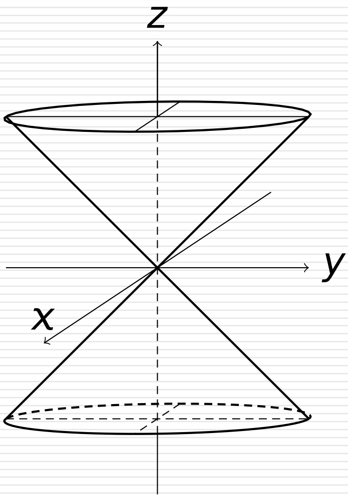
椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



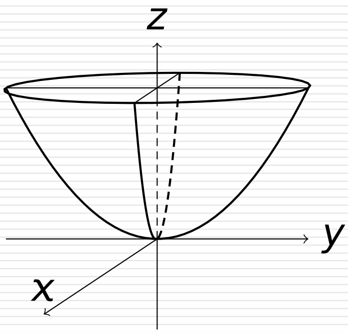
椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$



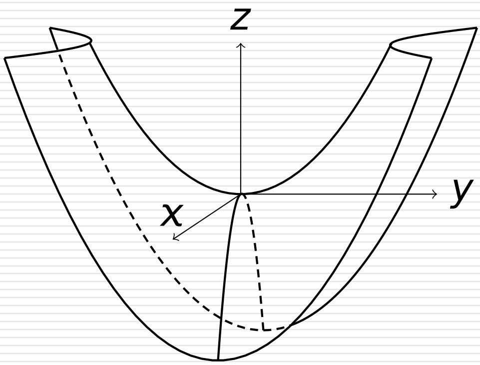
椭圆抛物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$



双曲抛物面

- $z = -\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$
- 又称为马鞍面



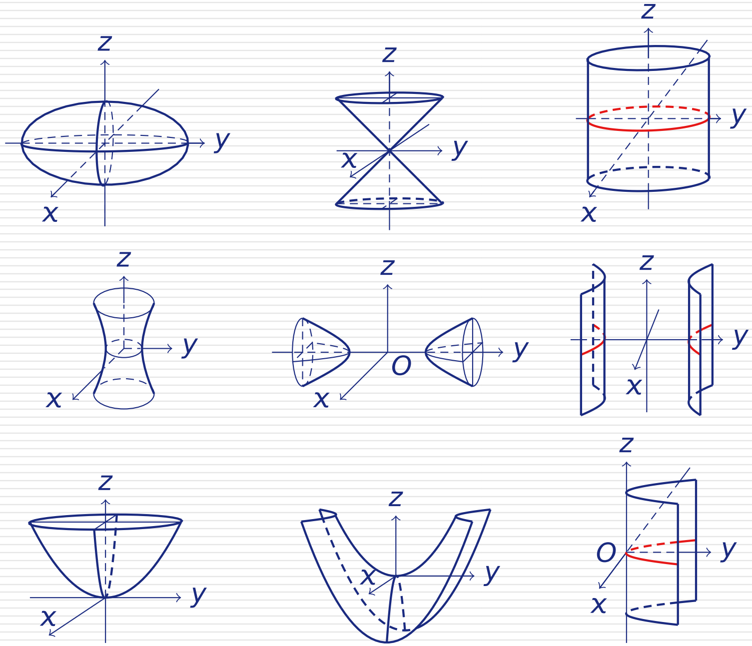
二次曲面的分类

椭圆型	椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$	椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
双曲型	单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双曲柱面 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
抛物型	椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	双曲抛物面 $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	抛物柱面 $x=ay^2$

二次曲面的分类

椭圆型	椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	椭圆锥面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$	椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
双曲型	单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	双曲柱面 $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
抛物型	椭圆抛物面 $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	双曲抛物面 $z=-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$	抛物柱面 $x=ay^2$

思考　哪些二次曲面可以是旋转曲面？


z
y
x
z
y
x
z
y
x
z
y
x
z
y
O
x
z
y
x
z
y
x
z
y
x
z
O
y
x

复习与提高

题 1 求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

复习与提高

题 1　求内切于平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所构成四面体的球面方程.

$$\left(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2=\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

复习与提高

选择　下列结论中，错误的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $z+2x^2+y^2=0$ 表示椭圆抛物面

(B) $x^2+2y^2=1+3z^2$ 表示双叶双曲面

(C) $x^2+y^2-(z-1)^2=0$ 表示圆锥面

(D) $y^2=5x$ 表示抛物柱面

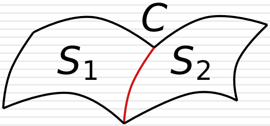
第六节	空间曲线及其方程
A	空间曲线的一般方程
B	空间曲线的参数方程
C	空间曲线在坐标面上的投影

空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两个曲面的交线.

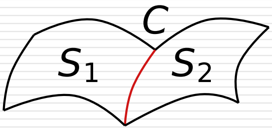
空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两个曲面的交线.



空间曲线的一般方程

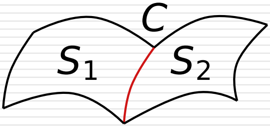
空间曲线可视为两个曲面的交线.



其一般方程为方程组

空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两个曲面的交线.



其一般方程为方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

例 1　方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

例 1　方程组

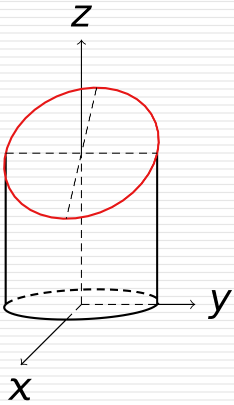
$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

表示圆柱面和平面的交线.

例 1　方程组

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

表示圆柱面和平面的交线.



例 2　方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

例 2　方程组

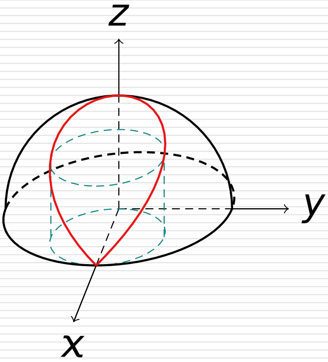
$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

表示上半球面和圆柱面的交线.

例 2 方程组

$$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ x^2 + y^2 - ax = 0 \end{cases}$$

表示上半球面和圆柱面的交线.



第六节	空间曲线及其方程
A	空间曲线的一般方程
B	空间曲线的参数方程
C	空间曲线在坐标面上的投影

空间曲线的参数方程

将曲线 C 上动点的坐标 x，y，z 表示为参数 t 的函数

空间曲线的参数方程

将曲线 C 上动点的坐标 x，y，z 表示为参数 t 的函数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

空间曲线的参数方程

将曲线 C 上动点的坐标 x，y，z 表示为参数 t 的函数

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

称它为空间曲线的参数方程.

例 3　螺旋线

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$

例 3　螺旋线

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$

- 以角速度 ω 围绕 z 轴旋转

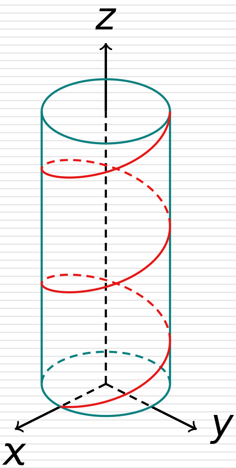
例 3　螺旋线

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$

- 以角速度 ω 围绕 z 轴旋转
- 以线速度 v 平行 z 轴上升

例 3　螺旋线

$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$



- 以角速度 ω 围绕 z 轴旋转
- 以线速度 v 平行 z 轴上升

例 4　将下列曲线化为参数方程表示:

$$(1)\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

例 4　将下列曲线化为参数方程表示：

$$(1)\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases} \qquad (2)\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$$

第六节	空间曲线及其方程
A	空间曲线的一般方程
B	空间曲线的参数方程
C	空间曲线在坐标面上的投影

空间曲线的投影曲线

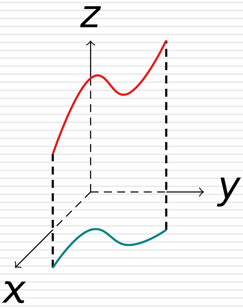
设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

空间曲线的投影曲线

设空间曲线 C 的一般方程为

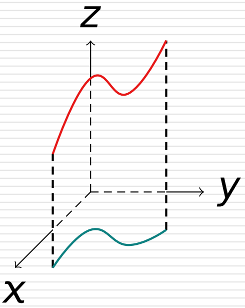
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



空间曲线的投影曲线

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

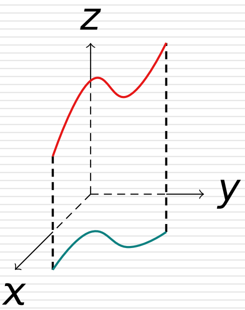


消去 z 得到投影柱面 $H(x,y)=0$,

空间曲线的投影曲线

设空间曲线 C 的一般方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



消去 z 得到投影柱面 $H(x,y)=0$,

则 C 在 xy 面上的投影曲线为 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

空间曲线的投影曲线

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

空间曲线的投影曲线

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 x 得到 $R(y,z)=0$，则 C 在 yz 面上的投影曲线为 $\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

空间曲线的投影曲线

设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 x 得到 $R(y,z)=0$，则
C 在 yz 面上的投影曲线为 $\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

消去 y 得到 $T(x,z)=0$，则
C 在 xz 面上的投影曲线为 $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

例 5　已知两球面的方程分别为

$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ 和 } x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$$

例 5　已知两球面的方程分别为

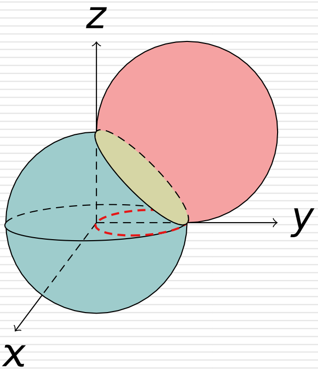
$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ 和 } x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$$

求它们的交线 C 在 xy 面上的投影曲线方程.

例 5 已知两球面的方程分别为

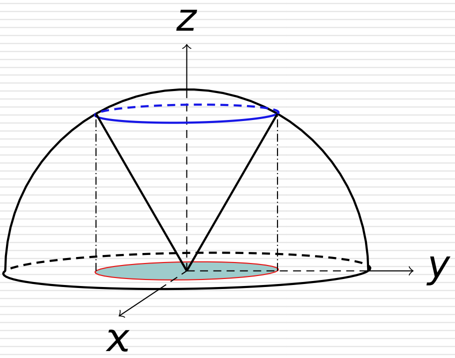
$$x^2+y^2+z^2=1 \text{ 和 } x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$$

求它们的交线 C 在 xy 面上的投影曲线方程.



例 6　设立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成．求它在 xy 面上的投影区域．

例 6　设立体由上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ 围成．求它在 xy 面上的投影区域．



复习与提高

题 1　求曲线 $\begin{cases} z = y^2 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得的曲面与平面 $x + y + z = 1$ 的交线在 xy 面上的投影曲线方程.