高等数学课程

第十章 · 重积分

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

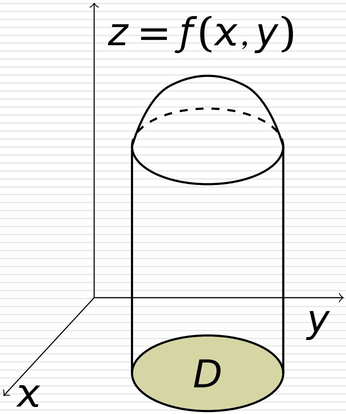
第一节	二重积分
A	二重积分的概念
B	二重积分的性质

曲顶柱体

底面：在 xOy 面中的闭区域 D

侧面：母线平行于 z 轴的柱面

顶面：在 D 之上的曲面 $f(x,y)$

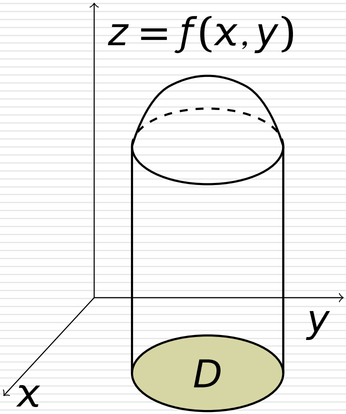


曲顶柱体

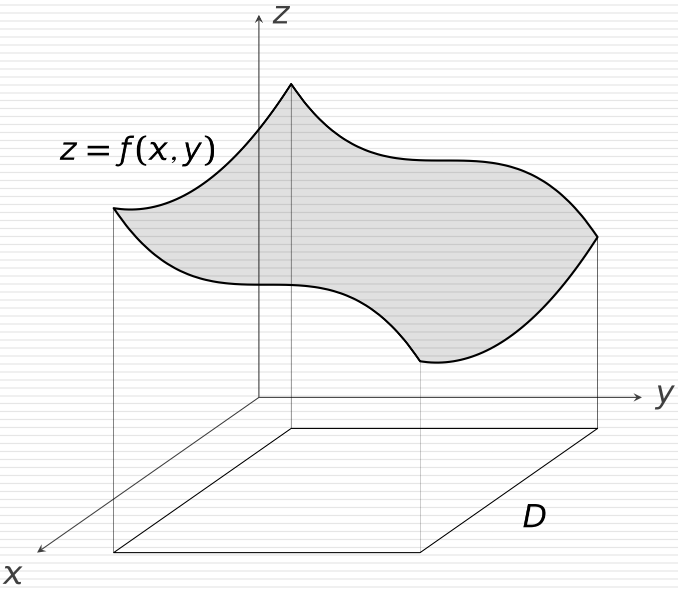
底面：在 xOy 面中的闭区域 D

侧面：母线平行于 z 轴的柱面

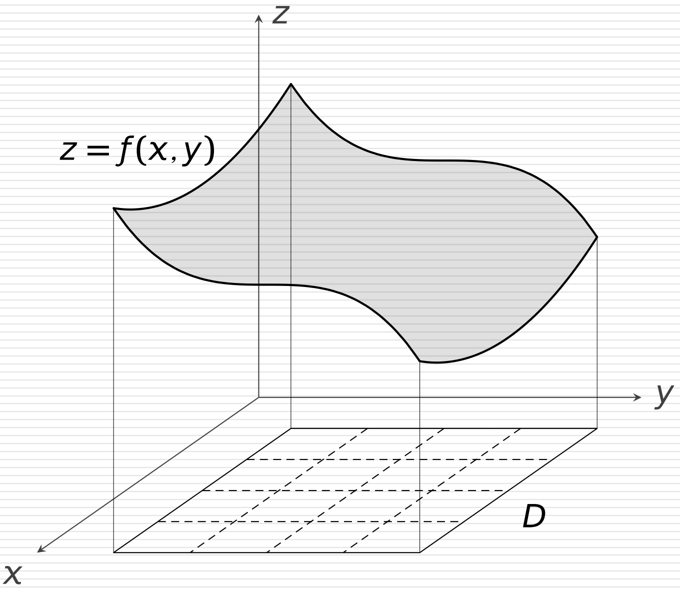
顶面：在 D 之上的曲面 $f(x,y)$

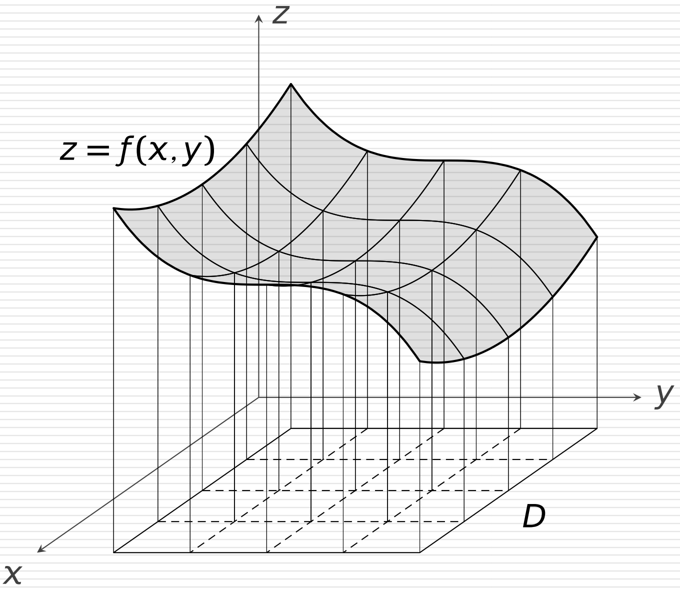


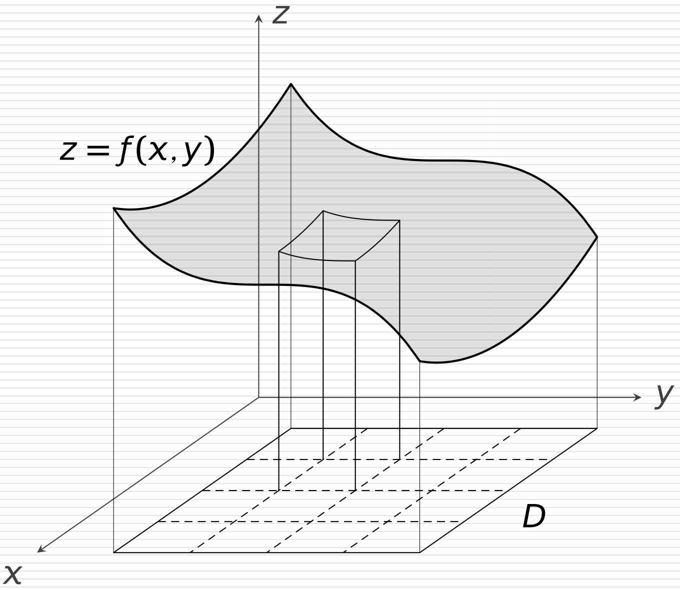
问题　如何求曲顶柱体的体积？



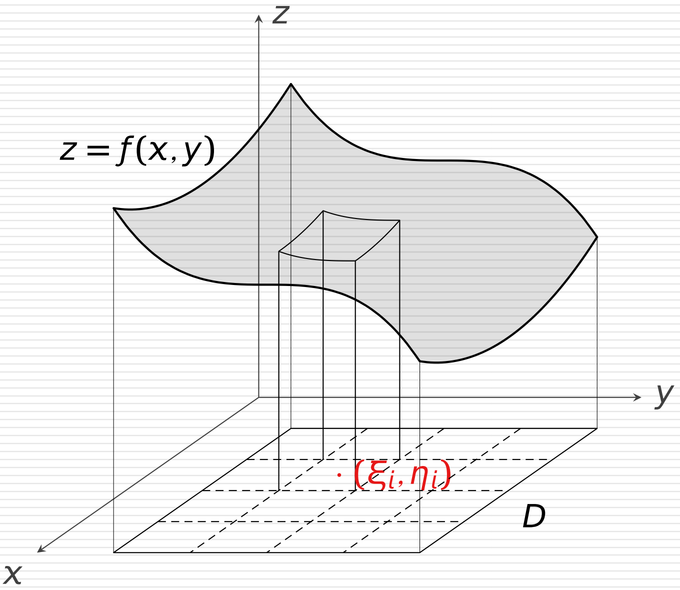
z
$z = f(x, y)$
y
D
x


z
z = f(x, y)
y
D
x

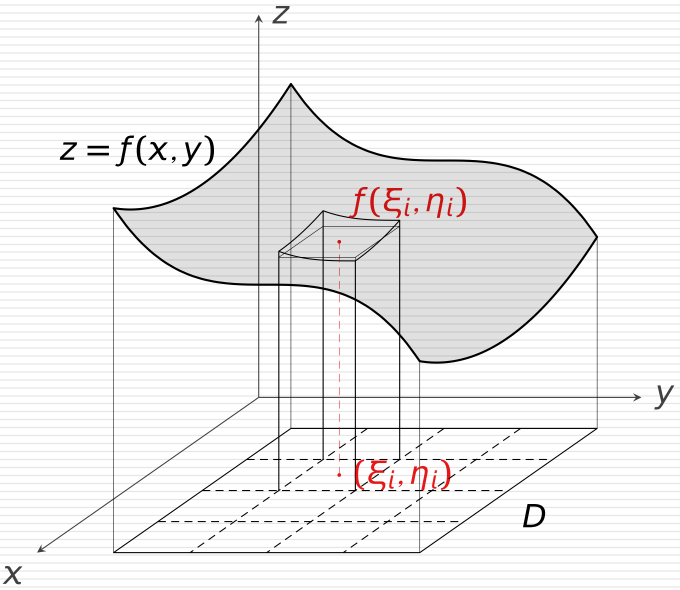

z
$z = f(x, y)$
y
D
x

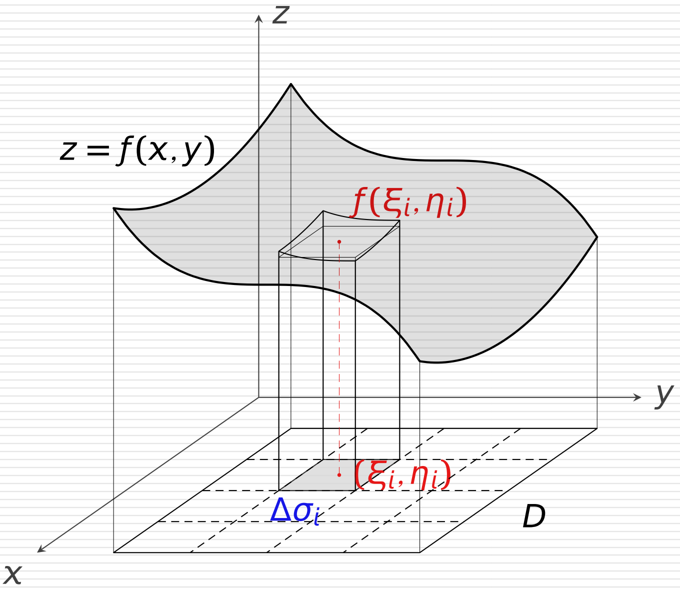


z
$z = f(x, y)$
y
D
x



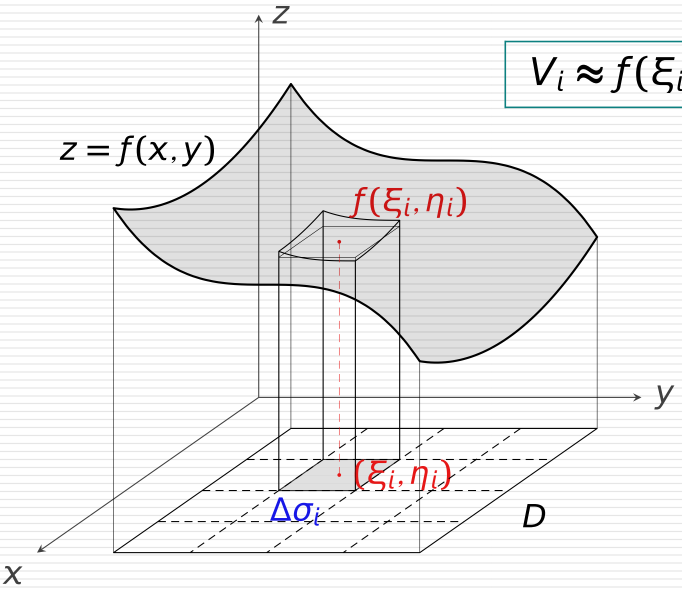
z
z = f(x, y)
y
(ξi, ηi)
D
x


z
$z = f(x,y)$
$f(\xi_i, \eta_i)$
y
(ξ_i, η_i)
D
x

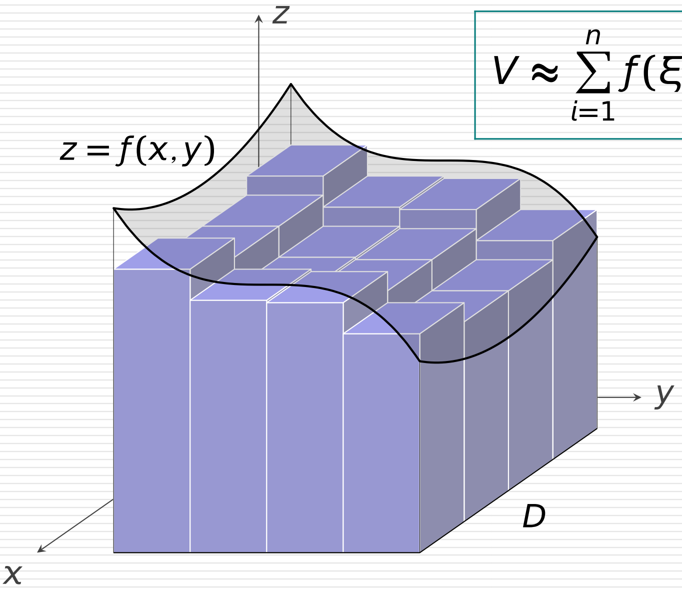


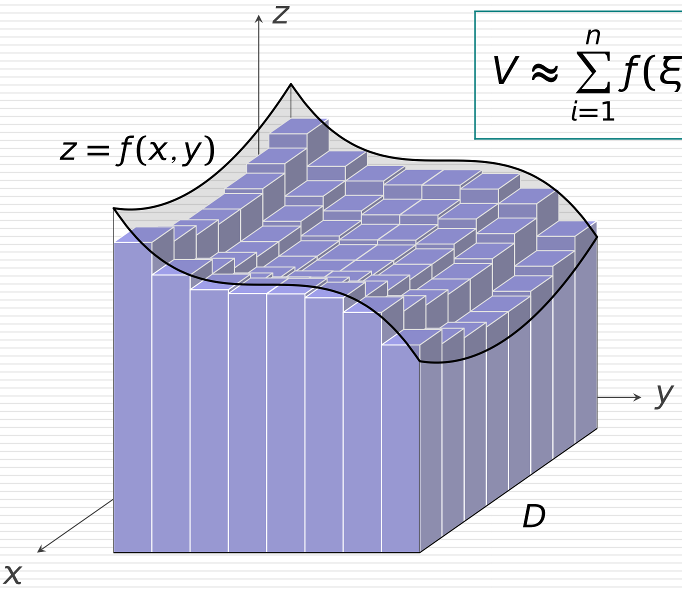
z
$z = f(x, y)$
$f(\xi_i, \eta_i)$
y
(ξ_i, η_i)
$\Delta\sigma_i$
D
x

$$V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

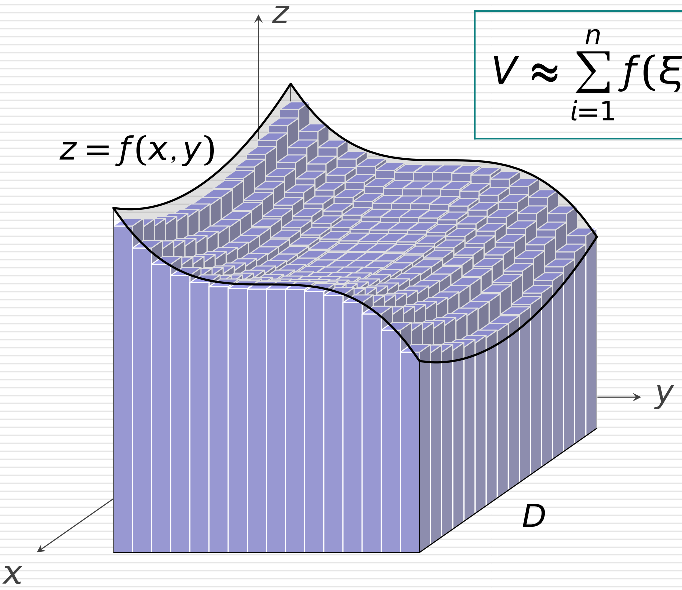


$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

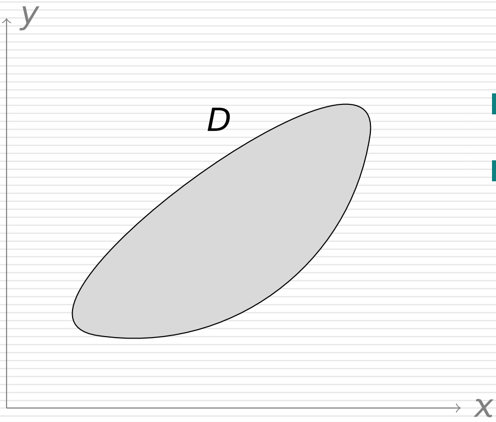




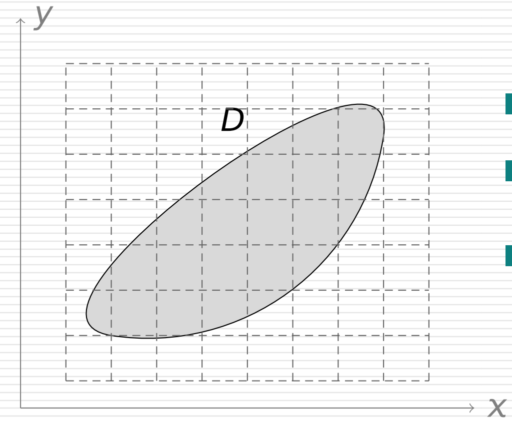
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



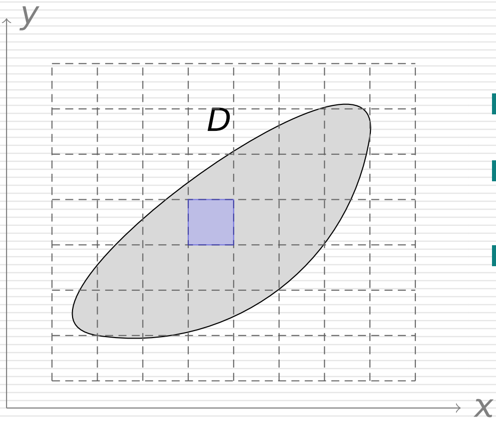
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



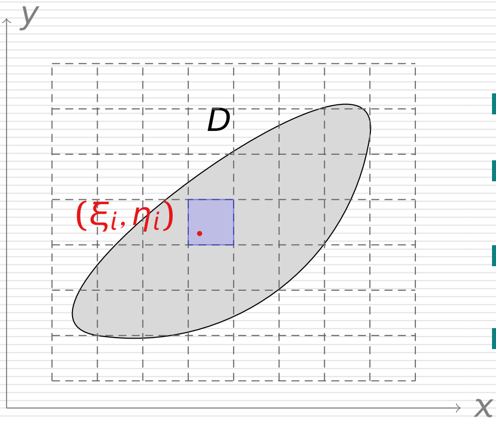
- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上



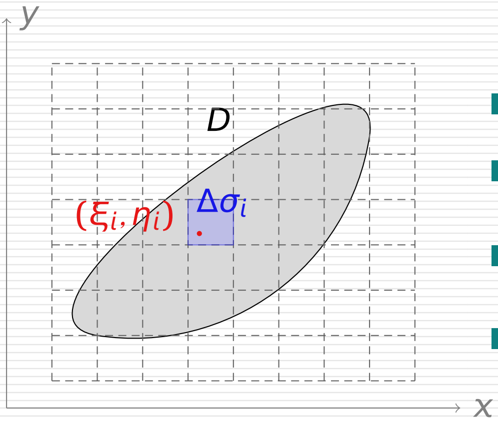
- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D = \bigcup_i D_i$



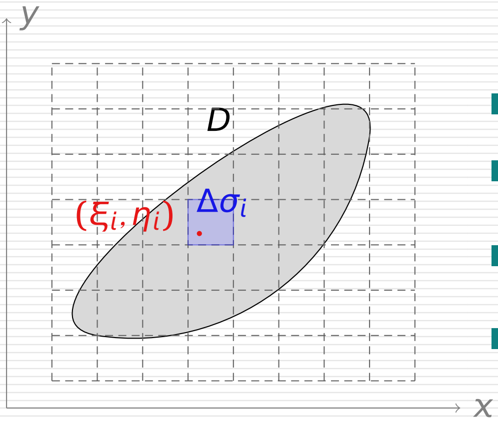
- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D = \bigcup_i D_i$



- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D=\bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$

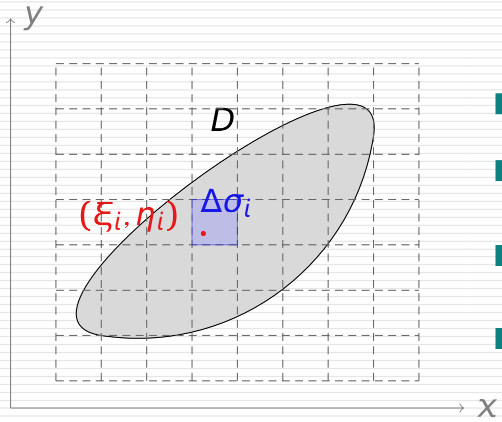


- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D = \bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i) \in D_i$



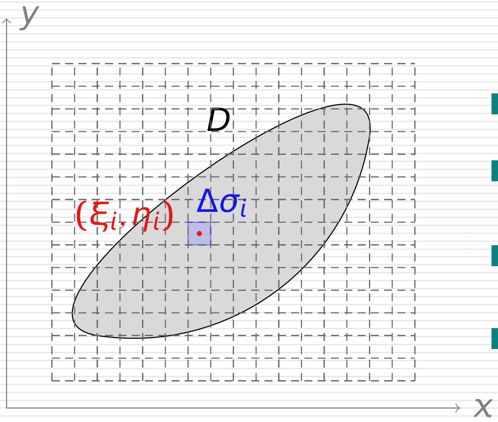
- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D=\bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



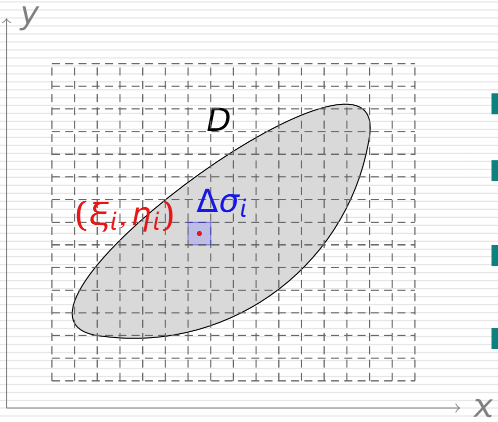
- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D = \bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i) \in D_i$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



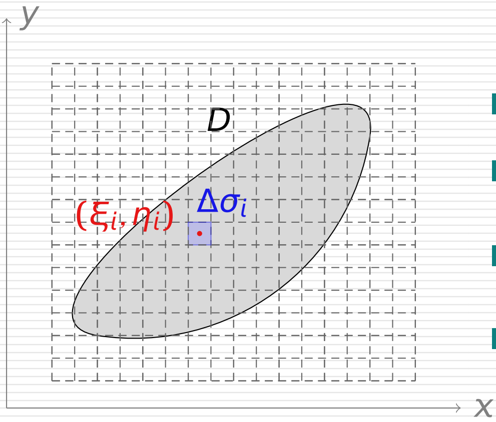
- D 是有界闭区域
- $f(x, y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D = \bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D=\bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D=\bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$

定义二重积分 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 中：

二重积分

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 中：

- D 称为积分区域

二重积分

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 中：

- D 称为积分区域
- $f(x,y)$ 称为被积函数

二重积分

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 中：

- D 称为积分区域
- $f(x,y)$ 称为被积函数
- $\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元素

二重积分

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 中：

- D 称为积分区域
- $f(x,y)$ 称为被积函数
- $\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元素

定理　若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 存在.

第一节	二重积分
A	二重积分的概念
B	二重积分的性质

二重积分的性质

性质 1 (函数可加性)

$$\iint_D \left[af(x,y)+bg(x,y)\right]\mathrm{d}\sigma = a\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + b\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

二重积分的性质

性质 1 (函数可加性)

$$\iint_D \left[af(x,y)+bg(x,y)\right]\mathrm{d}\sigma = a\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + b\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

性质 2 (区域可加性) 设积分区域 D 可以划分为 D_1 和 D_2，则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

二重积分的性质

性质 3　若在 D 上 $f(x,y)\equiv 1$，D 的面积为 A，则有

$$\iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma = A$$

二重积分的性质

性质 3　若在 D 上 $f(x,y)\equiv 1$，D 的面积为 A，则有

$$\iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma = A$$

性质 4　若在 D 上有 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

二重积分的性质

性质 5　设在 D 上 $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$，$D$ 的面积为 A，则有

$$mA \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant MA$$

二重积分的性质

性质 5　设在 D 上 $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$，$D$ 的面积为 A，则有

$$mA \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant MA$$

例 1　设 $D = \left\{(x,y) \,\middle|\, |x| + |y| \leqslant 1\right\}$，估计 $\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma$ 的大小.

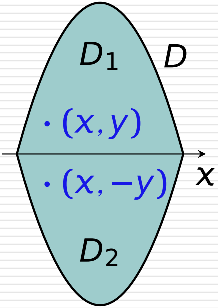
二重积分的性质

性质 6 (积分中值定理)　如果 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，D 的面积为 A，则在 D 中至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A$$

二重积分的对称性

性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 x 轴对称，

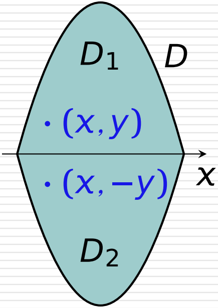


二重积分的对称性

性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 x 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$$



二重积分的对称性

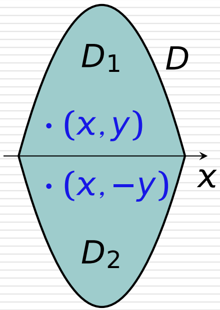
性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 x 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

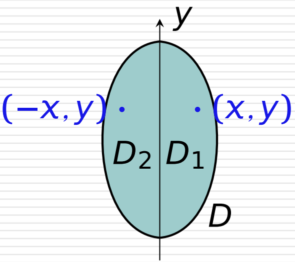
- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$



二重积分的对称性

性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 y 轴对称,

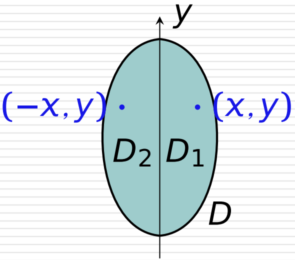


二重积分的对称性

性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$$



二重积分的对称性

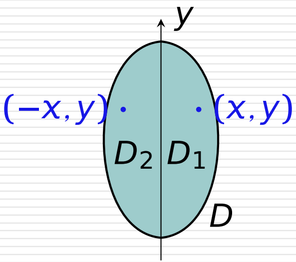
性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数，则

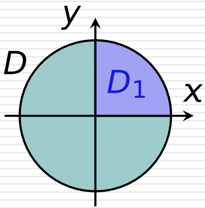
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$



二重积分的对称性

例 2　$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则

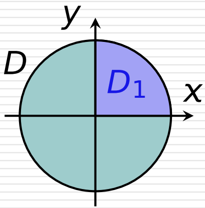
$$\iint_D x^2+y^2\,\mathrm{d}\sigma = 4\iint_{D_1} x^2+y^2\,\mathrm{d}\sigma$$



二重积分的对称性

例 2　$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则

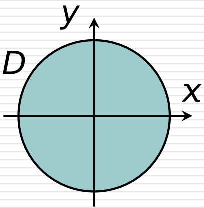
$$\iint_D x^2+y^2\,\mathrm{d}\sigma = 4\iint_{D_1} x^2+y^2\,\mathrm{d}\sigma$$



例 3　$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，则

$$\iint_D (2x+3y\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma+3\iint_D y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\sigma=0$$



复习与提高

题 1　比较下列积分的大小：

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} |xy|\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} |xy|\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$I_3 = \iint\limits_{\substack{-1\leqslant x\leqslant 1\\ -1\leqslant y\leqslant 1}} |xy|\,\mathrm{d}\sigma.$$

复习与提高

题 2　设 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 2\}$，估计下面积分的大小：

$$\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}.$$

题 3　设 D 由 $y=4-x^2$, $y=-3x$, $x=1$ 所围成，求二重积分

$$\iint_D x\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

复习与提高

选择 设有平面闭区域

$$D = \{(x,y) \mid -a \leqslant x \leqslant a,\ x \leqslant y \leqslant a\},$$

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a,\ x \leqslant y \leqslant a\}.$$

则 $\iint_D (xy + \cos x \sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\qquad)$

(A) $2\iint_{D_1} \cos x \sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(B) $2\iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(C) $4\iint_{D_1} (xy + \cos x \sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(D) 0

第二节	二重积分的计算法
A	用直角坐标计算二重积分
B	用极坐标计算二重积分

直角坐标中的二重积分

在直角坐标中，我们有 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，从而有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

X 型区域

如果区域 D 由直线 $x = a$ 和 $x = b$，以及曲线 $y = \phi_1(x)$ 和 $y = \phi_2(x)$ 围成，我们称 D 为 X 型区域.

X 型区域

如果区域 D 由直线 $x = a$ 和 $x = b$，以及曲线 $y = \phi_1(x)$ 和 $y = \phi_2(x)$ 围成，我们称 D 为 X 型区域.

即 X 型区域可以表示为：

$$D = \left\{(x, y) \middle| a \leqslant x \leqslant b, \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)\right\}$$

用直角坐标计算二重积分 I

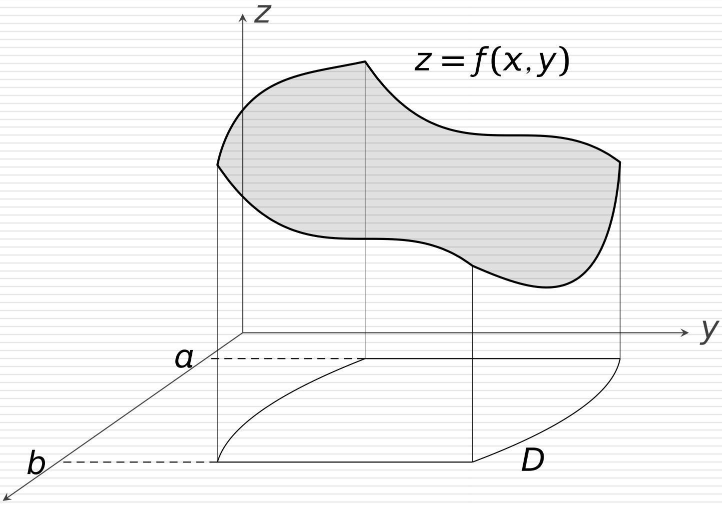
如果积分区域 D 为 X 型区域，即有

$$D = \left\{(x,y) \middle| a \leqslant x \leqslant b, \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)\right\}$$

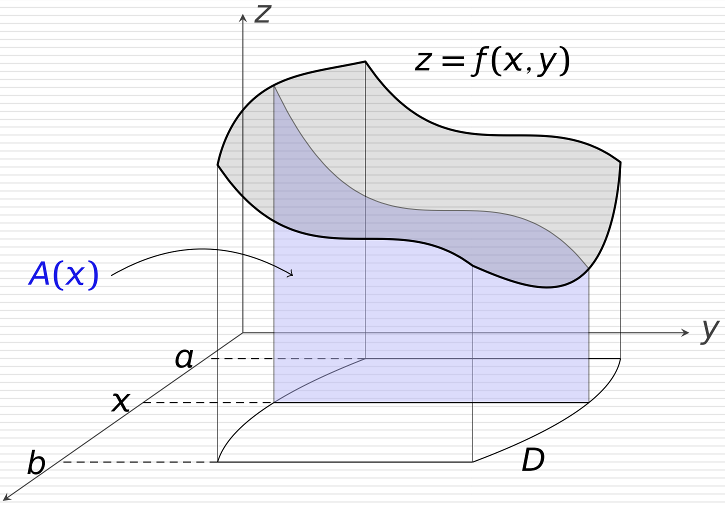
二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x.$$

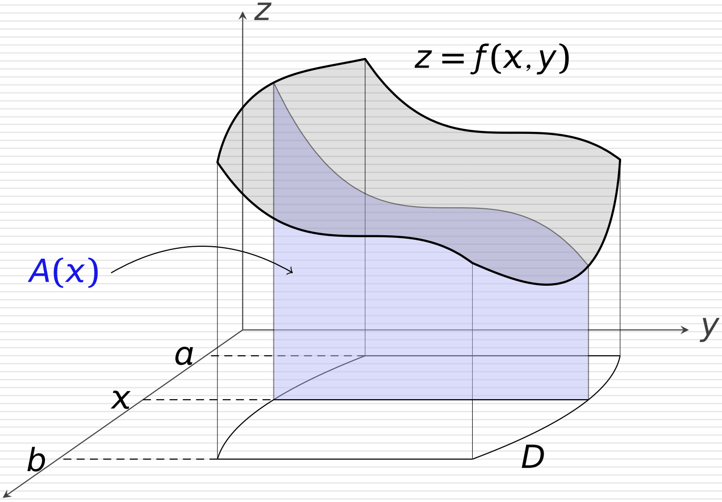
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$



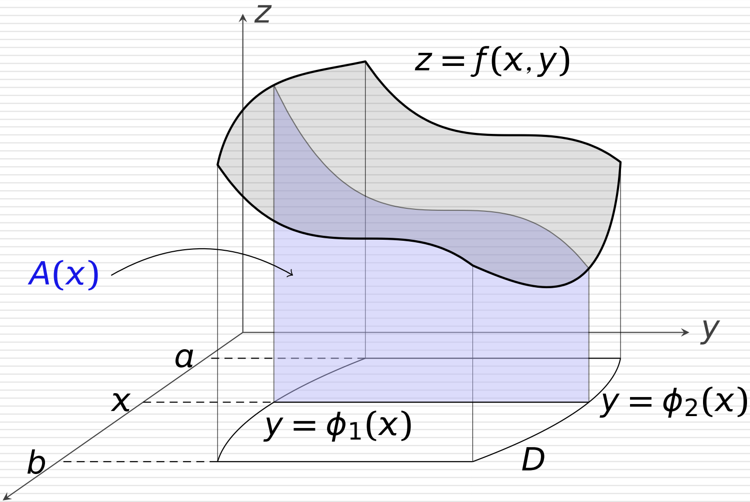
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$



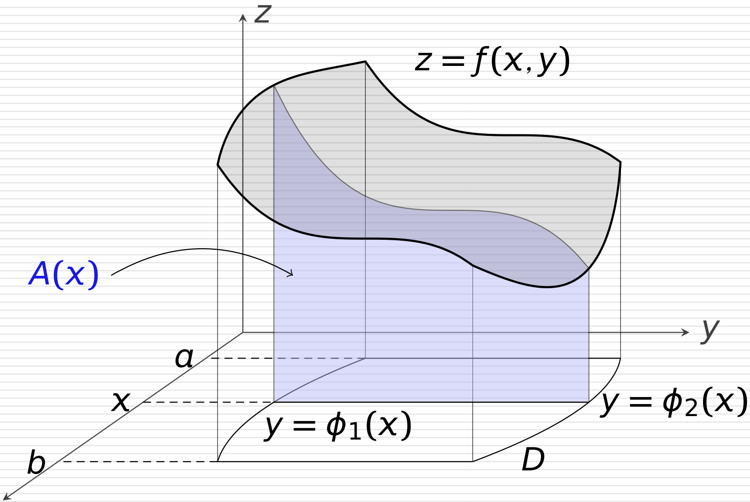
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$



例 1　计算二重积分 $\iint_D x^2 y \, d\sigma$，其中 D 是由 $x=1$，$y=2$ 与 $x+y=2$ 所围成的图形.

例 1　计算二重积分 $\iint_D x^2 y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=1$，$y=2$ 与 $x+y=2$ 所围成的图形.

例 2　计算二重积分 $\iint_D x^2 y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=0$，$y=0$ 与 $x^2+y^2=1$ 在第一象限所围成的图形.

练习 1　计算二重积分 $\iint_D (x+6y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=1$，$y=x$ 与 $y=5x$ 所围成的图形.

Y 型区域

如果区域 D 由直线 $y=c$ 和 $y=d$，以及曲线 $x=\phi_1(y)$ 和 $x=\phi_2(y)$ 围成，我们称 D 为 Y 型区域.

Y 型区域

如果区域 D 由直线 $y = c$ 和 $y = d$，以及曲线 $x = \phi_1(y)$ 和 $x = \phi_2(y)$ 围成，我们称 D 为 Y 型区域.

即 Y 型区域可以表示为：

$$D = \left\{(x, y) \middle| c \leqslant y \leqslant d, \phi_1(y) \leqslant x \leqslant \phi_2(y)\right\}$$

用直角坐标计算二重积分 II

如果积分区域 D 为 Y 型区域，即有

$$D = \left\{(x,y) \middle| c \leqslant y \leqslant d, \phi_1(y) \leqslant x \leqslant \phi_2(y)\right\}$$

二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_c^d \left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$$

例 3　求二重积分 $\iint_D x^2 y \, d\sigma$，其中 D 是由 $y = 0$，$y = x$ 与 $x + y = 2$ 所围成的图形.

例 3　求二重积分 $\iint_D x^2 y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=0$, $y=x$ 与 $x+y=2$ 所围成的图形.

例 4　求二重积分 $\iint_D x^2 y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=1$ 与 $x=y^2$ 所围成的图形.

练习2　用 X 型区域和 Y 型区域分别计算二重积分 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=0$，$y=1$ 及 $x+y=2$ 所围成的图形.

练习 2　用 X 型区域和 Y 型区域分别计算二重积分 $\iint_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=0$，$y=1$ 及 $x+y=2$ 所围成的图形. ………………………… $\frac{5}{24}$

矩形区域的二重积分

如果积分区域 D 为矩形区域，即

$$D = \left\{(x,y) \middle| a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\right\},$$

矩形区域的二重积分

如果积分区域 D 为矩形区域，即

$$D=\left\{(x,y)\middle|a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\right\},$$

而且被积函数 $f(x,y)$ 可分离变量，即

$$f(x,y)=g(x)h(y),$$

矩形区域的二重积分

如果积分区域 D 为矩形区域，即

$$D = \left\{(x,y) \middle| a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\right\},$$

而且被积函数 $f(x,y)$ 可分离变量，即

$$f(x,y) = g(x)h(y),$$

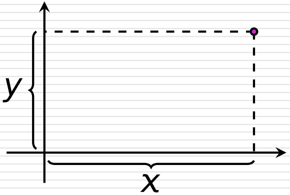
则二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

第二节	二重积分的计算法
A	用直角坐标计算二重积分
B	用极坐标计算二重积分

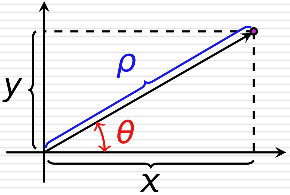
用极坐标计算二重积分

直角坐标 (x, y)



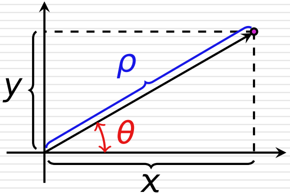
用极坐标计算二重积分

直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为



用极坐标计算二重积分

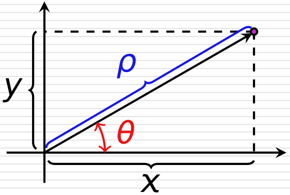
直角坐标 (x,y) 和极坐标 (ρ,θ) 的关系为



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

用极坐标计算二重积分

直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为

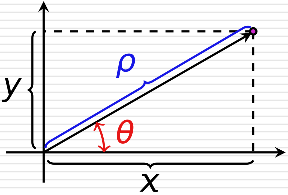


$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

如果积分区域是圆盘或者圆盘的一部分，用极坐标来计算更容易.

用极坐标计算二重积分

直角坐标 (x,y) 和极坐标 (ρ,θ) 的关系为

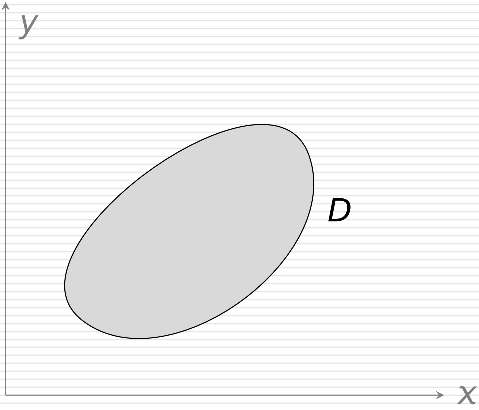


$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

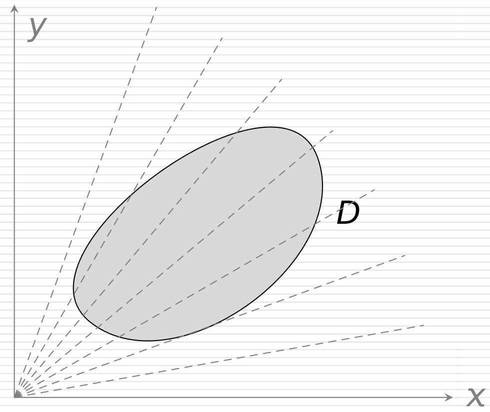
如果积分区域是圆盘或者圆盘的一部分，用极坐标来计算更容易．此时

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

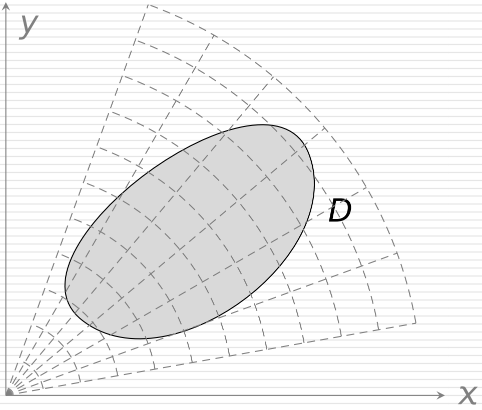
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



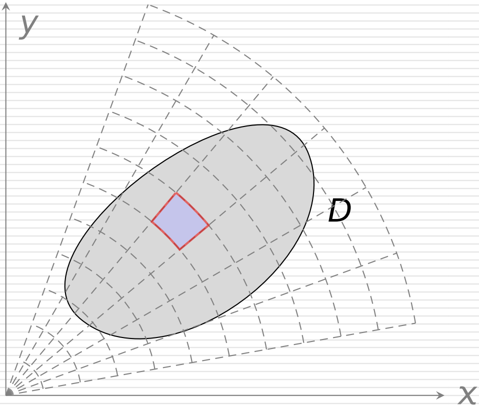
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



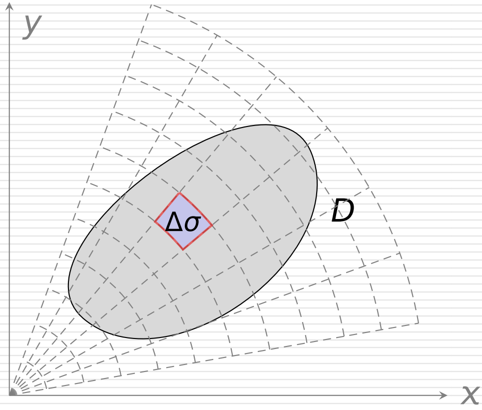
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



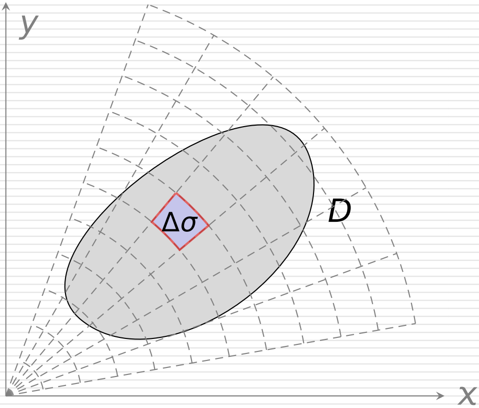
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

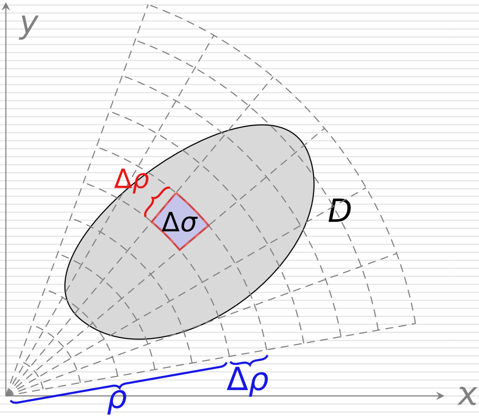


$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



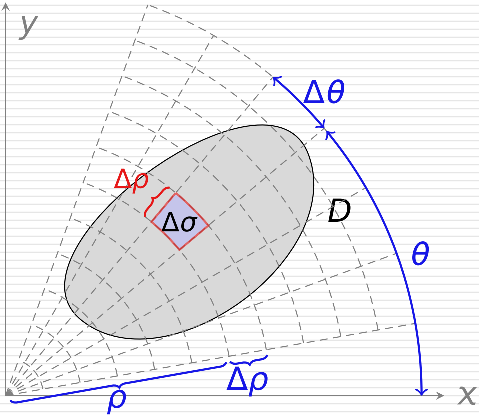
$$\Delta\sigma = ??$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



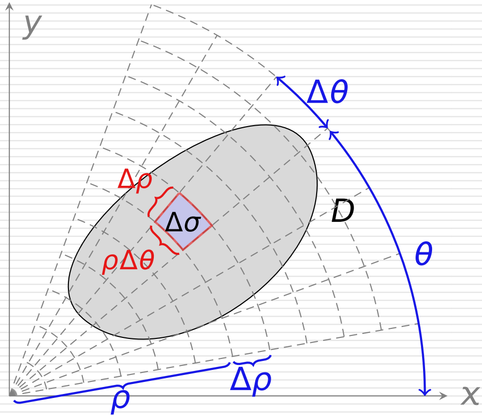
$$\Delta\sigma = ??$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$



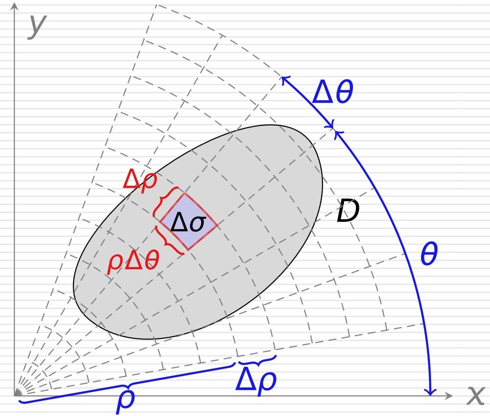
$$\Delta\sigma = ??$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



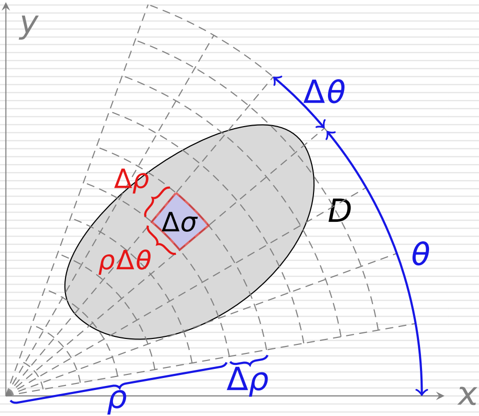
$$\Delta\sigma = ??$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



$$\Delta\sigma \approx \Delta\rho\cdot\rho\Delta\theta$$

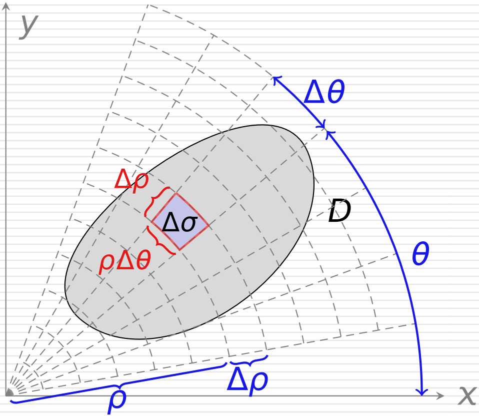
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



$$\Delta\sigma \approx \Delta\rho \cdot \rho\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\sigma \approx \rho \cdot \Delta\rho \cdot \Delta\theta$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

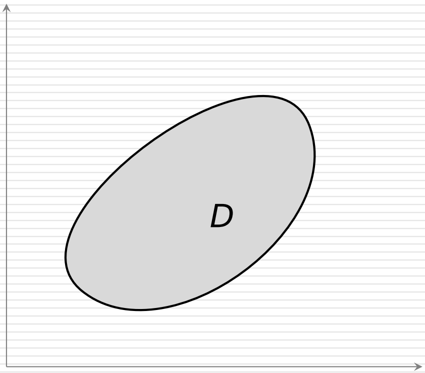


$$\Delta\sigma \approx \Delta\rho \cdot \rho\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\sigma \approx \rho \cdot \Delta\rho \cdot \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

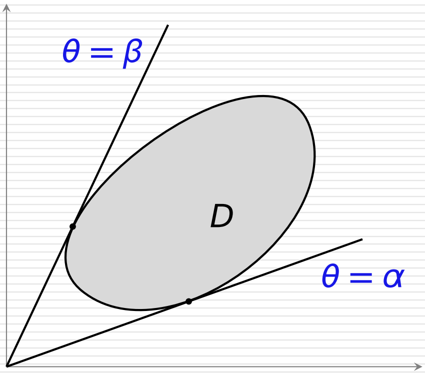
$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$



用极坐标表示积分区域

1. 先求 θ 的范围
2. 再求 ρ 的函数

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$

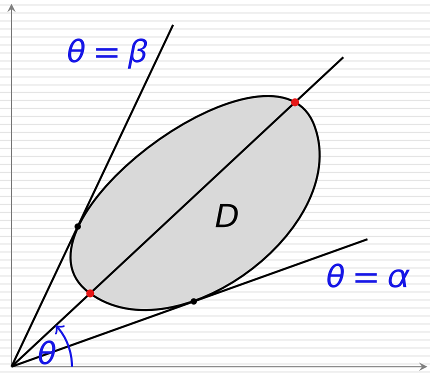


用极坐标表示积分区域

1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$



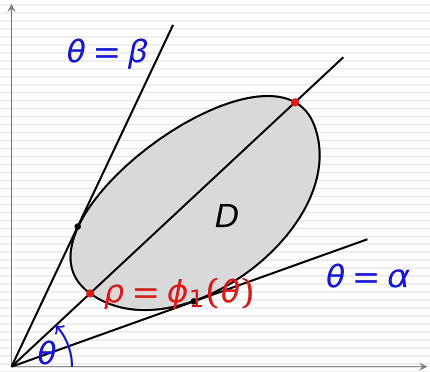
用极坐标表示积分区域

1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$D=\{(\rho,\theta)\,|\,\alpha\le\theta\le\beta, \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$$\iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$



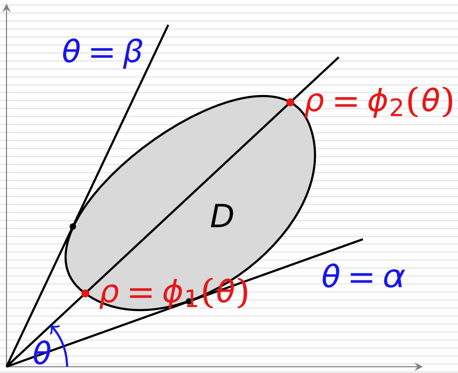
用极坐标表示积分区域

1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$D=\{(\rho,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta, \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$



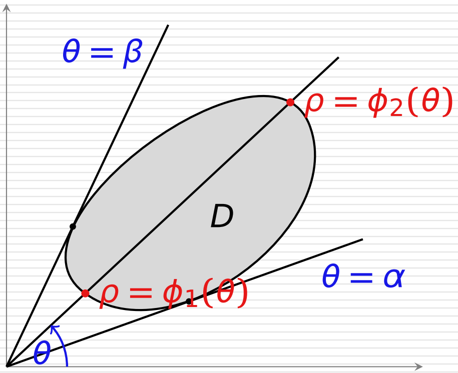
用极坐标表示积分区域

1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$D=\{(\rho,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta, \qquad\qquad\qquad\qquad \}$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$



用极坐标表示积分区域

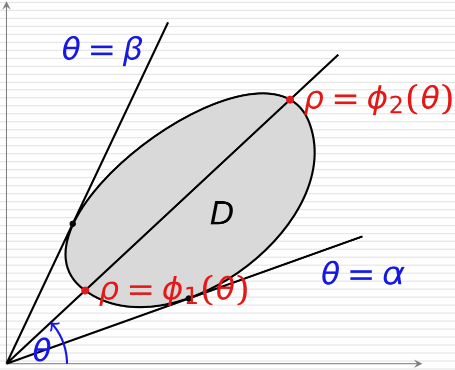
1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$D=\{(\rho,\theta)\,|\,\alpha\le\theta\le\beta,\ \phi_1(\theta)\le\rho\le\phi_2(\theta)\}$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\right]\mathrm{d}\theta$$



用极坐标表示积分区域

1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$D=\{(\rho,\theta)\,|\,\alpha\le\theta\le\beta,\ \phi_1(\theta)\le\rho\le\phi_2(\theta)\}$$

用极坐标计算二重积分

注记 圆心在原点半径为 R 的圆盘 D 用极坐标表示为

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant R\right\}.$$

用极坐标计算二重积分

注记 圆心在原点半径为 R 的圆盘 D 用极坐标表示为

$$D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant\rho\leqslant R\right\}.$$

例 5 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{1+x^2+y^2}$，其中 D 是半径为 1 的圆盘 $x^2+y^2\leqslant 1$.

用极坐标计算二重积分

例 6　计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆 $x^2+y^2=2y$ 围成的区域.

练习 3　计算二重积分 $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是半径为 1 的圆盘 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

练习 3　计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是半径为 1 的圆盘 $x^2+y^2 \leqslant 1$. …………………… $\frac{2\pi}{3}$

用极坐标计算二重积分

例 7 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma$，其中 D 是半径为 a 的圆盘 $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

用极坐标计算二重积分

例 7 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma$，其中 D 是半径为 a 的圆盘 $x^2+y^2 \leqslant a^2$.

注记 令 $a \to +\infty$，可以得到泊松积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

复习与提高

复习 1 计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=2$，$y=1$ 与 $y=x$ 所围成的图形.

复习与提高

复习 1　计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=2$，$y=1$ 与 $y=x$ 所围成的图形.

复习 2　计算二重积分 $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 所围成的图形.

复习与提高

例 8 (习题第 6 题)　交换下列二次积分的次序：

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$　　(2) $\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

复习与提高

例 8 (习题第 6 题)　交换下列二次积分的次序:

(1) $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y)\,\mathrm{d}x$　(2) $\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x \int_0^{\ln x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

例 9 (总习题第 1 题)　求积分 $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$.

复习与提高

题 1　交换下面二次积分的次序：

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_0^{x^2/2} f(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_2^{2\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

复习与提高

题 2　设 D 是由 $y=x$, $y=0$, $x=\pi$ 所围成的闭区域，求二重积分:

$$\iint_D \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}\sigma.$$

复习与提高

题 3　设闭区域 D 由圆周 $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$, $y-\sqrt{3}x=0$ 所围成，求积分

$$\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

题 4 设 $f(x,y)$ 连续，求下面函数的导数：

$$F(t)=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant t^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad (t>0).$$

复习与提高

选择　设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $F'(2)=$ ………………………………（　　）

(A) $2f(2)$　　(B) $f(2)$　　(C) $-f(2)$　　(D) 0

第三节	三重积分
A	三重积分的概念
B	三重积分的计算

例子　求占有空间 Ω 且密度为 $f(x,y,z)$ 的物体质量.

例子 求占有空间 Ω 且密度为 $f(x,y,z)$ 的物体质量.

定义 设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有界.

例子 求占有空间 Ω 且密度为 $f(x,y,z)$ 的物体质量.

定义 设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有界.

- 任意划分 $\Omega = \bigcup_i \Delta v_i$

例子 求占有空间 Ω 且密度为 $f(x,y,z)$ 的物体质量.

定义 设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有界.

- 任意划分 $\Omega = \bigcup_i \Delta v_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$

例子 求占有空间 Ω 且密度为 $f(x,y,z)$ 的物体质量.

定义 设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有界.

- 任意划分 $\Omega = \bigcup_i \Delta v_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

例子 求占有空间 Ω 且密度为 $f(x,y,z)$ 的物体质量.

定义 设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有界.

- 任意划分 $\Omega = \bigcup_i \Delta v_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i$$

例子 求占有空间 Ω 且密度为 $f(x,y,z)$ 的物体质量.

定义 设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有界.

- 任意划分 $\Omega = \bigcup_i \Delta v_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

例子　求占有空间 Ω 且密度为 $f(x,y,z)$ 的物体质量.

定义　设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有界.

- 任意划分 $\Omega = \bigcup_i \Delta v_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$

定义 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

例子 求占有空间 Ω 且密度为 $f(x,y,z)$ 的物体质量.

定义 设 $f(x,y,z)$ 在空间有界闭区域 Ω 上有界.

- 任意划分 $\Omega = \bigcup_i \Delta v_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Delta v_i$

定义 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上的三重积分

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

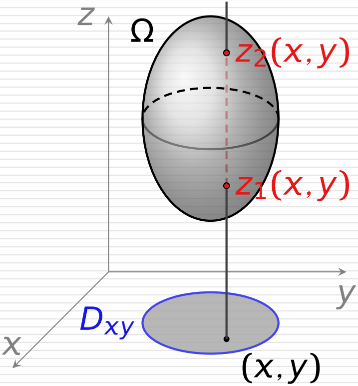
其中 $\mathrm{d}v$ 称为体积元素. $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

第三节	三重积分
A	三重积分的概念
B	三重积分的计算

直角坐标算三重积分：土豆丝法

先一后二：将积分区域表示为

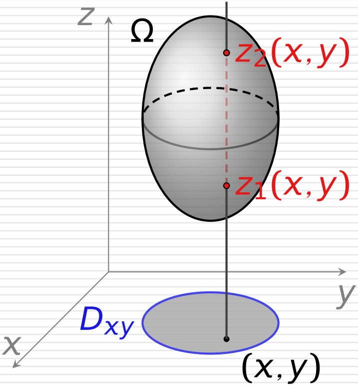
$$\Omega = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, (x,y) \in D_{xy}, \right.$$
$$\left. z_1(x,y) \leqslant z \leqslant z_2(x,y) \right\}$$



直角坐标算三重积分：土豆丝法

先一后二：将积分区域表示为

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, (x, y) \in D_{xy}, \; z_1(x, y) \leqslant z \leqslant z_2(x, y) \right\}$$



则有三重积分计算公式

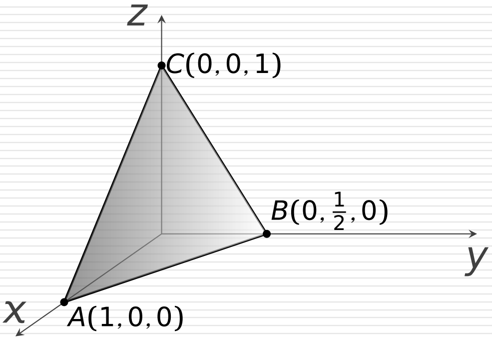
$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

直角坐标算三重积分

例 1　计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

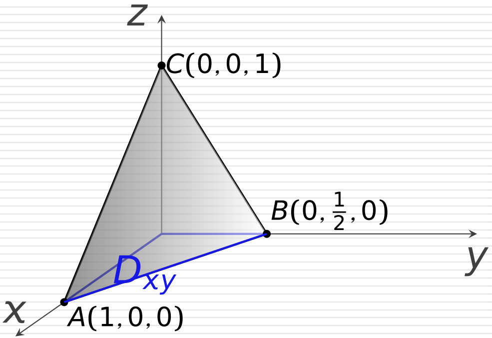
直角坐标算三重积分

例 1　计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.



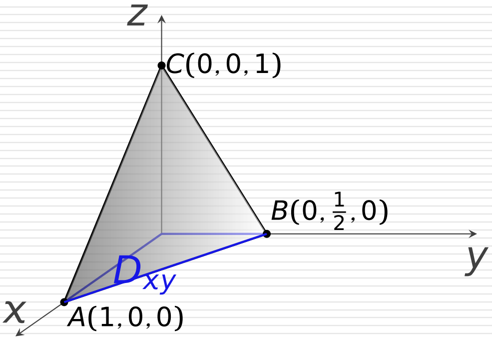
直角坐标算三重积分

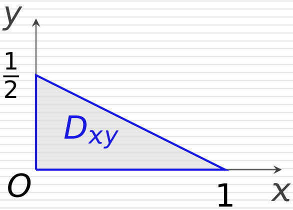
例 1 计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.



直角坐标算三重积分

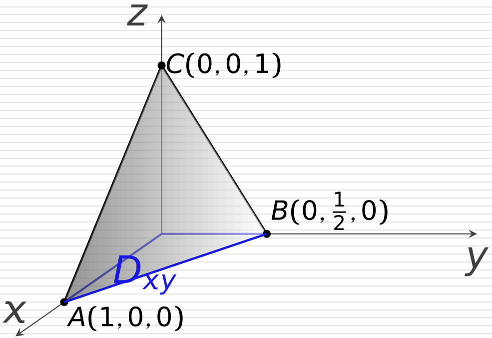
例 1　计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

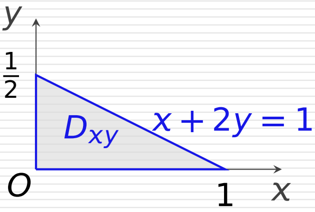




直角坐标算三重积分

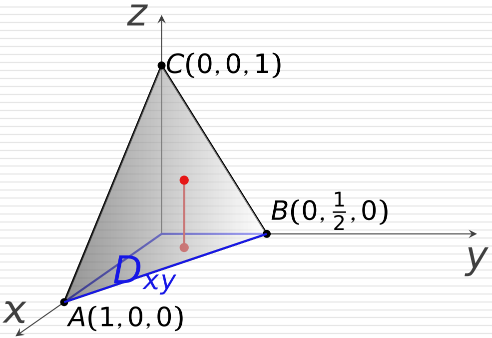
例 1 计算 $\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

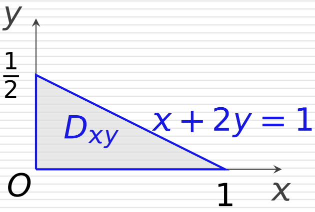




直角坐标算三重积分

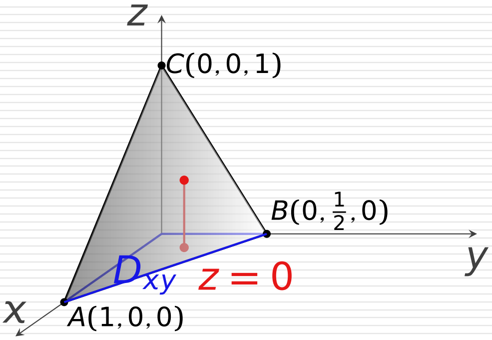
例 1 计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

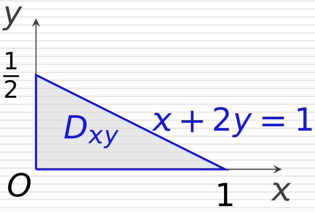




直角坐标算三重积分

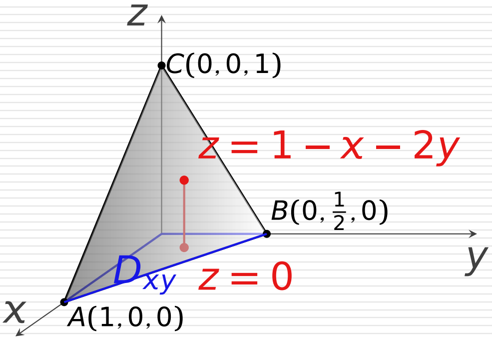
例 1 计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

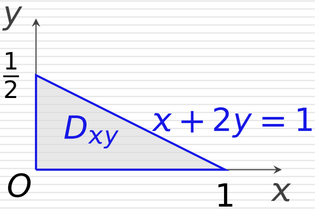




直角坐标算三重积分

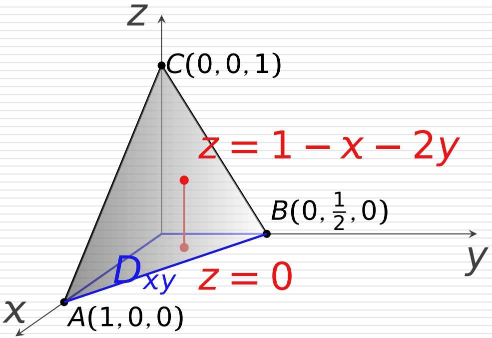
例 1　计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

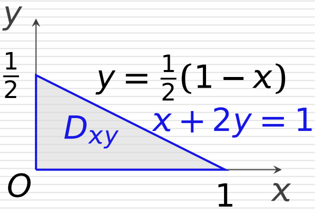




直角坐标算三重积分

例 1 计算 $\iiint\limits_{\Omega} x\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域.

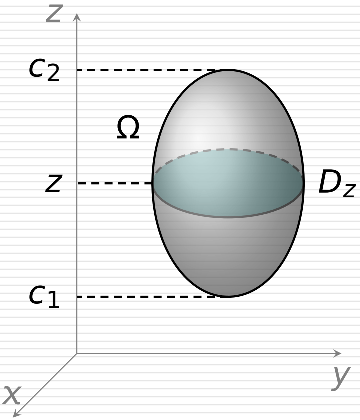




直角坐标算三重积分：土豆片法

先二后一：将积分区域表示为

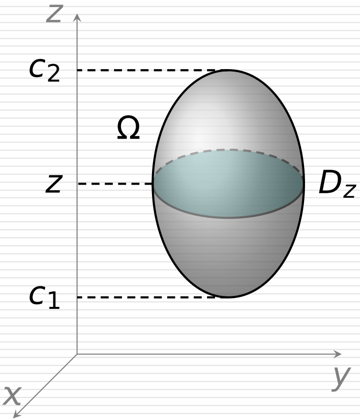
$$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,c_1\leqslant z\leqslant c_2,\ (x,y)\in D_z\}$$



直角坐标算三重积分：土豆片法

先二后一：将积分区域表示为

$$\Omega = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, c_1 \leqslant z \leqslant c_2, \; (x,y) \in D_z\right\}$$



则有三重积分计算公式

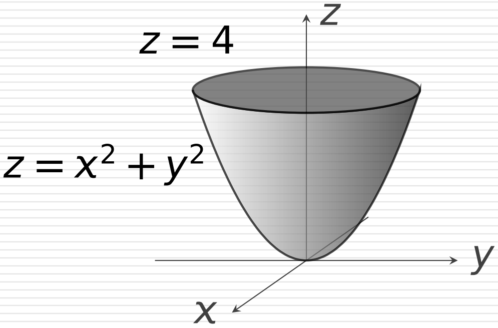
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_{c_1}^{c_2} \left[\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right] \mathrm{d}z$$

直角坐标算三重积分

例 2　利用直角坐标计算 $\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域.

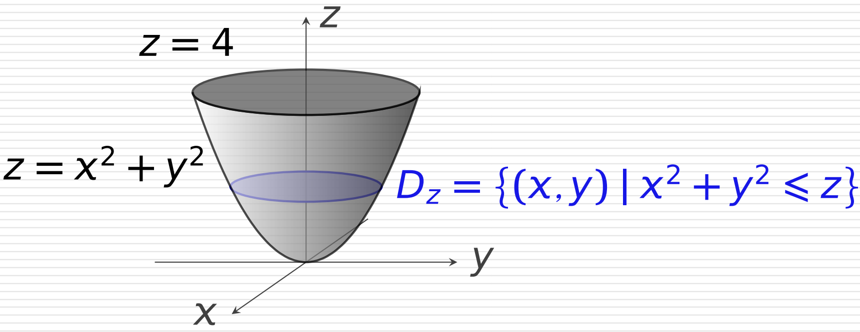
直角坐标算三重积分

例 2　利用直角坐标计算 $\iiint_{\Omega} z\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域.

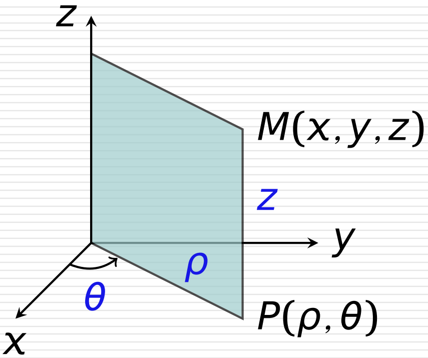


直角坐标算三重积分

例 2　利用直角坐标计算 $\iiint_\Omega z\,dx\,dy\,dz$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域.



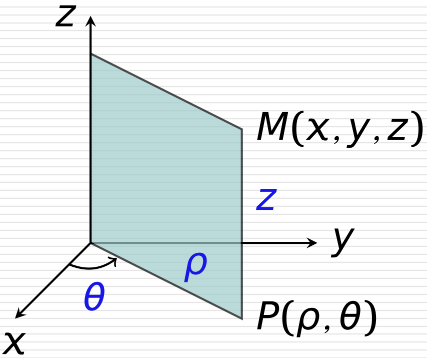
柱面坐标算三重积分



M 点柱面坐标是 (ρ,θ,z)

- $0 \leqslant \rho < +\infty$
- $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
- $-\infty < z < \infty$

柱面坐标算三重积分



M 点柱面坐标是 (ρ, θ, z)

- $0 \leqslant \rho < +\infty$
- $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$
- $-\infty < z < \infty$

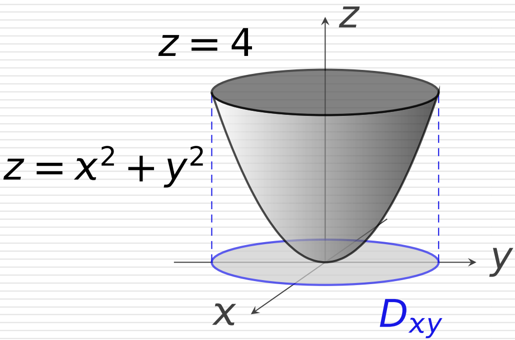
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

柱面坐标算三重积分

例 3　利用柱面坐标计算 $\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 4$ 所围成的闭区域.

柱面坐标算三重积分

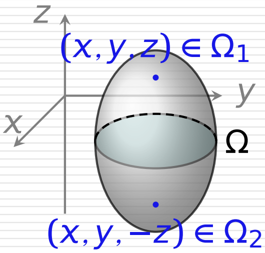
例 3　利用柱面坐标计算 $\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 是由曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=4$ 所围成的闭区域.



三重积分的对称性

性质 (奇偶对称性)

设空间中三维闭区域 Ω 关于 xy 坐标面对称，



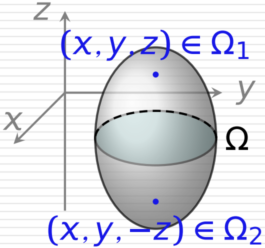
三重积分的对称性

性质 (奇偶对称性)

设空间中三维闭区域 Ω 关于 xy 坐标面对称，

(1) 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = 0$$



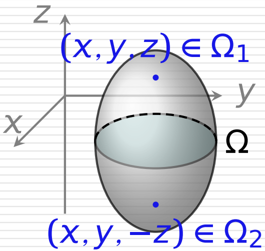
三重积分的对称性

性质 (奇偶对称性)

设空间中三维闭区域 Ω 关于 xy 坐标面对称，

(1) 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = 0$$



(2) 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

三重积分的对称性

例 4 (总习题第 9 题)　设 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2 \le 1$, 计算

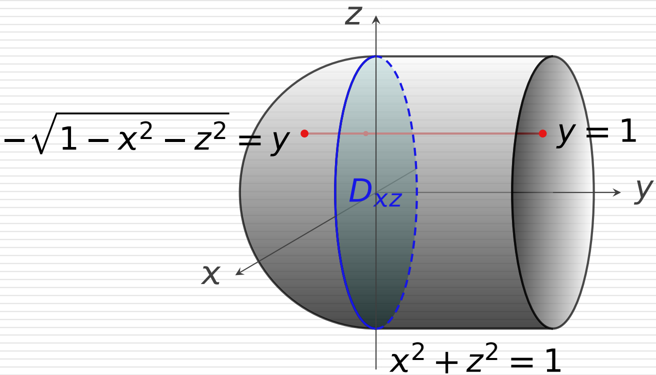
$$\iiint_\Omega \frac{z\ln(1+x^2+y^2)}{1+x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}v.$$

复习与提高

题 1 计算 $I = \iiint_{\Omega} y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $y = -\sqrt{1-x^2-z^2}$, $x^2+z^2=1$, $y=1$ 所围成.

复习与提高

题 1　计算 $I=\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 由 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$, $x^2+z^2=1$, $y=1$ 所围成.



复习与提高

选择　设有空间闭区域

$$\Omega_1 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\ z \geqslant 0\}$$

$$\Omega_2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0\}$$

则有…………………………………（　　）

(A) $\iiint_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} x\,\mathrm{d}v$

(B) $\iiint_{\Omega_1} y\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} y\,\mathrm{d}v$

(C) $\iiint_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} z\,\mathrm{d}v$

(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz\,\mathrm{d}v = 4\iiint_{\Omega_2} xyz\,\mathrm{d}v$

第一节 二重积分

第二节 二重积分的计算法

第三节 三重积分

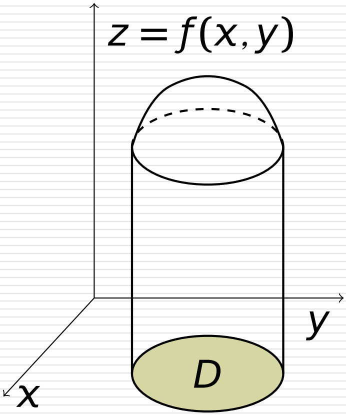
第四节 重积分的几何应用

第四节	重积分的几何应用
A	立体的体积
B	曲面的面积

二重积分与立体体积

设曲顶柱体的底面为 xOy 平面有界闭区域 D，顶面为连续曲面 $f(x,y)$，则它的体积为

$$V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

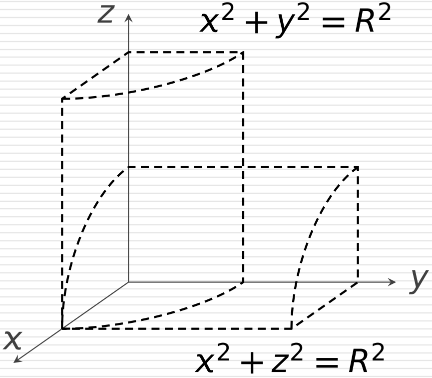


用直角坐标求立体体积

例 1　求两个底圆半径均为 R 的直交圆柱面所围成的立体体积.

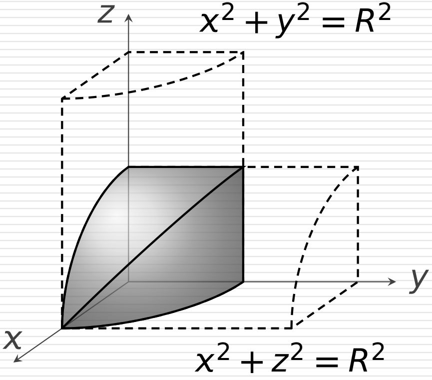
用直角坐标求立体体积

例 1　求两个底圆半径均为 R 的直交圆柱面所围成的立体体积.



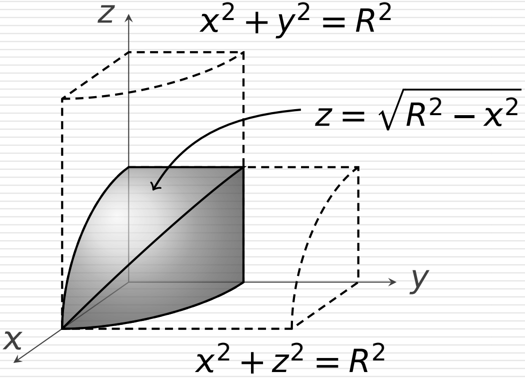
用直角坐标求立体体积

例 1　求两个底圆半径均为 R 的直交圆柱面所围成的立体体积.



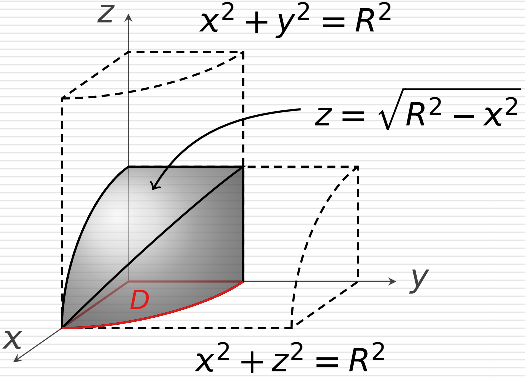
用直角坐标求立体体积

例 1　求两个底圆半径均为 R 的直交圆柱面所围成的立体体积.



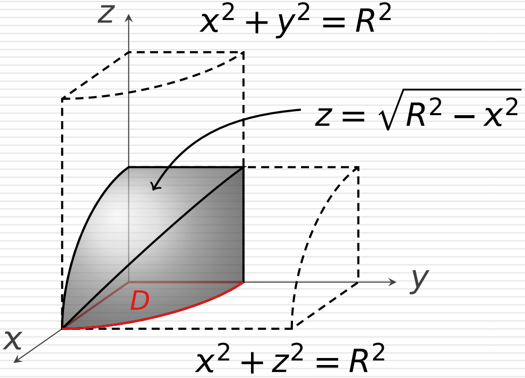
用直角坐标求立体体积

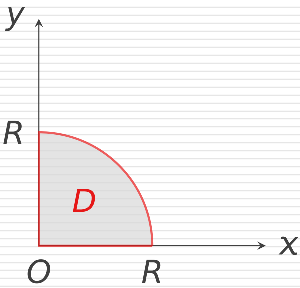
例 1　求两个底圆半径均为 R 的直交圆柱面所围成的立体体积.



用直角坐标求立体体积

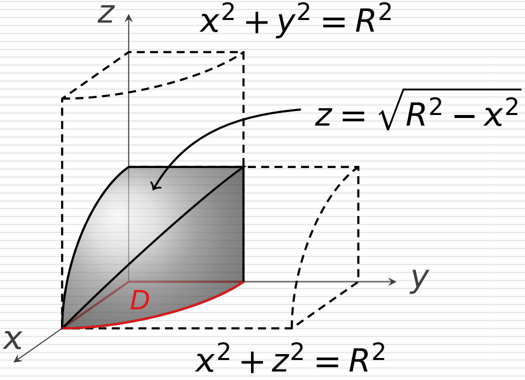
例 1　求两个底圆半径均为 R 的直交圆柱面所围成的立体体积.

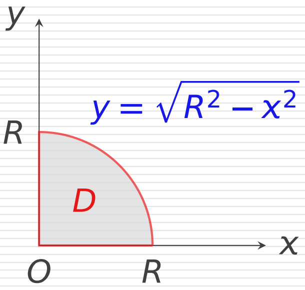




用直角坐标求立体体积

例 1　求两个底圆半径均为 R 的直交圆柱面所围成的立体体积.



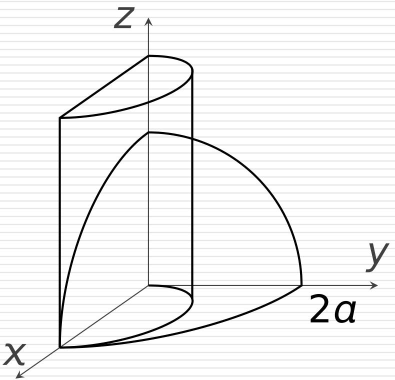


用极坐标求立体体积

例 2　求球体 $x^2+y^2+z^2 \le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$（$a>0$）所截得的立体的体积.

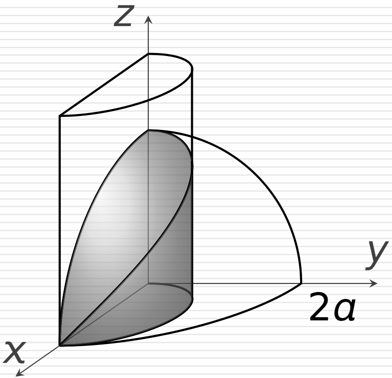
用极坐标求立体体积

例 2　求球体 $x^2+y^2+z^2 \le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$（$a>0$）所截得的立体的体积.



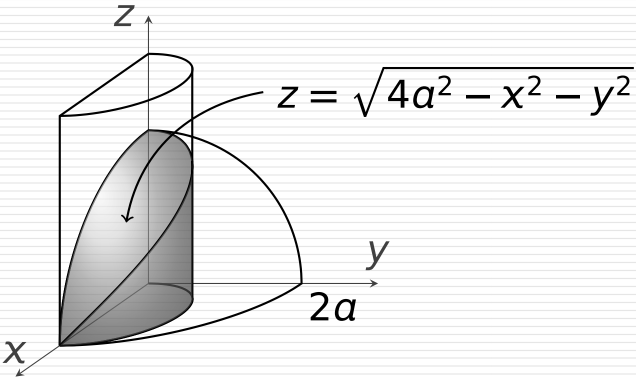
用极坐标求立体体积

例 2 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$（$a>0$）所截得的立体的体积.



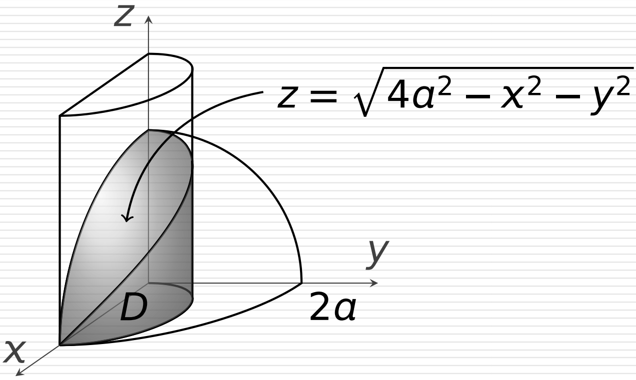
用极坐标求立体体积

例 2 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$（$a>0$）所截得的立体的体积.



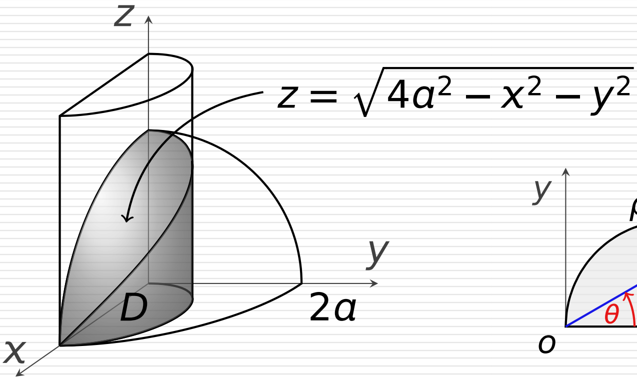
用极坐标求立体体积

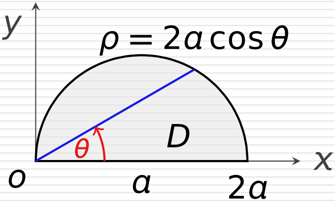
例 2　求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$（$a>0$）所截得的立体的体积.



用极坐标求立体体积

例 2 求球体 $x^2+y^2+z^2 \le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$（$a>0$）所截得的立体的体积.





三重积分与立体体积

占有空间有界闭区域 Ω 的立体的体积为

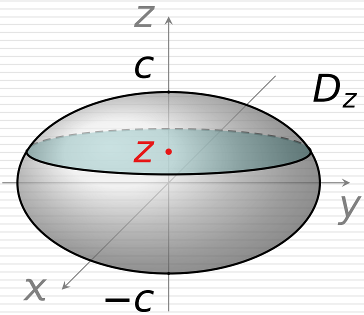
$$V = \iiint_{\Omega} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

用三重积分求立体体积

例 3　试计算椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的体积 V.

用三重积分求立体体积

例 3　试计算椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的体积 V.



$$D_z=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\}$$

第四节	重积分的几何应用
A	立体的体积
B	曲面的面积

曲面的面积

设 Σ 由 $z = f(x, y)$ 给出，在 xOy 面投影区域为 D，且 $f(x, y)$ 在 D 上有连续偏导数，求曲面的面积 S.

曲面的面积

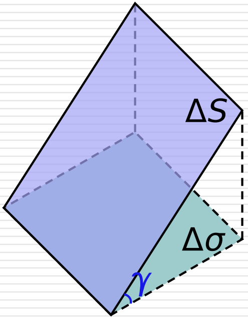
设 Σ 由 $z=f(x,y)$ 给出，在 xOy 面投影区域为 D，且 $f(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数，求曲面的面积 S.

对小块曲面 $\mathrm{d}S$ 用切平面区域 ΔS 近似，其投影为 $\Delta\sigma$.

曲面的面积

设 Σ 由 $z = f(x, y)$ 给出，在 xOy 面投影区域为 D，且 $f(x, y)$ 在 D 上有连续偏导数，求曲面的面积 S.

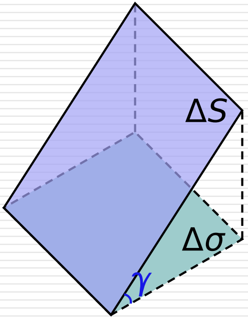
对小块曲面 dS 用切平面区域 ΔS 近似，其投影为 $\Delta\sigma$.



曲面的面积

设 Σ 由 $z = f(x, y)$ 给出，在 xOy 面投影区域为 D，且 $f(x, y)$ 在 D 上有连续偏导数，求曲面的面积 S.

对小块曲面 dS 用切平面区域 ΔS 近似，其投影为 $\Delta\sigma$.

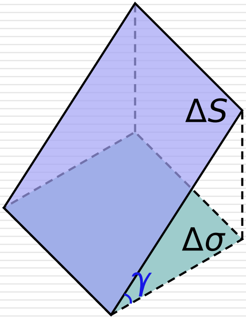


$$\Delta S = \frac{1}{\cos\gamma}\Delta\sigma$$

曲面的面积

设 Σ 由 $z = f(x, y)$ 给出，在 xOy 面投影区域为 D，且 $f(x, y)$ 在 D 上有连续偏导数，求曲面的面积 S.

对小块曲面 $\mathrm{d}S$ 用切平面区域 ΔS 近似，其投影为 $\Delta\sigma$.

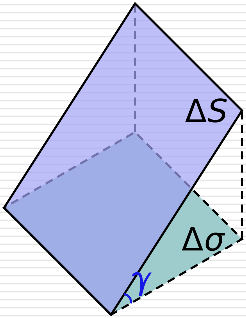


$$\Delta S = \frac{1}{\cos\gamma}\Delta\sigma \Rightarrow \mathrm{d}S = \frac{1}{\cos\gamma}\mathrm{d}\sigma$$

曲面的面积

设 Σ 由 $z=f(x,y)$ 给出，在 xOy 面投影区域为 D，且 $f(x,y)$ 在 D 上有连续偏导数，求曲面的面积 S.

对小块曲面 $\mathrm{d}S$ 用切平面区域 ΔS 近似，其投影为 $\Delta\sigma$.



$$\Delta S=\frac{1}{\cos\gamma}\Delta\sigma \Rightarrow \mathrm{d}S=\frac{1}{\cos\gamma}\mathrm{d}\sigma$$

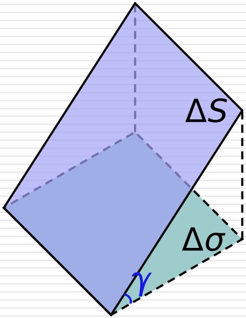
平面 ΔS 的法向量 $\vec{n}=(-f'_x,-f'_y,1)$

平面 $\Delta\sigma$ 的法向量 $\vec{k}=(0,0,1)$

曲面的面积

设 Σ 由 $z = f(x, y)$ 给出，在 xOy 面投影区域为 D，且 $f(x, y)$ 在 D 上有连续偏导数，求曲面的面积 S.

对小块曲面 dS 用切平面区域 ΔS 近似，其投影为 $\Delta\sigma$.



$$\Delta S = \frac{1}{\cos\gamma}\Delta\sigma \Rightarrow \mathrm{d}S = \frac{1}{\cos\gamma}\mathrm{d}\sigma$$

平面 ΔS 的法向量 $\vec{n} = (-f'_x, -f'_y, 1)$

平面 $\Delta\sigma$ 的法向量 $\vec{k} = (0, 0, 1)$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f'_x(x, y)^2 + f'_y(x, y)^2}}$$

曲面的面积

曲面的面积元素 $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2}\,\mathrm{d}\sigma$.

曲面的面积

曲面的面积元素 $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2}\,\mathrm{d}\sigma$.

曲面的面积

曲面的面积元素 $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2}\,\mathrm{d}\sigma$.

设曲面 $z = f(x,y)$ 在 xOy 面上的投影区域为 D，且 $f(x,y)$ 的偏导数连续，则曲面的面积为

$$S = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = \iint_{D} \sqrt{1 + f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

曲面的面积

曲面的面积元素 $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2}\,\mathrm{d}\sigma$.

设曲面 $z = f(x,y)$ 在 xOy 面上的投影区域为 D，且 $f(x,y)$ 的偏导数连续，则曲面的面积为

$$S = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = \iint_{D} \sqrt{1 + f_x'(x,y)^2 + f_y'(x,y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

例 4 求半径为 a 的球的表面积.

题 1　计算双曲抛物面 $z = xy$ 被柱面 $x^2 + y^2 = R^2$ 所截出的面积 S.