高等数学课程

第九章 · 多元函数微分法

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	多元函数的基本概念
A	多元函数的概念
B	多元函数的极限
C	多元函数的连续性

二元函数

定义 1　从平面 $\mathbb{R}^2$ 的非空子集 D 到 $\mathbb{R}$ 的对应关系

$$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

称为二元函数，其中对应 f 将点 (x, y) 对应到 $f(x, y)$.
记为 $z = f(x, y)$.

二元函数

定义 1　从平面 $\mathbb{R}^2$ 的非空子集 D 到 $\mathbb{R}$ 的对应关系

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

称为二元函数，其中对应 f 将点 (x, y) 对应到 $f(x, y)$. 记为 $z = f(x, y)$. x 和 y 称为自变量，z 称为因变量.

二元函数的定义域

二元函数的自然定义域：由所有使得 $f(x, y)$ 有意义的点 (x, y) 组成的集合.

二元函数的定义域

二元函数的自然定义域：由所有使得 $f(x,y)$ 有意义的点 (x,y) 组成的集合.

例 1　$z=\ln(x+y)$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\,|\,x+y>0\}.$$

二元函数的定义域

二元函数的自然定义域：由所有使得 $f(x,y)$ 有意义的点 (x,y) 组成的集合.

例 1　$z=\ln(x+y)$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x+y>0\}.$$

例 2　$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}.$$

二元函数的定义域

二元函数的自然定义域：由所有使得 $f(x,y)$ 有意义的点 (x,y) 组成的集合.

例 1　$z=\ln(x+y)$ 的定义域为 . . . . 无界

$$D=\{(x,y)\,|\,x+y>0\}.$$

例 2　$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为 . . . . 有界

$$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}.$$

二元函数的定义域

二元函数的自然定义域：由所有使得 $f(x,y)$ 有意义的点 (x,y) 组成的集合.

例 1　$z = \ln(x+y)$ 的定义域为 . . . . 无界开区域

$$D = \{(x,y) \mid x+y > 0\}.$$

例 2　$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为 . . . . 有界闭区域

$$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1\}.$$

自然定义域

练习 1　求二元函数的定义域并画出该区域.

(1) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$

(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y-2}}$

自然定义域

练习 1　求二元函数的定义域并画出该区域.

(1) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$

(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y-2}}$

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-|x|-|y|}$

平面点集的分类

有界集 限制在有限范围的点集

无界集 延伸到无穷远的点集

平面点集的分类

有界集 限制在有限范围的点集

无界集 延伸到无穷远的点集

开区域 不包含边界的区域

闭区域 包含边界的区域

平面点集的分类

有界集　限制在有限范围的点集

无界集　延伸到无穷远的点集

开区域　不包含边界的区域

闭区域　包含边界的区域

....

问题　如何准确描述上述几种平面点集？

直线点集与平面点集

直线 $\mathbb{R}$	平面 $\mathbb{R}^2$
邻域	邻域
有界集	有界集
无界集	无界集
开区间	开区域
闭区间	闭区域
端点	边界

定义 2　平面上的点集

$$\left\{(x,y) \,\middle|\, \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$.

定义 2 平面上的点集

$$\left\{(x,y) \,\middle|\, \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$.

定义 3 平面上的点集

$$\left\{(x,y) \,\middle|\, 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

定义 2 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$.

定义 3 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

. . . .

有界集 存在某个 $r>0$，使得 $E\subset U(O,r)$.

定义 2 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$.

定义 3 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

有界集 存在某个 $r>0$，使得 $E\subset U(O,r)$.

无界集 对于任何 $r>0$，总有 $E\not\subset U(O,r)$.

内点 若存在 P 的某个邻域 $U(P)$ 使得 $U(P) \subset E$，则称 P 为 E 的内点.

内点 若存在 P 的某个邻域 $U(P)$ 使得 $U(P) \subset E$, 则称 P 为 E 的内点.

外点 若存在 P 的某个邻域 $U(P)$ 使得 $U(P) \cap E = \varnothing$, 则称 P 为 E 的外点.

内点 若存在 P 的某个邻域 $U(P)$ 使得 $U(P) \subset E$,
则称 P 为 E 的内点.

外点 若存在 P 的某个邻域 $U(P)$ 使得 $U(P) \cap E = \varnothing$,
则称 P 为 E 的外点.

边界点 若 P 的任何邻域，既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的边界点.

内点 若存在 P 的某个邻域 $U(P)$ 使得 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的内点.

外点 若存在 P 的某个邻域 $U(P)$ 使得 $U(P)\cap E=\varnothing$，则称 P 为 E 的外点.

边界点 若 P 的任何邻域，既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的边界点.

注记 (1) 内点一定属于 E；(2) 外点一定不属于 E；(3) 边界点可能属于 E 也可能不属于 E.

内点 若存在 P 的某个邻域 $U(P)$ 使得 $U(P) \subset E$，则称 P 为 E 的内点.

外点 若存在 P 的某个邻域 $U(P)$ 使得 $U(P) \cap E = \varnothing$，则称 P 为 E 的外点.

边界点 若 P 的任何邻域，既含有属于 E 的点，又含有不属于 E 的点，则称 P 为 E 的边界点.

注记 (1) 内点一定属于 E；(2) 外点一定不属于 E；(3) 边界点可能属于 E 也可能不属于 E.

. . . .

边界 E 的边界点的全体，称为 E 的边界，记为 ∂E.

开集 若 E 的边界点都不属于 E，即 $\partial E \cap E = \varnothing$，则称 E 为开集.

开集 若 E 的边界点都不属于 E，即 $\partial E \cap E = \varnothing$，则称 E 为开集.

闭集 若 E 的边界点都属于 E，即 $\partial E \subset E$，则称 E 为闭集.

开集 若 E 的边界点都不属于 E，即 $\partial E \cap E = \varnothing$，
则称 E 为开集.

闭集 若 E 的边界点都属于 E，即 $\partial E \subset E$，
则称 E 为闭集.

连通集 若 E 中任何两点都可用 E 中的折线联结起来.
则称 E 为连通集.

开集 若 E 的边界点都不属于 E，即 $\partial E \cap E = \varnothing$，
则称 E 为开集.

闭集 若 E 的边界点都属于 E，即 $\partial E \subset E$，
则称 E 为闭集.

连通集 若 E 中任何两点都可用 E 中的折线联结起来.
则称 E 为连通集.

开区域 非空的连通开集称为开区域.

开集 若 E 的边界点都不属于 E，即 $\partial E \cap E = \varnothing$，
则称 E 为开集.

闭集 若 E 的边界点都属于 E，即 $\partial E \subset E$，
则称 E 为闭集.

连通集 若 E 中任何两点都可用 E 中的折线联结起来.
则称 E 为连通集.

开区域 非空的连通开集称为开区域.

闭区域 开区域及其边界一起构成的点集称为闭区域.

第一节	多元函数的基本概念
A	多元函数的概念
B	多元函数的极限
C	多元函数的连续性

二元函数的极限：定义

定义 4　如果任意给定 $\epsilon > 0$，总存在一个 $\delta > 0$，使得当点 $(x, y) \in \mathring{U}(P_0, \delta)$ 时，

$$|f(x, y) - A| < \epsilon$$

总成立，则称当 (x, y) 趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数 $f(x, y)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0} f(x, y) = A.$$

二元函数的极限：定义

定义 4 如果任意给定 $\epsilon > 0$，总存在一个 $\delta > 0$，使得当点 $(x, y) \in \mathring{U}(P_0, \delta)$ 时，

$$|f(x, y) - A| < \epsilon$$

总成立，则称当 (x, y) 趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数 $f(x, y)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A \quad 或 \quad \lim_{P\to P_0} f(x, y) = A.$$

例 3 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$，其中

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{x^2 + y^2}.$$

二元函数的极限：解释

注记　函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 成立等价于当 (x,y) 以任意方式趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 总趋于 A.

二元函数的极限：解释

注记 函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$ 成立等价于当 (x,y) 以任意方式趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 总趋于 A.

例 4 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

二重极限的运算法则

注记　二元函数的极限运算法则与一元函数的类似.

二重极限的运算法则

注记　二元函数的极限运算法则与一元函数的类似.

例 5　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$.

二重极限的运算法则

注记　二元函数的极限运算法则与一元函数的类似.

例 5　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$.

. . . .

注记　在二元函数极限的定义中，不要求函数在 P_0 的某个去心邻域有定义，只要求 P_0 是定义域 D 的聚点.

二重极限的运算法则

注记　二元函数的极限运算法则与一元函数的类似.

例 5　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$.

. . . .

注记　在二元函数极限的定义中，不要求函数在 P_0 的某个去心邻域有定义，只要求 P_0 是定义域 D 的聚点.

定义　若 $\forall\delta > 0$，$\mathring{U}(P,\delta)$ 内总有 E 中的点，则称 P 为 E 的聚点.

第一节	多元函数的基本概念
A	多元函数的概念
B	多元函数的极限
C	多元函数的连续性

连续函数

定义 5　设 $f(x,y)$ 的定义域 D 有聚点 (x_0,y_0)．如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，或者称 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的一个连续点.

连续函数

定义 5 设 $f(x,y)$ 的定义域 D 有聚点 (x_0,y_0). 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处**连续**，或者称 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的一个**连续点**.

注记 函数 $f(x,y)$ 的不连续点 (x_0,y_0) 称为**间断点**.

连续函数

定义 5　设 $f(x,y)$ 的定义域 D 有聚点 (x_0,y_0). 如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续，或者称 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的一个连续点.

注记　函数 $f(x,y)$ 的不连续点 (x_0,y_0) 称为间断点.

性质 1　二元初等函数在定义区域上总是连续的.

二元函数的极限

例 6　求二元函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \dfrac{x+y}{xy}$.

二元函数的极限

例 6　求二元函数极限 $\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x+y}{xy}$.

例 7　求极限 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$.

二元连续函数的性质

性质 2 若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则有

1. 它在 D 上有界，且能取得最大值和最小值.
2. 它能取到介于最大值和最小值之间的任何值.

二元函数的间断点

例 8　找出下列二元函数的所有间断点：

(1) $f(x,y)=\sin\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$

(2) $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

复习与提高

复习1　求二元函数的定义域并画出该区域.

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$

(2) $f(x,y)=\ln(x-y+2)+\ln(2x+y-2)$

复习与提高

复习 1 求二元函数的定义域并画出该区域.

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$

(2) $f(x,y)=\ln(x-y+2)+\ln(2x+y-2)$

注记 $y>f(x)$ 表示 $y=f(x)$ 的上方区域.

$y<f(x)$ 表示 $y=f(x)$ 的下方区域.

复习与提高

题 1 设 $f(x+y, x-y) = xy$，求 $f(x, y)$.

复习与提高

题 1　设 $f(x+y, x-y) = xy$，求 $f(x, y)$.

题 2　求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$.

复习与提高

题 3　说明极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x+y}$ 不存在.

复习与提高

题 4 找出下面函数的所有间断点：

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0; \\ 0, & y=0. \end{cases}$$

复习与提高

选择　有且仅有一个间断点的函数为 . . . . (　　)

(A) $\dfrac{x}{y}$　　　　(B) $\dfrac{x}{x+y}$

(C) $e^{-x}\ln(x^2+y^2)$　　　　(D) $\arctan(|xy|+1)$

第二节	偏导数
A	一阶偏导数
B	高阶偏导数

偏导数

定义 1　设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$.

偏导数

定义 1　设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有定义，如果极限

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$.

偏导数

定义 1　设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有定义，如果极限

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$.

类似地定义函数在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数为

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

偏导数

定义 1 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有定义，如果极限

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$.

类似地定义函数在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数为

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

例 1 设 $f(x,y)=xy^2$，求 $f'_x(2,1)$ 和 $f'_y(2,1)$.

偏导函数

定义 2　设 $f(x,y)$ 在区域 D 的每一点对 x 的偏导数都存在，则有对 x 的偏导函数

$$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

偏导函数

定义 2　设 $f(x,y)$ 在区域 D 的每一点对 x 的偏导数都存在，则有对 x 的偏导函数

$$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

类似地，设 $f(x,y)$ 在区域 D 的每一点对 y 的偏导数都存在，则有对 y 的偏导函数

$$f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

偏导函数

定义 2　设 $f(x,y)$ 在区域 D 的每一点对 x 的偏导数都存在，则有对 x 的偏导函数

$$f'_x(x,y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$$

类似地，设 $f(x,y)$ 在区域 D 的每一点对 y 的偏导数都存在，则有对 y 的偏导函数

$$f'_y(x,y)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$$

注记　在不至于混淆时，可把偏导函数简称为偏导数.

偏导函数

对于 $z = f(x, y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，

偏导函数

对于 $z=f(x,y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，或 z'_x，或 f'_x.

偏导函数

对于 $z=f(x,y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，或 z'_x，或 f'_x.

对于 $z=f(x,y)$，将 x 看为常数，对 y 求导，得到 z 对 y 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，

偏导函数

对于 $z=f(x,y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，或 z'_x，或 f'_x.

对于 $z=f(x,y)$，将 x 看为常数，对 y 求导，得到 z 对 y 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$，或 z'_y，或 f'_y.

例 2　求 $z = x^2 + xy + y^2$ 的偏导数.

例 2　求 $z = x^2 + xy + y^2$ 的偏导数.

例 3　求 $z = \dfrac{xy}{2x - y}$ 的偏导数.

例 2　求 $z=x^2+xy+y^2$ 的偏导数.

例 3　求 $z=\dfrac{xy}{2x-y}$ 的偏导数.

例 4　求 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2y}$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

例 2　求 $z=x^2+xy+y^2$ 的偏导数.

例 3　求 $z=\dfrac{xy}{2x-y}$ 的偏导数.

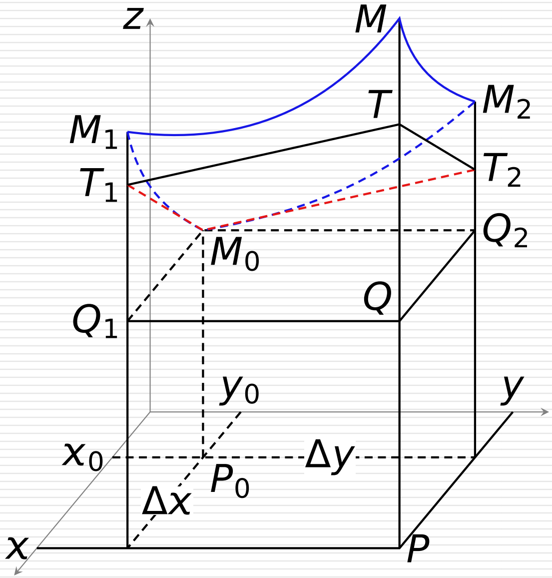
例 4　求 $f(x,y)=\mathrm{e}^{x^2y}$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

练习 1　求下列函数的偏导数.

(1) $z=2x^3-5xy^2+x^2y$

(2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$

偏导数的几何意义



M_0M_1切线 $= M_0T_1$

$\angle Q_1M_0T_1 = \alpha$

$f'_x(x_0, y_0) = \tan\alpha$

M_0M_2切线 $= M_0T_2$

$\angle Q_2M_0T_2 = \beta$

$f'_y(x_0, y_0) = \tan\beta$

例 5　说明 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的两个偏导数存在，但在点 $(0,0)$ 不连续，其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

三元函数的偏导数

类似地，对于三元函数 $u = f(x,y,z)$，可以定义三个偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

三元函数的偏导数

类似地，对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，可以定义三个偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

例 6　求三元函数 $u=xy^2z^3$ 的偏导数.

三元函数的偏导数

类似地，对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，可以定义三个偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

例 6　求三元函数 $u=xy^2z^3$ 的偏导数.

例 7　求三元函数 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的偏导数.

第二节	偏导数
A	一阶偏导数
B	高阶偏导数

二阶偏导数

对 $z = f(x, y)$ 的偏导数 z'_x 和 z'_y 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

二阶偏导数

对 $z = f(x,y)$ 的偏导数 z'_x 和 z'_y 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

- $(z'_x)'_x = z''_{xx}$ 或 $(f'_x)'_x = f''_{xx}$

二阶偏导数

对 $z=f(x,y)$ 的偏导数 z'_x 和 z'_y 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

- $(z'_x)'_x = z''_{xx}$ 或 $(f'_x)'_x = f''_{xx}$
- $(z'_x)'_y = z''_{xy}$ 或 $(f'_x)'_y = f''_{xy}$

二阶偏导数

对 $z=f(x,y)$ 的偏导数 z'_x 和 z'_y 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

- $(z'_x)'_x = z''_{xx}$ 或 $(f'_x)'_x = f''_{xx}$
- $(z'_x)'_y = z''_{xy}$ 或 $(f'_x)'_y = f''_{xy}$
- $(z'_y)'_x = z''_{yx}$ 或 $(f'_y)'_x = f''_{yx}$

二阶偏导数

对 $z=f(x,y)$ 的偏导数 z'_x 和 z'_y 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

- $(z'_x)'_x = z''_{xx}$ 或 $(f'_x)'_x = f''_{xx}$
- $(z'_x)'_y = z''_{xy}$ 或 $(f'_x)'_y = f''_{xy}$
- $(z'_y)'_x = z''_{yx}$ 或 $(f'_y)'_x = f''_{yx}$
- $(z'_y)'_y = z''_{yy}$ 或 $(f'_y)'_y = f''_{yy}$

例 8　求 $z = x^3 + y^3 - 3xy^2$ 的各二阶偏导数.

例 8　求 $z=x^3+y^3-3xy^2$ 的各二阶偏导数.

例 9　求 $z=x^2ye^y$ 的各二阶偏导数.

例 8　求 $z = x^3 + y^3 - 3xy^2$ 的各二阶偏导数.

例 9　求 $z = x^2 y e^y$ 的各二阶偏导数.

定理　当二阶偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 都连续时, 两者必定相等.

例 8　求 $z = x^3 + y^3 - 3xy^2$ 的各二阶偏导数.

例 9　求 $z = x^2 y e^y$ 的各二阶偏导数.

定理　当二阶偏导数 $f''_{xy}(x, y)$ 和 $f''_{yx}(x, y)$ 都连续时,两者必定相等.

练习 2　求下列函数的二阶偏导数.

(1) $z = x^2 y^3 + e^x \sin y$

(2) $z = \ln(x - y)$

二阶偏导数

$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数也可以这样表示：

二阶偏导数

$z = f(x, y)$ 的二阶偏导数也可以这样表示：

- $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx}$$

二阶偏导数

$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数也可以这样表示：

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}$

二阶偏导数

$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数也可以这样表示：

- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}$
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}$

二阶偏导数

$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数也可以这样表示：

- $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$$
- $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}$$
- $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}$$
- $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}$$

复习与提高

复习 1　求下列函数的偏导数.

(1) $z = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$

复习与提高

复习 1　求下列函数的偏导数.

(1) $z = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$

(2) $z = \arctan(x - y)$

复习与提高

复习 2 求下列函数的二阶偏导数.

(1) $z = y^2 e^{x-y}$

复习与提高

复习 2　求下列函数的二阶偏导数.

(1) $z = y^2 \mathrm{e}^{x-y}$

(2) $z = xy\cos y$

复习与提高

题 1　设 $z=\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

复习与提高

题 1　设 $z=\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

题 2　设 $f(x,y)=x^2y+(y-1)\arctan(x/y)$，求 $f'_x(1,1)$.

复习与提高

题 3　判断 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 是否连续，以及偏导数是否存在.

复习与提高

题 3　判断 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 是否连续，以及偏导数是否存在.

题 4　判断 $f(x,y)=\begin{cases}1, & xy=0\\ 0, & xy\neq 0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 是否连续，以及偏导数是否存在.

复习与提高

题 5 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0; \\ 0, & x^2+y^2=0. \end{cases}$$

说明混合偏导数 $f''_{xy}(0,0)$ 和 $f''_{yx}(0,0)$ 不相等.

复习与提高

题 6 求满足条件 $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2y$，$f(x, x^2) = 1$ 的二元函数 $f(x, y)$.

第三节	全微分
A	全微分的定义
B	用全微分求近似值*

全微分

例子　用 S 表示边长分别为 x 与 y 的矩形的面积，则 $S=xy$.

全微分

例子　用 S 表示边长分别为 x 与 y 的矩形的面积，则 $S = xy$．如果边长 x 与 y 分别取得改变量 Δx 与 Δy，

全微分

例子　用 S 表示边长分别为 x 与 y 的矩形的面积，则 $S = xy$．如果边长 x 与 y 分别取得改变量 Δx 与 Δy，则面积 S 相应地有一个改变量

$$\Delta S = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

定义 如果 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内满足

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\Delta P), \quad (\Delta P \to 0)$$

其中 A，B 与 Δx，Δy 无关，$\Delta P = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数在点 (x,y) 可微分，并称它的全微分为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$$

定义 如果 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内满足

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\Delta P), \quad (\Delta P \to 0)$$

其中 A，B 与 Δx，Δy 无关，$\Delta P = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数在点 (x,y) 可微分，并称它的全微分为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$$

定理 函数在 (x,y) 点可微 ⇨ 函数在 (x,y) 点连续.

定义 如果 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的某邻域内满足

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\Delta P), \quad (\Delta P \to 0)$$

其中 A，B 与 Δx，Δy 无关，$\Delta P=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数在点 (x,y) 可微分，并称它的全微分为

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

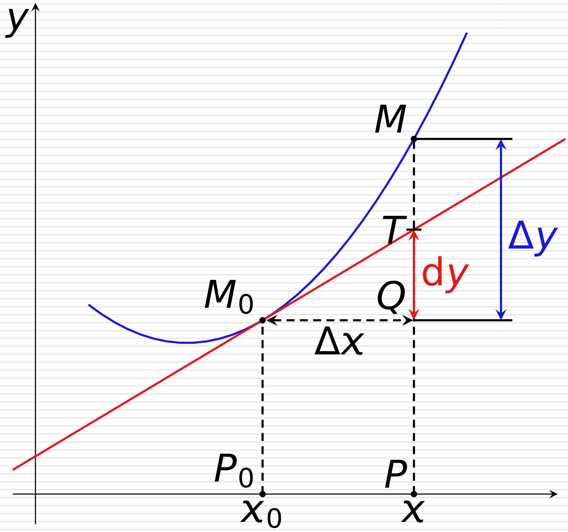
定理 函数在 (x,y) 点可微 ⇨ 函数在 (x,y) 点连续.

定理 如果函数 $z=f(x,y)$ 可微，则 $A=f'_x(x,y)$，$B=f'_y(x,y)$. 即有

$$dz = f'_x(x,y)\,dx + f'_y(x,y)\,dy,$$

其中 $dx=\Delta x$，$dy=\Delta y$.

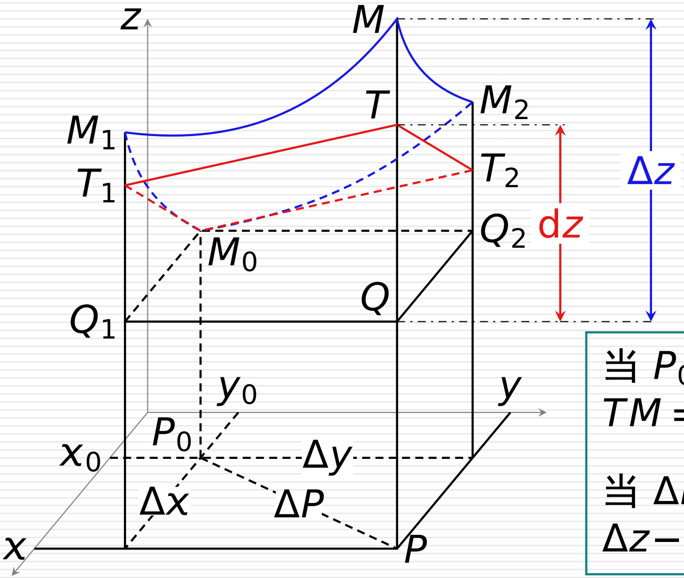
微分的几何意义：以直代曲



当 $P_0P \to 0$ 时，
$TM = o(P_0P)$

当 $\Delta x \to 0$ 时，
$\Delta y - \mathrm{d}y = o(\Delta x)$

全微分的几何意义：以平代曲



当 $P_0P \to 0$ 时，
$TM = o(P_0P)$

当 $\Delta P \to 0$ 时，
$\Delta z - \mathrm{d}z = o(\Delta P)$

例 1　证明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数存在，但不可微分．其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

全微分与偏导数

例 1　证明函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数存在，但不可微分．其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

定理　若多元函数各个偏导数都连续，则全微分存在．

全微分

设二元函数 $z=f(x,y)$ 可微，则全微分为

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

全微分

设二元函数 $z=f(x,y)$ 可微，则全微分为

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 可微，则全微分为

$$\mathrm{d}u=f'_x(x,y,z)\mathrm{d}x+f'_y(x,y,z)\mathrm{d}y+f'_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

全微分

设二元函数 $z=f(x,y)$ 可微，则全微分为

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 可微，则全微分为

$$\mathrm{d}u=f'_x(x,y,z)\mathrm{d}x+f'_y(x,y,z)\mathrm{d}y+f'_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

例 2　求 $z=x^2y^3$ 在 $x=1$，$y=2$，$\Delta x=0.2$，$\Delta y=0.1$ 时的全微分.

全微分

设二元函数 $z=f(x,y)$ 可微，则全微分为

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 可微，则全微分为

$$\mathrm{d}u=f'_x(x,y,z)\mathrm{d}x+f'_y(x,y,z)\mathrm{d}y+f'_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

例 2　求 $z=x^2y^3$ 在 $x=1$，$y=2$，$\Delta x=0.2$，$\Delta y=0.1$ 时的全微分.

例 3　求 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 的全微分.

全微分

设二元函数 $z=f(x,y)$ 可微，则全微分为

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

设三元函数 $u=f(x,y,z)$ 可微，则全微分为

$$\mathrm{d}u=f'_x(x,y,z)\mathrm{d}x+f'_y(x,y,z)\mathrm{d}y+f'_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

例 2　求 $z=x^2y^3$ 在 $x=1$，$y=2$，$\Delta x=0.2$，$\Delta y=0.1$ 时的全微分.

例 3　求 $z=\mathrm{e}^{xy}$ 的全微分.

例 4　求 $u=xy+yz+zx$ 的全微分.

第三节	全微分
A	全微分的定义
B	用全微分求近似值*

近似计算

利用全微分公式，我们有下列近似计算公式：

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

近似计算

利用全微分公式，我们有下列近似计算公式：

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$$

例 5　求 $1.01^{2.99}$ 的近似值.

复习与提高

题 1　求 $z = \arctan\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$ 的全微分 dz.

复习与提高

题 1　求 $z = \arctan\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right)$ 的全微分 $\mathrm{d}z$.

题 2　求 $f(x,y,z) = \sqrt[z]{x/y}$ 在点 $(1,1,1)$ 的全微分.

题 3　证明 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在点 $(0,0)$ 偏导数存在，但不可微分.

复习与提高

选择 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

①$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续

②$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续

③$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微

④$f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在

若用 $P \Rightarrow Q$ 表示可由性质 P 推出 Q，则有 $\cdots$ (   )

(A) ② ⇒ ③ ⇒ ①　　(B) ③ ⇒ ② ⇒ ①

(C) ③ ⇒ ④ ⇒ ①　　(D) ③ ⇒ ① ⇒ ④

第二节	偏导数
第三节	全微分
第四节	**多元复合函数求导**
第五节	隐函数求导
第六节	多元函数微分学的几何应用

第四节	多元复合函数求导
A	复合函数求导法则
B	全微分形式不变性

复合函数求导：情形 1

设 $z = f(x, y)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$,

复合函数求导：情形 1

设 $z = f(x, y)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$，则我们得到复合函数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$.

复合函数求导：情形 1

设 $z=f(x,y)$, $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$，则我们得到复合函数 $z=f(\phi(t),\psi(t))$．此时我们有全导数

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

这里要求 $f(x,y)$ 的偏导数连续.

复合函数求导：情形 1

设 $z = f(x, y)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$，则我们得到复合函数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$. 此时我们有全导数

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

这里要求 $f(x, y)$ 的偏导数连续.

例 1　设 $z = xy$，$x = \mathrm{e}^t$, $y = \sin t$，求全导数 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

复合函数求导：情形 2

设 $z = f(u, v)$, $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$,

复合函数求导：情形 2

设 $z=f(u,v)$, $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$，则有复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$.

复合函数求导：情形 2

设 $z=f(u,v)$, $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$，则有复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$．此时我们有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

这里要求 $f(u,v)$ 的偏导数连续.

复合函数求导：情形 2

设 $z=f(u,v)$, $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$，则有复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$. 此时我们有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

这里要求 $f(u,v)$ 的偏导数连续.

例 2　设 $z=uv$，$u=3x^2+y^2$, $v=2x+y$，求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

练习1

(1) 设 $z = \mathrm{e}^{x-2y}$，$x = \sin t$, $y = \cos t$，求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

复合函数求导

练习 1

(1) 设 $z = \mathrm{e}^{x-2y}$，$x = \sin t, y = \cos t$，求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

(2) 设 $z = \mathrm{e}^{u} \sin v$，$u = xy, v = x - y$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

复合函数求导：情形 3

例 3 设 $z = f(u,v,t) = uv + \sin t$，而 $u = \mathrm{e}^t$，$v = \cos t$. 求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

复合函数求导：情形 3

例 3　设 $z = f(u,v,t) = uv + \sin t$，而 $u = \mathrm{e}^t$，$v = \cos t$．求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$．

例 4　设 $w = f(x+y+z, xyz)$，且 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}$．

复合函数求导

例 5　设 $u=f(x,y)$ 的所有二阶偏导数连续，把下列表达式转换为极坐标系中的形式：

(1) $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$　　(2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

第四节	多元复合函数求导
A	复合函数求导法则
B	全微分形式不变性

全微分的形式不变性

设有 $z=f(u,v)$，u, v 为自变量，则全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

全微分的形式不变性

设有 $z = f(u, v)$，u, v 为自变量，则全微分为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

若又有 $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$，u, v 为中间变量，则全微分仍为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

这里假定所有函数的偏导数都连续.

例 6　利用全微分的形式不变性，求二元函数

$$z=(x^2-y^2)e^{xy}$$

的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

复习与提高

复习 1

(1) 设 $z=\dfrac{x}{y}$, $x=\mathrm{e}^t, y=\sqrt{t}$, 求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

(2) 设 $z=uv$, $u=x\sin y, v=y\cos x$, 求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

复习与提高

题 1 设 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $z=f(x,x/y)$ 的一阶和二阶偏导数.

复习与提高

题 1　设 $f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，求 $z=f(x,x/y)$ 的一阶和二阶偏导数.

题 2　设 $f(u,v)$ 有连续偏导数，求 $w=f(x/y,y/z)$ 的全微分.

复习与提高

题 3 已知 $f(x,y)|_{y=x^2}=1$，$f_1'(x,y)|_{y=x^2}=2x$，求 $f_2'(x,y)|_{y=x^2}$.

复习与提高

题 3 已知 $f(x,y)|_{y=x^2}=1$，$f_1'(x,y)|_{y=x^2}=2x$，求 $f_2'(x,y)|_{y=x^2}$. ………………………… -1

复习与提高

题 3　已知 $f(x,y)|_{y=x^2}=1$，$f_1'(x,y)|_{y=x^2}=2x$，求 $f_2'(x,y)|_{y=x^2}$．……………………………-1

题 4　设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，$f(1,1)=1$，$f_1'(1,1)=2$，求 $f_2'(1,1)=3$，$\phi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^3(x)\right|_{x=1}$．

复习与提高

题 3 已知 $f(x,y)|_{y=x^2}=1$，$f_1'(x,y)|_{y=x^2}=2x$，求 $f_2'(x,y)|_{y=x^2}$. ························· -1

题 4 设 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，$f(1,1)=1$，$f_1'(1,1)=2$，求 $f_2'(1,1)=3$，$\phi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\phi^3(x)\right|_{x=1}$. ························· 51

复习与提高

选择　已知二元函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且 $f(x,y)=f(y,x)$，则有……………………(　　)

(A) $f_1'(x,y)=f_1'(y,x)$　　(B) $f_1'(x,y)=f_2'(y,x)$

(C) $f_1'(x,y)=f_2'(x,y)$　　(D) $f_2'(x,y)=f_2'(y,x)$

第五节	隐函数求导
A	一个方程的情形
B	方程组的情形

隐函数的导数 1

定理 设 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域有连续偏导数

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ F(x_0,y_0)=0 \end{cases} \xRightarrow{F'_y\neq 0} \begin{cases} y=f(x) \\ y_0=f(x_0) \end{cases}$$

隐函数的导数 1

定理　设 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域有连续偏导数

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ F(x_0,y_0)=0 \end{cases} \xRightarrow{F'_y\neq 0} \begin{cases} y=f(x) \\ y_0=f(x_0) \end{cases}$$

而且隐函数 $y=f(x)$ 也有连续偏导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}$$

隐函数的导数 1

定理　设 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域有连续偏导数

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ F(x_0,y_0)=0 \end{cases} \xRightarrow{F'_y \neq 0} \begin{cases} y=f(x) \\ y_0=f(x_0) \end{cases}$$

而且隐函数 $y=f(x)$ 也有连续偏导数

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

例 1　设方程 $x^4+y^4=1$ 确定了隐函数 $y=f(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

隐函数的导数 2

定理 设 $F(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 邻域有连续偏导数

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ F(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases} \xRightarrow{F'_z\neq 0} \begin{cases} z=f(x,y) \\ z_0=f(x_0,y_0) \end{cases}$$

隐函数的导数 2

定理　设 $F(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 邻域有连续偏导数

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ F(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases} \xRightarrow{F'_z\neq 0} \begin{cases} z=f(x,y) \\ z_0=f(x_0,y_0) \end{cases}$$

而且隐函数 $z=f(x,y)$ 也有连续偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

隐函数的导数 2

定理　设 $F(x,y,z)$ 在 (x_0,y_0,z_0) 邻域有连续偏导数

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ F(x_0,y_0,z_0)=0 \end{cases} \xRightarrow{F'_z\neq 0} \begin{cases} z=f(x,y) \\ z_0=f(x_0,y_0) \end{cases}$$

而且隐函数 $z=f(x,y)$ 也有连续偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

例 2　设方程 $x^2+y^2+z^2-4z=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，求二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

练习 1

(1) 设方程 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$ 确定了隐函数 $y = f(x)$，求导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

(2) 设方程 $e^z = xyz$ 确定了隐函数 $z = f(x, y)$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

第五节	隐函数求导
A	一个方程的情形
B	方程组的情形

方程组确定的隐函数

隐函数存在定理可以推广到方程组情形．比如

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

方程组确定的隐函数

隐函数存在定理可以推广到方程组情形．比如

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

由 F、G 的偏导数组成的行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

称为 F、G 的雅可比行列式.

方程组确定的隐函数

隐函数存在定理可以推广到方程组情形．比如

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases} \overset{?}{\Rightarrow} \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$$

由 F、G 的偏导数组成的行列式

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix}$$

称为 F、G 的雅可比行列式．隐函数存在要求 $J\neq 0$.

定理 设 F, G 在 (x_0, y_0, u_0, v_0) 邻域有连续偏导数

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \\ F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0 \\ G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0 \end{cases} \xRightarrow{J\neq 0} \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \\ u_0=u(x_0,y_0) \\ v_0=v(x_0,y_0) \end{cases}$$

定理 设 F, G 在 (x_0, y_0, u_0, v_0) 邻域有连续偏导数

$$\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \\ F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0 \\ G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0 \end{cases} \xRightarrow{J\neq 0} \begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \\ u_0=u(x_0,y_0) \\ v_0=v(x_0,y_0) \end{cases}$$

而且隐函数也有连续偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

方程组确定的隐函数

例 3　设 $xu - yv = 0$，$yu + xv = 1$，求偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}.$$

复习与提高

复习 1

(1) 设方程 $xy + \ln y - \ln x = 0$ 确定了隐函数 $y = f(x)$，求导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(2) 设方程 $\dfrac{x}{z} = \ln z - \ln y$ 确定了隐函数 $z = f(x, y)$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

复习与提高

题 1 设 $F(u,v)$ 有连续偏导数，由方程 $F\left(\frac{x}{z},\frac{y}{z}\right)=0$ 求全微分 dz.

复习与提高

选择　设有三元方程 $xy - z\ln y + e^{xz} = 1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程所确定的具有连续偏导数的隐函数 $\cdots$ (　　)

(A) 只有 $z = z(x,y)$ 这一个

(B) 只有 $y = y(x,z)$ 和 $z = z(x,y)$ 这两个

(C) 只有 $x = x(y,z)$ 和 $z = z(x,y)$ 这两个

(D) 只有 $x = x(y,z)$ 和 $y = y(x,z)$ 这两个

第六节	多元函数微分学的几何应用
A	向量值函数及其导数
B	空间曲线的切线与法平面
C	空间曲面的法线与切平面

函数与向量值函数

(一元)函数 $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ $x\longmapsto y$	多元函数 $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ $(x,y,z)\longmapsto u$
(一元)向量值函数 $\vec{f}:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^3$ $t\longmapsto(x,y,z)$	多元向量值函数 $\vec{f}:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ $(r,s,t)\longmapsto(x,y,z)$

定义 1 设数集 $D \subset \mathbb{R}$. 则称映射 $\vec{f}: D \to \mathbb{R}^n$ 为**向量值函数**，通常记为

$$\vec{r} = \vec{f}(t),\ t \in D.$$

其中数集 D 称为函数的定义域，t 称为自变量，$\vec{r}$ 称为因变量.

定义 1 设数集 $D \subset \mathbb{R}$. 则称映射 $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^n$ 为**向量值函数**，通常记为

$$\vec{r} = \vec{f}(t),\ t \in D.$$

其中数集 D 称为函数的定义域，t 称为自变量，$\vec{r}$ 称为因变量.

注记 普通的实值函数也称为**数量函数**.

例子　在 $\mathbb{R}^3$ 中，向量值函数 $\vec{f}(t)$ 可表示为

$$\vec{f}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k},\quad t\in D$$

或者

$$\vec{f}(t)=\big(f_1(t),f_2(t),f_3(t)\big),\quad t\in D$$

例子 在 $\mathbb{R}^3$ 中，向量值函数 $\vec{f}(t)$ 可表示为

$$\vec{f}(t)=f_1(t)\vec{i}+f_2(t)\vec{j}+f_3(t)\vec{k}, \quad t\in D$$

或者

$$\vec{f}(t)=(f_1(t),f_2(t),f_3(t)), \quad t\in D$$

注记 $\mathbb{R}^3$ 中的向量值函数与空间曲线一一对应.

定义 2 设向量值函数 $\vec{f}(t)$ 在点 t_0 的某一去心邻域有定义．如果存在一个常向量 $\vec{r}_0$，对于任意给定的 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |t - t_0| < \epsilon$ 时，对应的函数值 $\vec{f}(t_0)$ 都满足不等式

$$|\vec{f}(t) - \vec{r}_0| < \epsilon,$$

那么，常向量 $\vec{r}_0$ 就叫做向量值函数 $\vec{f}(t)$ 当 $t \to t_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{t \to t_0} \vec{f}(t) = \vec{r}_0, \quad \text{或者} \quad \vec{f}(t) \to \vec{r}_0,\ t \to t_0.$$

例 1 设 $\vec{f}(t)=(\cos t)\vec{i}+(\sin t)\vec{j}+t\vec{k}$，求 $\lim\limits_{t\to\pi/4}\vec{f}(t)$.

定义 3　设向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 在点 t_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}$$

存在，那么就称这个极限向量为向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 在 t_0 处的导数或导向量，记为 $\vec{f}'(t_0)$ 或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$.

定义 3 设向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 在点 t_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{f}(t_0+\Delta t)-\vec{f}(t_0)}{\Delta t}$$

存在，那么就称这个极限向量为向量值函数 $\vec{r}=\vec{f}(t)$ 在 t_0 处的导数或导向量，记为 $\vec{f}'(t_0)$ 或 $\left.\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0}$.

注记 向量值函数的导向量是所对应曲线 Γ 的切向量.

例 2　设空间曲线 Γ 的向量方程为

$$\vec{r} = \vec{f}(t) = (t^2 + 1, 4t - 3, 2t^2 - 6t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

求曲线 Γ 在与 $t = 2$ 相应的点处的单位切向量.

向量值函数

例 3　一个人在悬挂式滑翔机上由于快速上升气流而沿位置向量为

$$\vec{r}=\vec{f}(t)=(3\cos t)\vec{i}+(3\sin t)\vec{j}+t^2\vec{k}$$

的路径螺旋式向上．求

(1) 滑翔机在任意时刻 t 的速度向量和加速度向量.

(2) 滑翔机在任意时刻 t 的速率.

(3) 滑翔机的加速度与速度正交的时刻.

第六节	多元函数微分学的几何应用
A	向量值函数及其导数
B	空间曲线的切线与法平面
C	空间曲面的法线与切平面

空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为 $\begin{cases} x = \phi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta].$

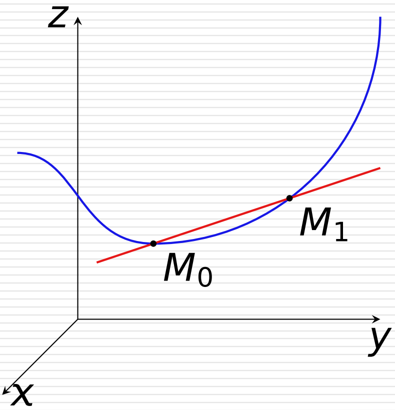
则曲线在点 $(x_0, y_0, z_0) = (\phi(t_0), \psi(t_0), \omega(t_0))$ 处有

切向量 $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3) = (\phi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0))$

切线 $$\frac{x - x_0}{T_1} = \frac{y - y_0}{T_2} = \frac{z - z_0}{T_3}$$

法平面 $T_1(x - x_0) + T_2(y - y_0) + T_3(z - z_0) = 0$

空间曲线的切线方程



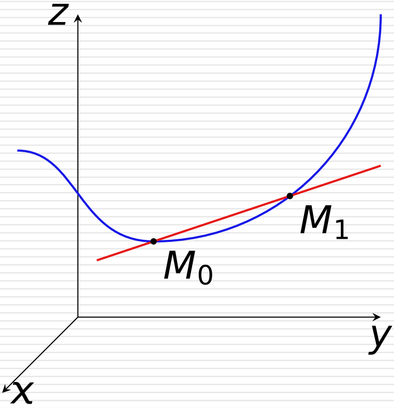
$$t_0 \longmapsto M_0(x_0, y_0, z_0)$$

$$\Delta t \longmapsto (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

空间曲线的切线方程

用点向式写出割线方程：

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$



$$t_0 \longmapsto M_0(x_0, y_0, z_0)$$
$$\Delta t \longmapsto (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$$

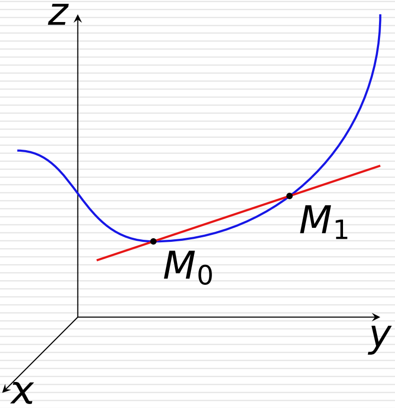
空间曲线的切线方程

用点向式写出割线方程：

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

分母同时除以 Δt 得到：

$$\frac{x-x_0}{\Delta x/\Delta t}=\frac{y-y_0}{\Delta y/\Delta t}=\frac{z-z_0}{\Delta z/\Delta t}$$



$$t_0 \longmapsto M_0(x_0,y_0,z_0)$$
$$\Delta t \longmapsto (\Delta x,\Delta y,\Delta z)$$

空间曲线的切线方程

用点向式写出割线方程：

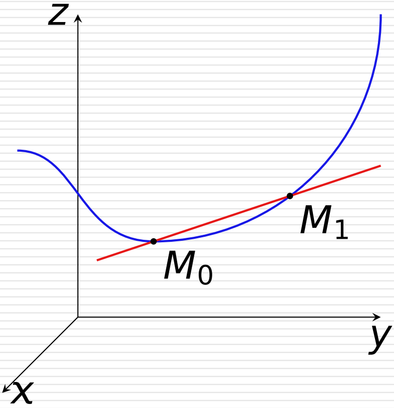
$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}$$

分母同时除以 Δt 得到：

$$\frac{x-x_0}{\Delta x/\Delta t}=\frac{y-y_0}{\Delta y/\Delta t}=\frac{z-z_0}{\Delta z/\Delta t}$$

令 $\Delta t\to 0$ 得到切线方程：

$$\frac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$$



$$t_0 \longmapsto M_0(x_0,y_0,z_0)$$
$$\Delta t \longmapsto (\Delta x,\Delta y,\Delta z)$$

例 4　求曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$ 在点 $(1,1,1)$ 处的切线及法平面方程.

空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的显式方程为 $\begin{cases} y = \psi(x), \\ z = \omega(x), \end{cases} \quad x \in [a, b].$

则曲线在点 $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, \psi(x_0), \omega(x_0))$ 处有

切向量 $\overrightarrow{T} = (T_1, T_2, T_3) = (1, \psi'(x_0), \omega'(x_0))$

切线 $$\frac{x - x_0}{T_1} = \frac{y - y_0}{T_2} = \frac{z - z_0}{T_3}$$

法平面 $T_1(x - x_0) + T_2(y - y_0) + T_3(z - z_0) = 0$

空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的隐式方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0. \end{cases}$

则曲线在点 (x_0,y_0,z_0) 处有

切向量 $\vec{T}=(T_1,T_2,T_3)$

$$=\left(\begin{vmatrix} F'_y & F'_z \\ G'_y & G'_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_z & F'_x \\ G'_z & G'_x \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} F'_x & F'_y \\ G'_x & G'_y \end{vmatrix}\right)\Bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$$

切线 $$\frac{x-x_0}{T_1}=\frac{y-y_0}{T_2}=\frac{z-z_0}{T_3}$$

法平面 $T_1(x-x_0)+T_2(y-y_0)+T_3(z-z_0)=0$

例 5　求曲线 $x^2+y^2+z^2=6,\ x+y+z=0$ 在点 $(1,-2,1)$ 处的切线及法平面方程.

第六节	多元函数微分学的几何应用
A	向量值函数及其导数
B	空间曲线的切线与法平面
C	空间曲面的法线与切平面

空间曲面的法线与切平面

设空间曲面 Σ 的隐式方程为 $F(x,y,z)=0$.

则曲面在点 (x_0,y_0,z_0) 处有

法向量 $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)=\left(F'_x,\ F'_y,\ F'_z\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$

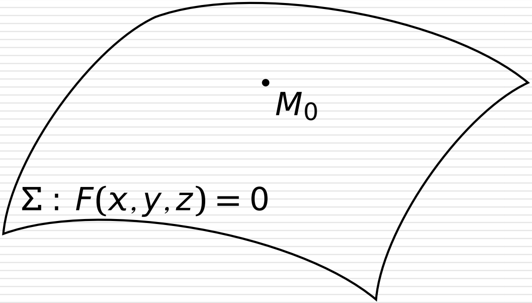
法线 $$\frac{x-x_0}{n_1}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{n_3}$$

切平面 $n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$

空间曲面的法线与切平面

在曲面 Σ 上任取一条过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的曲线 Γ.

$$\Gamma: \quad (x,y,z)=\big(\phi(t),\psi(t),\omega(t)\big)$$

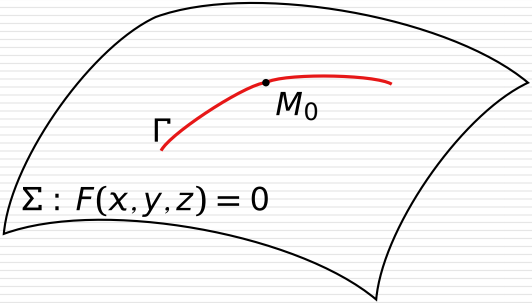


通过 M_0 的任何曲线，它们在 M_0 点的切线都在同一个平面上.

空间曲面的法线与切平面

在曲面 Σ 上任取一条过 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的曲线 Γ.

$$\Gamma: \quad (x, y, z) = \big(\phi(t), \psi(t), \omega(t)\big)$$

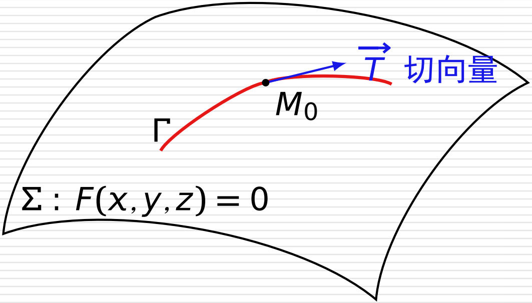


通过 M_0 的任何曲线，它们在 M_0 点的切线都在同一个平面上.

空间曲面的法线与切平面

在曲面 Σ 上任取一条过 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 的曲线 Γ.

$$\Gamma: \quad (x, y, z) = \left(\phi(t), \psi(t), \omega(t)\right)$$

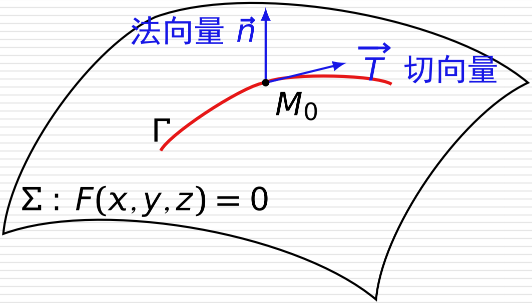


通过 M_0 的任何曲线，它们在 M_0 点的切线都在同一个平面上.

空间曲面的法线与切平面

在曲面 Σ 上任取一条过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的曲线 Γ.

$$\Gamma:\quad (x,y,z)=\big(\phi(t),\psi(t),\omega(t)\big)$$

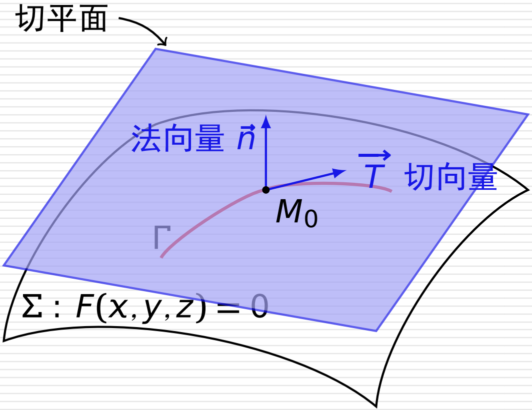


通过 M_0 的任何曲线,它们在 M_0 点的切线都在同一个平面上.

空间曲面的法线与切平面

在曲面 Σ 上任取一条过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的曲线 Γ.

$$\Gamma: \quad (x,y,z)=\big(\phi(t),\psi(t),\omega(t)\big)$$

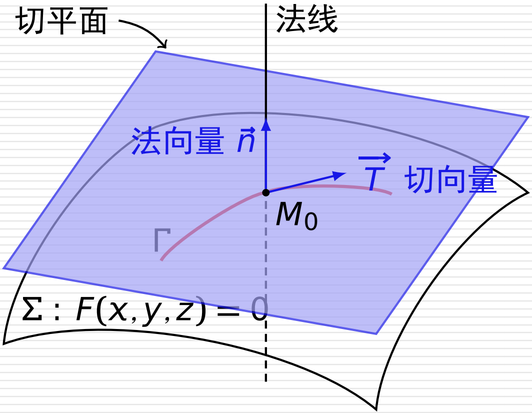


通过 M_0 的任何曲线，它们在 M_0 点的切线都在同一个平面上.

空间曲面的法线与切平面

在曲面 Σ 上任取一条过 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的曲线 Γ.

$$\Gamma: \quad (x,y,z)=\big(\phi(t),\psi(t),\omega(t)\big)$$



通过 M_0 的任何曲线，它们在 M_0 点的切线都在同一个平面上.

例 6　求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$ 处的法线和切平面方程.

空间曲面的法线与切平面

设空间曲面 Σ 的显式方程为 $z=f(x,y)$.

则曲面在点 $(x_0,y_0,z_0)=(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处有

法向量 $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)=\left(f'_x,\ f'_y,\ -1\right)\Big|_{(x_0,y_0)}$

法线 $$\frac{x-x_0}{n_1}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{n_3}$$

切平面 $n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$

例 7　求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2, 1, 4)$ 处的法线和切平面方程.

复习与提高

题 1　求螺旋线 $x = a\cos\phi, y = a\sin\phi, z = b\phi$ 在 $\phi = \pi/2$ 对应点处的切线方程和法平面方程.

复习与提高

题 2　已知曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处相切，求正数 σ.

复习与提高

题 2　已知曲面 $xyz = \sigma$ 与球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处相切，求正数 σ.

题 3　已知平面 $3x + \lambda y - 3z + 16 = 0$ 与椭球面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 相切，求 λ.

复习与提高

题 2　已知曲面 $xyz=\sigma$ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处相切，求正数 σ.

题 3　已知平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切，求 λ. ……………… ± 2

复习与提高

题 4　设 $f(u)$ 可微，证明曲面 $z = xf(y/x)$ 上任一点处的切平面都通过原点.

题 4 设 $f(u)$ 可微，证明曲面 $z = xf(y/x)$ 上任一点处的切平面都通过原点.

题 5 设 $F(u, v)$ 可微，证明曲面

$$F(x - my, z - ny) = 0$$

的所有切平面恒与定直线平行.

第七节 方向导数与梯度

A	方向导数
B	梯度

引例　有一只蚂蚁在铁盘上某点 $P_0(x_0, y_0)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $z = f(x, y)$．问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

引例　有一只蚂蚁在铁盘上某点 $P_0(x_0,y_0)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $z=f(x,y)$．问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

- 本质在于求出温度由高到低变化最剧烈的方向.

引例　有一只蚂蚁在铁盘上某点 $P_0(x_0, y_0)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $z = f(x, y)$. 问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

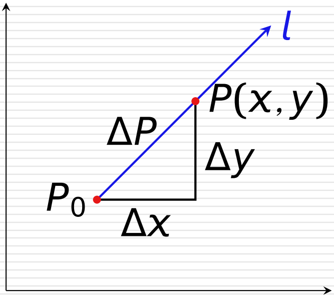
- 本质在于求出温度由高到低变化最剧烈的方向.
- 需要先研究温度函数沿任意方向的变化率问题.

引例　有一只蚂蚁在铁盘上某点 $P_0(x_0, y_0)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $z = f(x, y)$. 问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

- 本质在于求出温度由高到低变化最剧烈的方向.
- 需要先研究温度函数沿任意方向的变化率问题.

温度函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点沿方向 l 的变化率为

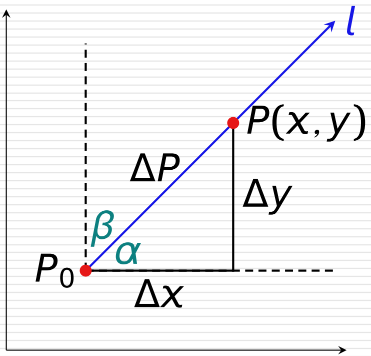
$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta P \to 0^+} \frac{\Delta z}{\Delta P}$$



称为函数沿方向 l 的方向导数.

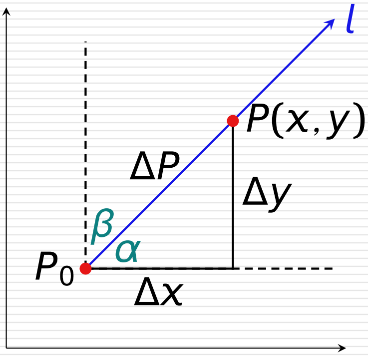
设方向 l 与两个坐标轴的夹角分别为 α 和 β，则有

$$\Delta x = \Delta P \cdot \cos\alpha$$
$$\Delta y = \Delta P \cdot \cos\beta$$



设方向 l 与两个坐标轴的夹角分别为 α 和 β，则有

$$\Delta x = \Delta P \cdot \cos\alpha$$
$$\Delta y = \Delta P \cdot \cos\beta$$

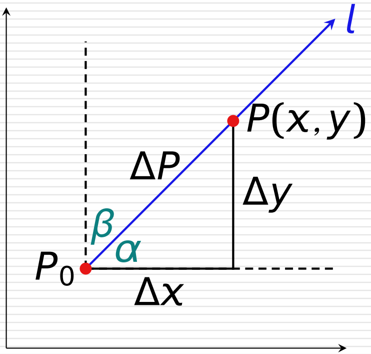


故函数沿方向 l 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta P\to 0^+} \frac{\Delta z}{\Delta P}$$

设方向 l 与两个坐标轴的夹角分别为 α 和 β，则有

$$\Delta x = \Delta P \cdot \cos\alpha$$
$$\Delta y = \Delta P \cdot \cos\beta$$



故函数沿方向 l 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = \lim_{\Delta P\to 0^+}\frac{\Delta z}{\Delta P}$$

$$= \lim_{\Delta P\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta P}$$

$$= \lim_{\Delta P\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta P\cos\alpha, y_0+\Delta P\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\Delta P}$$

注记　单位向量 $\vec{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 与方向 l 同方向. 即 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 是方向 l 的两个方向余弦.

注记　单位向量 $\vec{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 与方向 l 同方向. 即 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 是方向 l 的两个方向余弦.

. . . .

定理 1　若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分，那么它在该点沿任一方向 l 的方向导数存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

其中 $\vec{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 是与 l 同方向的单位向量.

注记　单位向量 $\vec{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 与方向 l 同方向. 即 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 是方向 l 的两个方向余弦.

. . . .

定理 1　若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分，那么它在该点沿任一方向 l 的方向导数存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f_x'(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y'(x_0,y_0)\cos\beta.$$

其中 $\vec{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 是与 l 同方向的单位向量.

. . . .

例 1　求函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1,0)$ 处沿从点 $P(1,0)$ 到点 $Q(2,-1)$ 的方向导数.

三元函数的方向导数

注记　在二元函数方向导数的定义中，令 $t=\Delta P$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

三元函数的方向导数

注记　在二元函数方向导数的定义中，令 $t=\Delta P$，则

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{t}$$

定义　对三元函数 $f(x,y,z)$，它在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 沿方向 $\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_1,y_1,z_1)-f(x_0,y_0,z_0)}{t},$$

$$(x_1,y_1,z_1)=(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta,z_0+\cos\gamma).$$

三元函数的方向导数

定理 2　若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微分，那么它在该点沿任一方向 $\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=f_x'(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y'(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z'(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma.$$

三元函数的方向导数

定理 2 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微分，那么它在该点沿任一方向 $\vec{e}_l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=f'_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f'_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma.$$

. . . .

例 2 求函数 $f(x,y,z)=xy+yz+zx$ 在点 $(1,1,2)$ 沿方向 l 的方向导数，其中 l 的方向角分别为 60°，45°，60°.

第七节	方向导数与梯度
A	方向导数
B	梯度

引例 有一只蚂蚁在铁盘上某点 $P_0(x_0, y_0)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $z = f(x, y)$. 问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

引例　有一只蚂蚁在铁盘上某点 $P_0(x_0, y_0)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $z = f(x, y)$．问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

- 已经研究好温度函数沿任意方向的变化率问题．

引例　有一只蚂蚁在铁盘上某点 $P_0(x_0, y_0)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $z = f(x, y)$. 问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

- 已经研究好温度函数沿任意方向的变化率问题.
- 现在要寻找出温度由高到低变化最剧烈的方向.

引例　有一只蚂蚁在铁盘上某点 $P_0(x_0, y_0)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $z = f(x, y)$．问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

- 已经研究好温度函数沿任意方向的变化率问题.
- 现在要寻找出温度由高到低变化最剧烈的方向.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta$$

$$= (f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta)$$

$$= \left|(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0))\right| \cdot \cos\theta$$

其中 θ 是向量 $(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0))$ 与 l 的夹角.

定义 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的梯度为

$$\mathrm{grad}\,f(x_0,y_0)=\left(f'_x(x_0,y_0),f'_y(x_0,y_0)\right)$$
$$=f'_x(x_0,y_0)\vec{i}+f'_y(x_0,y_0)\vec{j}$$

或者记为 $\nabla f(x_0,y_0)$.

定义 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的**梯度**为

$$\mathrm{grad} f(x_0,y_0) = \left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\right)$$

$$= f'_x(x_0,y_0)\vec{i} + f'_y(x_0,y_0)\vec{j}$$

或者记为 $\nabla f(x_0,y_0)$.

注记 梯度与方向导数有如下关系：

1. 当方向向量与梯度方向相同时，函数增加最快
2. 当方向向量与梯度方向相反时，函数减少最快
3. 当方向向量与梯度方向垂直时，函数变化率为零

二元函数的梯度

例子　有一只蚂蚁在铁盘上点 $(1,1)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $f(x,y)=\dfrac{240}{x^2+2y^2+1}$．问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

二元函数的梯度

例子　有一只蚂蚁在铁盘上点 $(1,1)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $f(x,y)=\dfrac{240}{x^2+2y^2+1}$．问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

解答　$\operatorname{grad} f(x,y)=\left(-\frac{480x}{(x^2+2y^2+1)^2},-\frac{960y}{(x^2+2y^2+1)^2}\right)$.

二元函数的梯度

例子 有一只蚂蚁在铁盘上点 $(1,1)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $f(x,y)=\dfrac{240}{x^2+2y^2+1}$. 问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

解答 $\operatorname{grad} f(x,y)=\left(-\frac{480x}{(x^2+2y^2+1)^2},-\frac{960y}{(x^2+2y^2+1)^2}\right)$.

蚂蚁的逃生路线应与梯度向量相切，

二元函数的梯度

例子　有一只蚂蚁在铁盘上点 $(1,1)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $f(x,y)=\dfrac{240}{x^2+2y^2+1}$. 问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

解答　$\mathrm{grad}\, f(x,y)=\left(-\dfrac{480x}{(x^2+2y^2+1)^2},-\dfrac{960y}{(x^2+2y^2+1)^2}\right)$.

蚂蚁的逃生路线应与梯度向量相切，解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y}{x},\qquad y\big|_{x=1}=1,$$

二元函数的梯度

例子 有一只蚂蚁在铁盘上点 $(1,1)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $f(x,y)=\dfrac{240}{x^2+2y^2+1}$. 问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

解答 $\mathrm{grad}\, f(x,y)=\left(-\frac{480x}{(x^2+2y^2+1)^2},-\frac{960y}{(x^2+2y^2+1)^2}\right)$.

蚂蚁的逃生路线应与梯度向量相切，解微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}, \qquad y\big|_{x=1}=1,$$

得曲线方程 $y=x^2$.

二元函数的梯度

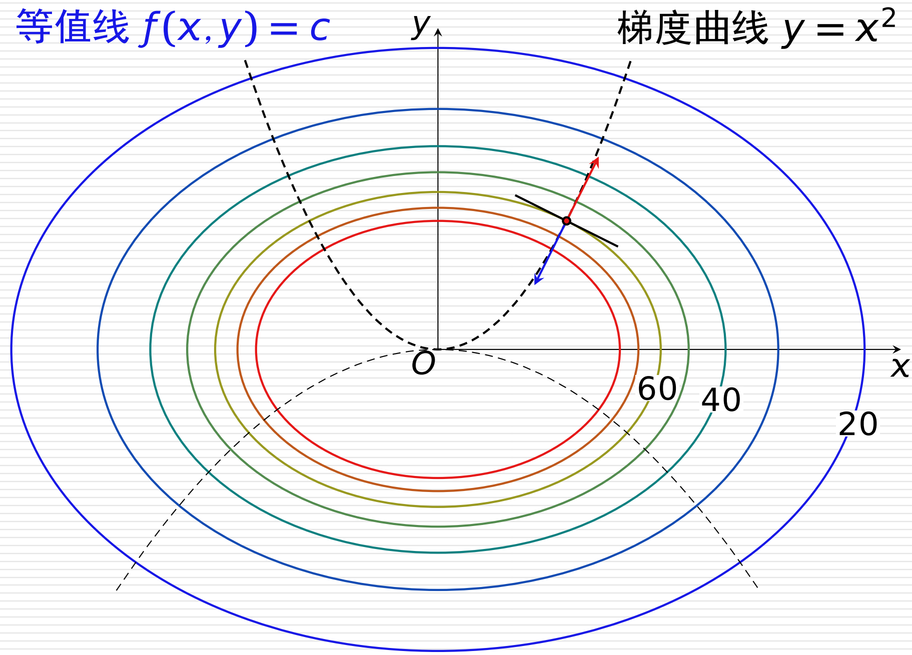
例子 有一只蚂蚁在铁盘上点 $(1,1)$ 处，铁盘上任意点的温度为 $f(x,y)=\dfrac{240}{x^2+2y^2+1}$. 问这只蚂蚁应沿什么方向爬行，才能最快到达较凉快的地点？

解答 $\operatorname{grad} f(x,y)=\left(-\frac{480x}{(x^2+2y^2+1)^2},-\frac{960y}{(x^2+2y^2+1)^2}\right)$.

蚂蚁的逃生路线应与梯度向量相切，解微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x},\qquad y\big|_{x=1}=1,$$

得曲线方程 $y=x^2$. 沿远离原点方向温度下降最快.


等值线 $f(x,y)=c$
梯度曲线 $y=x^2$
y
x
O
60
40
20

三元函数的梯度

定义 函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)=\nabla f(x_0,y_0,z_0)$$

$$=\left(f'_x(x_0,y_0,z_0),f'_y(x_0,y_0,z_0),f'_z(x_0,y_0,z_0)\right)$$

$$=f'_x(x_0,y_0,z_0)\vec{i}+f'_y(x_0,y_0,z_0)\vec{j}+f'_z(x_0,y_0,z_0)\vec{k}.$$

三元函数的梯度

定义 函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0,z_0)=\nabla f(x_0,y_0,z_0)$$

$$=\left(f'_x(x_0,y_0,z_0),f'_y(x_0,y_0,z_0),f'_z(x_0,y_0,z_0)\right)$$

$$=f'_x(x_0,y_0,z_0)\vec{i}+f'_y(x_0,y_0,z_0)\vec{j}+f'_z(x_0,y_0,z_0)\vec{k}.$$

例 3 设 $f(x,y,z)=x^3-xy^2-z$，$P_0(1,1,0)$，问 $f(x,y,z)$ 在 P_0 处沿什么方向变化最快，在这个方向的变化率是多少？

定义 1　(1) 空间区域上的数量函数 $f(M)$ 称为**数量场**.

定义 1 (1) 空间区域上的数量函数 $f(M)$ 称为**数量场**.

(2) 空间区域上的向量值函数 $\vec{F}(M)$ 称为**向量场**. 即有

$$\vec{F}(M) = P(M)\,\vec{i} + Q(M)\,\vec{j} + R(M)\,\vec{k},$$

其中 $P(M), Q(M), R(M)$ 是点 M 的数量函数.

定义 1 (1) 空间区域上的数量函数 $f(M)$ 称为**数量场**.

(2) 空间区域上的向量值函数 $\vec{F}(M)$ 称为**向量场**. 即有

$$\vec{F}(M) = P(M)\,\vec{i} + Q(M)\,\vec{j} + R(M)\,\vec{k},$$

其中 $P(M), Q(M), R(M)$ 是点 M 的数量函数.

注记 由数量函数 $f(M)$ 产生的梯度 $\mathrm{grad}\, f(M)$ 是一个向量场.

定义 1 (1) 空间区域上的数量函数 $f(M)$ 称为**数量场**.

(2) 空间区域上的向量值函数 $\vec{F}(M)$ 称为**向量场**．即有

$$\vec{F}(M) = P(M)\,\vec{i} + Q(M)\,\vec{j} + R(M)\,\vec{k},$$

其中 $P(M), Q(M), R(M)$ 是点 M 的数量函数.

注记 由数量函数 $f(M)$ 产生的梯度 $\mathrm{grad}\,f(M)$ 是一个向量场.

例 4 求数量场 $\dfrac{m}{r}$ 产生的梯度场，其中常数 $m > 0$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 为原点 O 与点 $M(x, y, z)$ 的距离.

复习与提高

题 1 求函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿点 A 指向 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数.

复习与提高

题 1 求函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿点 A 指向 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数. $\cdots\cdots\frac{1}{2}$

复习与提高

题 1　求函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数. $\cdots\cdots\frac{1}{2}$

题 2　求函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} u\big|_M$.

复习与提高

题 1　求函数 $u = \ln(x + \sqrt{y^2 + z^2})$ 在点 $A(1, 0, 1)$ 处沿点 A 指向 $B(3, -2, 2)$ 方向的方向导数. $\cdots\cdots \frac{1}{2}$

题 2　求函数 $u = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ 在点 $M(1, 2, -2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} u\big|_M$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{9})$

复习与提高

题 3　求 $u=x^2+y^2+z^2$ 在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处沿外法线方向的方向导数.

复习与提高

题 4　判定下列函数在 $(0,0)$ 点的偏导数和方向导数是否存在：

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$　(2) $g(x,y)=\sqrt[3]{xy}$

第四节	多元复合函数求导
第五节	隐函数求导
第六节	多元函数微分学的几何应用
第七节	方向导数与梯度
第八节	多元函数的极值

第八节	多元函数的极值
A	多元函数的极值与最值
B	条件极值与拉格朗日乘数法

极值和极值点

定义　设点 (x_0, y_0) 在 $z = f(x, y)$ 定义域内部.

极值和极值点

定义 设点 (x_0, y_0) 在 $z = f(x, y)$ 定义域内部.

1. 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

极值和极值点

定义　设点 (x_0, y_0) 在 $z = f(x, y)$ 定义域内部.

1 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

称 (x_0, y_0) 为极大值点，$f(x_0, y_0)$ 为极大值.

极值和极值点

定义 设点 (x_0, y_0) 在 $z = f(x, y)$ 定义域内部.

1 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

称 (x_0, y_0) 为极大值点，$f(x_0, y_0)$ 为极大值.

2 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

极值和极值点

定义 设点 (x_0,y_0) 在 $z=f(x,y)$ 定义域内部.

1 若对 (x_0,y_0) 去心邻域中任何点 (x,y)，总有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0),$$

称 (x_0,y_0) 为极大值点，$f(x_0,y_0)$ 为极大值.

2 若对 (x_0,y_0) 去心邻域中任何点 (x,y)，总有

$$f(x,y)>f(x_0,y_0),$$

称 (x_0,y_0) 为极小值点，$f(x_0,y_0)$ 为极小值.

极值和极值点

定义　设点 (x_0, y_0) 在 $z = f(x, y)$ 定义域内部.

1 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

称 (x_0, y_0) 为极大值点，$f(x_0, y_0)$ 为极大值.

2 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

称 (x_0, y_0) 为极小值点，$f(x_0, y_0)$ 为极小值.

- 极大值和极小值统称极值.
- 极大值点和极小值点统称极值点.

极值和极值点

例 1　对下列各函数，判定点 $(0,0)$ 是否为极值点：

极值和极值点

例 1　对下列各函数，判定点 $(0,0)$ 是否为极值点：

（1） $f(x,y)=x^2+y^2$

极值和极值点

例 1　对下列各函数，判定点 $(0,0)$ 是否为极值点：

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

极值和极值点

例 1　对下列各函数，判定点 $(0,0)$ 是否为极值点：

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

(3) $f(x,y)=xy$

极值和与驻点

定理 1 (极值的必要条件)　如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且偏导数存在，

极值和与驻点

定理 1 (极值的必要条件) 如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且偏导数存在，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0, \qquad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

极值和与驻点

定理 1 (极值的必要条件)　如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且偏导数存在，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\qquad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

定义　使两个偏导数都为零的点称为驻点.

极值和与驻点

定理 1 (极值的必要条件)　如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且偏导数存在，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\qquad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

定义　使两个偏导数都为零的点称为驻点.

注记　(1) 驻点未必都是极值点.

极值和与驻点

定理 1 (极值的必要条件)　如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且偏导数存在，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\qquad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

定义　使两个偏导数都为零的点称为驻点.

注记　(1) 驻点未必都是极值点．例如 $z=xy$.

极值和与驻点

定理 1 (极值的必要条件)　如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且偏导数存在，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\qquad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

定义　使两个偏导数都为零的点称为驻点.

注记　(1) 驻点未必都是极值点. 例如 $z=xy$.

(2) 极值点未必都是驻点.

极值和与驻点

定理 1 (极值的必要条件) 如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且偏导数存在，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0, \qquad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

定义 使两个偏导数都为零的点称为驻点.

注记 (1) 驻点未必都是极值点．例如 $z=xy$.

(2) 极值点未必都是驻点．例如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点.

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $AC-B^2>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $AC-B^2>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $AC-B^2>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $AC-B^2>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

(2) 如果 $AC-B^2<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $AC-B^2>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

(2) 如果 $AC-B^2<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

(3) 如果 $AC-B^2=0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值需另外判定.

极值问题

例 2　求二元函数的极值：

$$f(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+5.$$

极值问题

例 2　求二元函数的极值：

$$f(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+5.$$

练习 1　求二元函数的极值：

(1) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$;

(2) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy.$

最值问题

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内可微分，且只有有限个驻点.

最值问题

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内可微分，且只有有限个驻点．则它在 D 上的最值只可能出现在

1. 内部的驻点
2. 边界上的最值点

最值问题

设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内可微分，且只有有限个驻点．则它在 D 上的最值只可能出现在

1 内部的驻点

2 边界上的最值点

. . . .

在很多实际问题中，最值一定存在，且在 D 内部取得．此时若驻点唯一，则该驻点就是最值点．

最值问题

例 3　要造一个容积为 2 的长方体箱子．问选择长、宽、高为多少时，所用的材料最少？

最值问题

例 3　要造一个容积为 2 的长方体箱子．问选择长、宽、高为多少时，所用的材料最少？

例 4　有一宽为 24 厘米的长方形铁板，把它两边折起来做成一断面为等腰梯形的水槽．问怎样折法才能使断面的面积最大？

第八节	多元函数的极值
A	多元函数的极值与最值
B	条件极值与拉格朗日乘数法

极值问题

$$\text{极值问题}\begin{cases}\text{无条件极值} & \text{对自变量只有定义域限制}\\ \text{条 件 极 值} & \text{要求自变量满足某些方程}\end{cases}$$

极值问题

极值问题
- 无条件极值　对自变量只有定义域限制
- 条 件 极 值　要求自变量满足某些方程

例子　求 $z = xy$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的极值.

极值问题

$$\text{极值问题}\begin{cases}\text{无条件极值} & \text{对自变量只有定义域限制} \\ \text{条 件 极 值} & \text{要求自变量满足某些方程}\end{cases}$$

例子　求 $z = xy$ 在条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的极值.

$$\text{条件极值的求法}\begin{cases}\text{代入法} & \text{消去变量化为无条件极值} \\ \text{拉格朗日乘数法} & \text{直接求解方程组}\end{cases}$$

拉格朗日乘数法 1

问题　求函数 $u = f(x, y)$ 在约束条件 $g(x, y) = 0$ 下的极值.

拉格朗日乘数法 1

问题　求函数 $u = f(x, y)$ 在约束条件 $g(x, y) = 0$ 下的极值.

解法　令 $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$,

拉格朗日乘数法 1

问题　求函数 $u=f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y)=0$ 下的极值.

解法　令 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$，由

$$\begin{cases} L'_x(x,y)=0 \\ L'_y(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

拉格朗日乘数法 1

问题　求函数 $u = f(x, y)$ 在约束条件 $g(x, y) = 0$ 下的极值.

解法　令 $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$，由

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 0 \\ L'_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

消去 λ，解得的 (x, y) 即为极值可疑点.

拉格朗日乘数法 1

问题　求 $u = f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z) = 0$ 下的极值.

拉格朗日乘数法 1

问题　求 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z)=0$ 下的极值.

解法　令 $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$,

拉格朗日乘数法 1

问题　求 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z)=0$ 下的极值.

解法　令 $L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)$，由

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z)=0 \\ L'_y(x,y,z)=0 \\ L'_z(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0 \end{cases}$$

拉格朗日乘数法 1

问题　求 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $g(x, y, z) = 0$ 下的极值.

解法　令 $L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$，由

$$\begin{cases} L'_x(x, y, z) = 0 \\ L'_y(x, y, z) = 0 \\ L'_z(x, y, z) = 0 \\ g(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

消去 λ，解得的 (x, y, z) 即为极值可疑点.

条件最值

例 7　求表面积为 a^2 而体积为最大的长方体的体积.

拉格朗日乘数法 2

问题　求 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $g(x, y, z) = 0$ 和 $h(x, y, z) = 0$ 下的极值.

拉格朗日乘数法 2

问题　求 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $g(x, y, z) = 0$ 和 $h(x, y, z) = 0$ 下的极值.

解法　令

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z) + \mu h(x, y, z).$$

拉格朗日乘数法 2

问题　求 $u = f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z) = 0$ 和 $h(x,y,z) = 0$ 下的极值.

解法　令

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z).$$

由下面方程组

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z) = 0, \quad L'_y(x,y,z) = 0, \quad L'_z(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0, \quad h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

拉格朗日乘数法 2

问题 求 $u = f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z) = 0$ 和 $h(x,y,z) = 0$ 下的极值.

解法 令

$$L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z).$$

由下面方程组

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z) = 0, \ L'_y(x,y,z) = 0, \ L'_z(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0, \quad h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

消去 λ 和 μ，解得的 (x,y,z) 即为极值可疑点.

条件最值

例 8　已知曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2-2z^2=0 \\ x+y+3z=5 \end{cases}$.

求 C 上距离 xOy 面最远的点和最近的点.

拉格朗日乘数法 2

问题　求 $u = f(x, y, z, t)$ 在约束条件 $g(x, y, z, t) = 0$ 和 $h(x, y, z, t) = 0$ 下的极值.

拉格朗日乘数法 2

问题　求 $u = f(x,y,z,t)$ 在约束条件 $g(x,y,z,t) = 0$ 和 $h(x,y,z,t) = 0$ 下的极值.

解法　令

$$L(x,y,z,t) = f(x,y,z,t) + \lambda g(x,y,z,t) + \mu h(x,y,z,t).$$

拉格朗日乘数法 2

问题　求 $u=f(x,y,z,t)$ 在约束条件 $g(x,y,z,t)=0$ 和 $h(x,y,z,t)=0$ 下的极值.

解法　令

$$L(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda g(x,y,z,t)+\mu h(x,y,z,t).$$

由下面各式

$$L'_x=0,\ L'_y=0,\ L'_z=0,\ L'_t=0,\ g=0,\ h=0$$

拉格朗日乘数法 2

问题　求 $u=f(x,y,z,t)$ 在约束条件 $g(x,y,z,t)=0$ 和 $h(x,y,z,t)=0$ 下的极值.

解法　令

$$L(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda g(x,y,z,t)+\mu h(x,y,z,t).$$

由下面各式

$$L'_x=0,\ L'_y=0,\ L'_z=0,\ L'_t=0,\ g=0,\ h=0$$

消去 λ 和 μ，解得的 (x,y,z,t) 即为极值可疑点.

复习与提高

复习 1　求二元函数的极值：

(1) $f(x,y) = xy(1-x-y)$

复习与提高

复习 1 求二元函数的极值：

(1) $f(x,y)=xy(1-x-y)$

(2) $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$

复习与提高

复习 1 求二元函数的极值:

(1) $f(x,y) = xy(1-x-y)$

(2) $f(x,y) = (6x-x^2)(4y-y^2)$

复习 2 求二元函数 $f(x,y) = x+2y$ 在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下的最值.

复习与提高

题 1 设 $f(x,y)=x^3-3x^2-y^2$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)\mid -5\leqslant x\leqslant 5,-5\leqslant y\leqslant 5\}.$$

(1) 说明函数有唯一的极值点，且为极大值点.

(2) 判断这个极大值点是否为函数的最大值点.

复习与提高

题 2 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$．试在椭圆

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad (x \geqslant 0, y \geqslant 0)$$

圆周上求一点 C，使 ΔABC 面积 $S_{\triangle}$ 最大或最小．

题 3　求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

复习与提高

题 4　求二元函数 $f(x,y) = x + y - xy$ 在闭区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 5\}$ 上的最值.

复习与提高

选择 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$，则 $\cdots\cdots\cdots(\qquad)$

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点