

高等数学课程

第十一章 · 曲线积分与曲面积分

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

积分域



积分学

章节

直线区间



定积分

第五章

平面区域



二重积分

第十章

空间区域



三重积分

第十章

曲线弧段



曲线积分

§1, §2

曲面区域



曲面积分

§4, §5

积分域	↪	积分学	章节
直线区间	↪	定积分	第五章
平面区域	↪	二重积分	第十章
空间区域	↪	三重积分	第十章
曲线弧段	↪	曲线积分	§1, §2
曲面区域	↪	曲面积分	§4, §5

积分关系	↪	积分公式	章节
曲线积分与二重积分	↪	格林公式	§3
曲面积分与三重积分	↪	高斯公式	§6
曲线积分与曲面积分	↪	斯托克斯公式	§7

第一节

对弧长的曲线积分

第二节

对坐标的曲线积分

第三节

格林公式

第四节

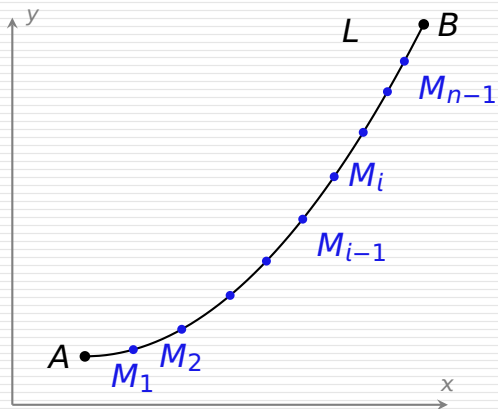
对面积的曲面积分

第五节

对坐标的曲面积分

引例：曲线型构件的质量

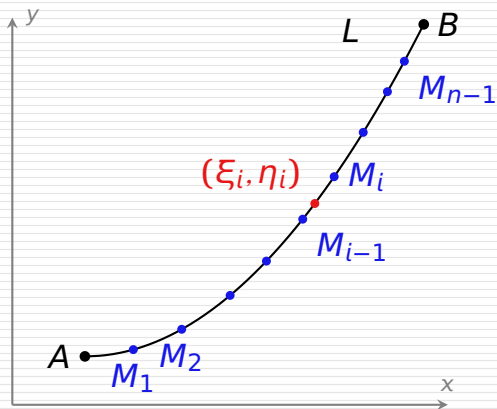
问题 设有曲线型构件 L ，其位置在 xy 平面内，两个端点是 A 和 B ，线密度为 $f(x,y)$. 计算此构件的质量.



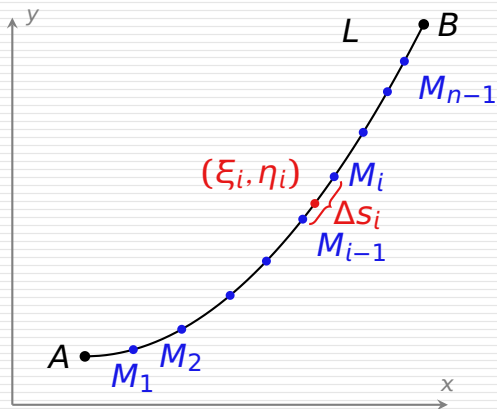
■ L 在平面上分段光滑

■ $f(x, y)$ 在 L 上有界

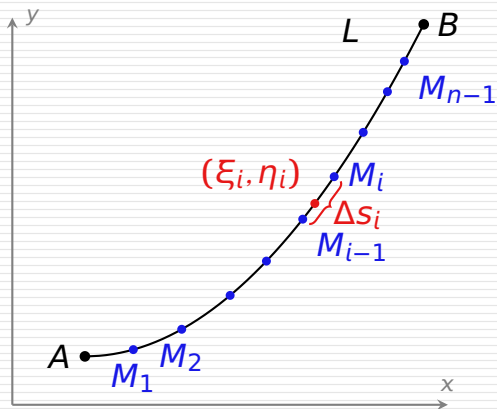
■ 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$



- L 在平面上分段光滑
- $f(x, y)$ 在 L 上有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$

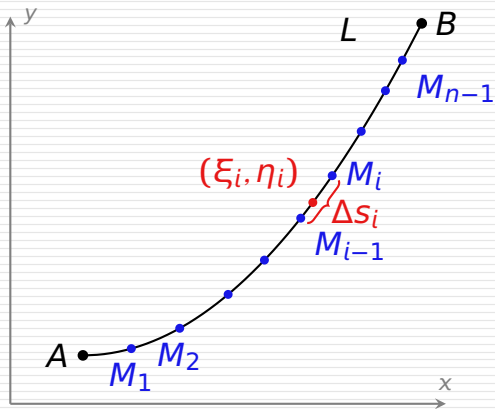


- L 在平面上分段光滑
- $f(x, y)$ 在 L 上有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$



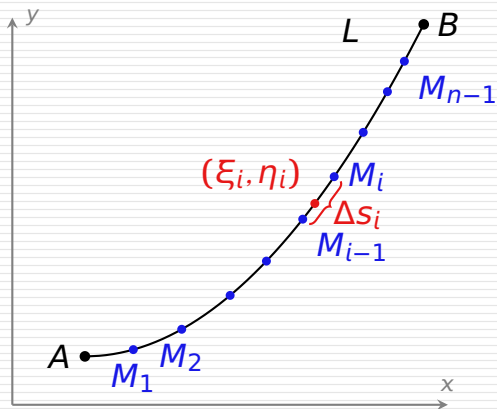
- L 在平面上分段光滑
- $f(x, y)$ 在 L 上有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$

$$f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$



- L 在平面上分段光滑
- $f(x, y)$ 在 L 上有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$



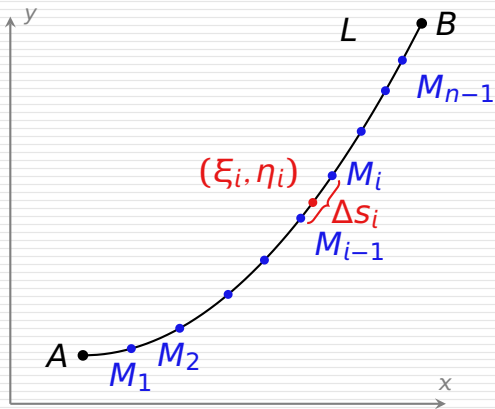
■ L 在平面上分段光滑

■ $f(x, y)$ 在 L 上有界

■ 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$

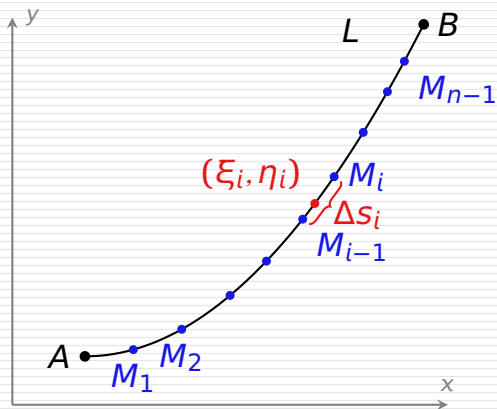
■ 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$



- L 在平面上分段光滑
- $f(x, y)$ 在 L 上有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$

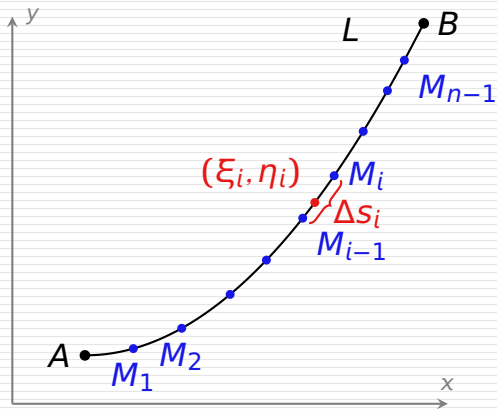
$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$



- L 在平面上分段光滑
- $f(x, y)$ 在 L 上有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$

定义 $f(x, y)$ 在 L 上的对弧长的曲线积分

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$



- L 在平面上分段光滑
- $f(x, y)$ 在 L 上有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$

定义 $f(x, y)$ 在 L 上的对弧长的曲线积分

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta s_i$$

其中 L 称为积分弧段, ds 称为弧长元素.

对弧长的曲线积分

注记 1 对弧长的曲线积分又称为第一类曲线积分.

对弧长的曲线积分

注记 1 对弧长的曲线积分又称为第一类曲线积分.

注记 2 对闭曲线 L , 记 $\int_L f(x, y) ds = \oint_L f(x, y) ds$.

对弧长的曲线积分

注记 1 对弧长的曲线积分又称为第一类曲线积分.

注记 2 对闭曲线 L , 记 $\int_L f(x, y) ds = \oint_L f(x, y) ds$.

注记 3 若 L 是分段光滑曲线, $f(x, y)$ 在 L 上连续, 则 $\int_L f(x, y) ds$ 存在.

对弧长的曲线积分

注记 1 对弧长的曲线积分又称为第一类曲线积分.

注记 2 对闭曲线 L , 记 $\int_L f(x, y) ds = \oint_L f(x, y) ds$.

注记 3 若 L 是分段光滑曲线, $f(x, y)$ 在 L 上连续, 则 $\int_L f(x, y) ds$ 存在.

注记 4 $\int_L 1 ds = \text{Length}(L)$, 即曲线弧 L 的长度.

对弧长的曲线积分的性质

性质 1 (线性和) 设 α 和 β 为常数, 则

$$\int_L (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_L f ds + \beta \int_L g ds$$

对弧长的曲线积分的性质

性质 1 (线性和) 设 α 和 β 为常数, 则

$$\int_L (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_L f ds + \beta \int_L g ds$$

性质 2 (分段和) 将积分弧段 L 分成 L_1 和 L_2 , 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds$$

对弧长的曲线积分的性质

性质 1 (线性和) 设 α 和 β 为常数, 则

$$\int_L (\alpha f + \beta g) ds = \alpha \int_L f ds + \beta \int_L g ds$$

性质 2 (分段和) 将积分弧段 L 分成 L_1 和 L_2 , 则

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{L_1} f(x, y) ds + \int_{L_2} f(x, y) ds$$

性质 3 (保号性) 若在 L 上 $f(x, y) \geq g(x, y)$, 则

$$\int_L f(x, y) ds \geq \int_L g(x, y) ds$$

第一节

对弧长的曲线积分

A

概念与性质

B

计算方法

第一类曲线积分的计算

性质 设平面曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, 其中 $a \leq t \leq b$, 则弧长元素

$$ds = \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

第一类曲线积分的计算

性质 设平面曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, 其中 $a \leq t \leq b$, 则弧长元素

$$ds = \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt.$$

.....

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(\phi(t), \psi(t)) \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt$$

第一类曲线积分的计算

特别地，若曲线方程为 $y = \psi(x)$ ($a \leq x \leq b$)，则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, \psi(x)] \sqrt{1 + \psi'(x)^2} dx$$

第一类曲线积分的计算

特别地, 若曲线方程为 $y = \psi(x)$ ($a \leq x \leq b$), 则有

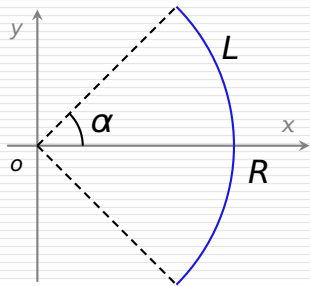
$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[x, \psi(x)] \sqrt{1 + \psi'(x)^2} dx$$

.....

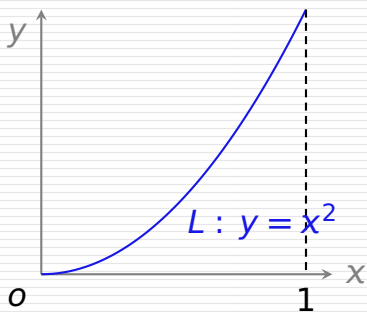
若曲线方程为 $x = \phi(y)$ ($a \leq y \leq b$), 则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f[\phi(y), y] \sqrt{\phi'(y)^2 + 1} dy$$

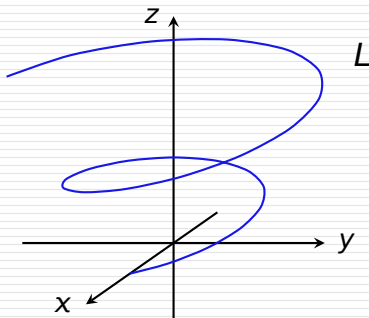
例 1 求 $\int_L y^2 ds$, 其中 L 如右图.



例2 计算 $\int_L \sqrt{y} ds$, 其中 L 如右图所示.



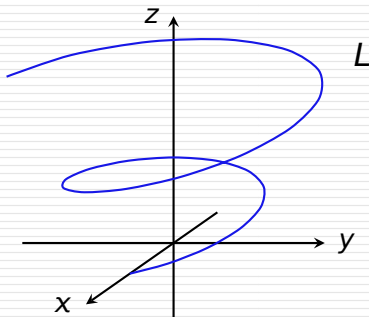
第一类曲线积分：空间曲线



第一类曲线积分：空间曲线

设空间曲线 L 的参数方程是

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \zeta(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b)$$

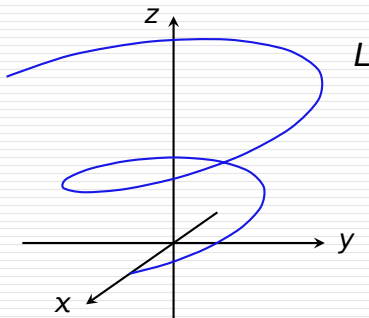


第一类曲线积分：空间曲线

设空间曲线 L 的参数方程是

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \zeta(t) \end{cases} \quad (a \leq t \leq b)$$

则 $\int_L f(x, y, z) ds$



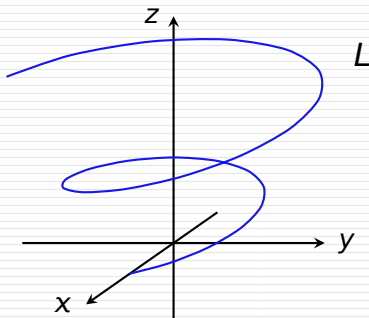
第一类曲线积分：空间曲线

设空间曲线 L 的参数方程是

$$\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \quad (a \leq t \leq b) \\ z = \zeta(t) \end{cases}$$

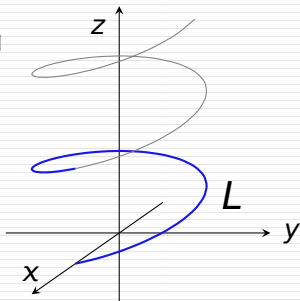
则 $\int_L f(x, y, z) ds$

$$= \int_a^b f(\phi(t), \psi(t), \zeta(t)) \sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2 + \zeta'(t)^2} dt$$



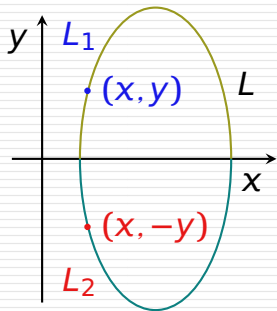
例3 求 $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中
 L 为螺旋线

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$



复习与提高

性质 (奇偶对称性) 设平面曲线 L 关于 x 轴对称

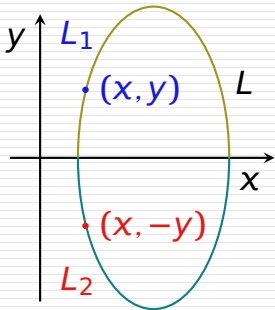


复习与提高

性质 (奇偶对称性) 设平面曲线 L 关于 x 轴对称

■ 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数, 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0$$



复习与提高

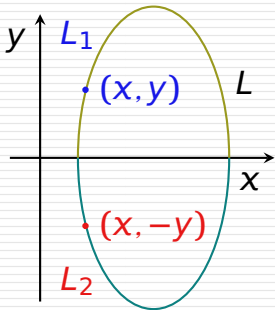
性质 (奇偶对称性) 设平面曲线 L 关于 x 轴对称

- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是奇函数, 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0$$

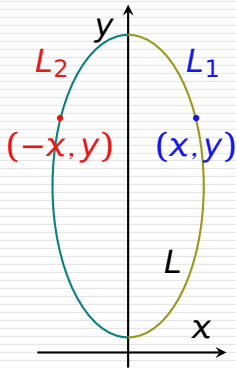
- 若 $f(x, y)$ 关于 y 是偶函数, 则

$$\int_L f(x, y) ds = 2 \int_{L_1} f(x, y) ds$$



复习与提高

性质 (奇偶对称性) 设平面曲线 L 关于 y 轴对称

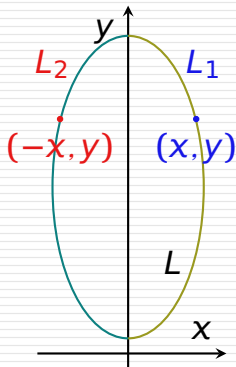


复习与提高

性质 (奇偶对称性) 设平面曲线 L 关于 y 轴对称

■ 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数, 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0$$



复习与提高

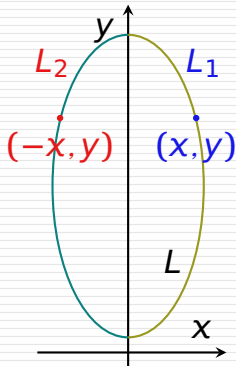
性质 (奇偶对称性) 设平面曲线 L 关于 y 轴对称

■ 若 $f(x, y)$ 关于 x 是奇函数, 则

$$\int_L f(x, y) ds = 0$$

■ 若 $f(x, y)$ 关于 x 是偶函数, 则

$$\int_L f(x, y) ds = 2 \int_{L_1} f(x, y) ds$$

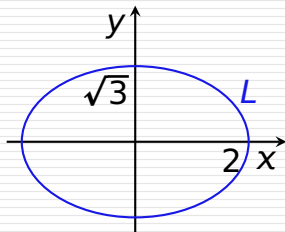


复习与提高

题 1 已知椭圆 $L : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

的周长是 c ，计算

$$\int_L 2xy + 3x^2 + 4y^2 ds$$



复习与提高

题3 计算 $I = \oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds$, 其中 Γ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{9}{2}$ 被平面 $x + z = 1$ 所截得的曲线.

第一节

对弧长的曲线积分

第二节

对坐标的曲线积分

第三节

格林公式

第四节

对面积的曲面积分

第五节

对坐标的曲面积分

第二节

对坐标的曲线积分

A

概念与性质

B

计算方法

C

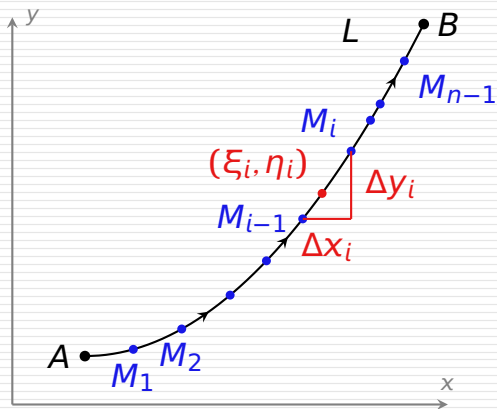
两类曲线积分的联系

引例：变力沿曲线所作的功

问题 设一个质点在 xy 面内受到力

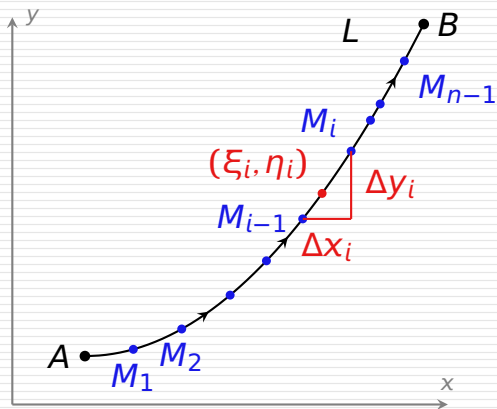
$$\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$$

的作用，从点 A 沿光滑曲线弧 L 移动到点 B 。计算在此过程中变力 $\vec{F}(x, y)$ 所做的功 W 。



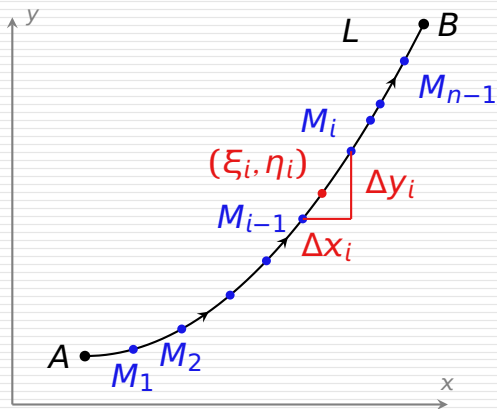
- 有向曲线弧 L 光滑
- $P(x, y)$ 在 L 上有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$

$$\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$



- 有向曲线弧 L 光滑
- $P(x, y)$ 在 L 上有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$

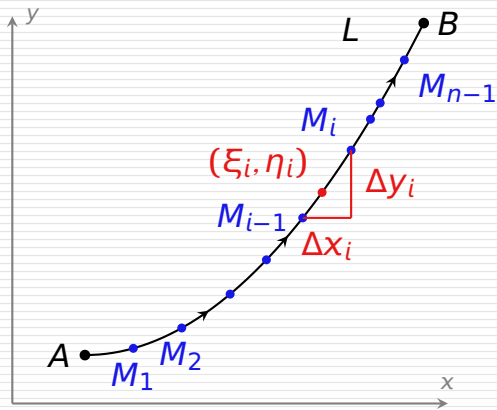
$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$



- 有向曲线弧 L 光滑
- $P(x, y)$ 在 L 上有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$

定义 $P(x, y)$ 在 L 上的对坐标 x 的曲线积分

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$



- 有向曲线弧 L 光滑
- $P(x, y)$ 在 L 上有界
- 任意划分 $L = \bigcup_i L_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in L_i$

定义 $P(x, y)$ 在 L 上的对坐标 x 的曲线积分

$$\int_L P(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

其中 L 称为积分弧段.

对坐标的曲线积分

注记 1 对坐标的曲线积分又称为第二类曲线积分.

注记 2 规定 $\int_L P(x, y) dx + \int_L Q(x, y) dy$
 $= \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy$

对坐标的曲线积分

注记 1 对坐标的曲线积分又称为第二类曲线积分.

注记 2 规定 $\int_L P(x,y) dx + \int_L Q(x,y) dy$
 $= \int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy$

注记 3 若 L 是分段光滑曲线, $f(x,y)$ 在 L 上连续, 则 $\int_L P(x,y) dx$ 和 $\int_L Q(x,y) dy$ 存在.

性质 1 (线性和) 设 α 和 β 为常数, 则

$$\int_L (\alpha P_1 + \beta P_2) dx = \alpha \int_L P_1 dx + \beta \int_L P_2 dx$$

性质 1 (线性) 设 α 和 β 为常数, 则

$$\int_L (\alpha P_1 + \beta P_2) dx = \alpha \int_L P_1 dx + \beta \int_L P_2 dx$$

性质 2 (分段) 将有向曲线弧 L 分成 L_1 和 L_2 , 则

$$\int_L P(x, y) dx = \int_{L_1} P(x, y) dx + \int_{L_2} P(x, y) dx$$

性质 1 (线性) 设 α 和 β 为常数, 则

$$\int_L (\alpha P_1 + \beta P_2) dx = \alpha \int_L P_1 dx + \beta \int_L P_2 dx$$

性质 2 (分段) 将有向曲线弧 L 分成 L_1 和 L_2 , 则

$$\int_L P(x, y) dx = \int_{L_1} P(x, y) dx + \int_{L_2} P(x, y) dx$$

性质 3 (方向性) 设 L^- 是 L 的反向曲线弧, 则

$$\int_{L^-} P(x, y) dx = - \int_L P(x, y) dx$$

性质 1 (线性) 设 α 和 β 为常数, 则

$$\int_L (\alpha P_1 + \beta P_2) dx = \alpha \int_L P_1 dx + \beta \int_L P_2 dx$$

性质 2 (分段和) 将有向曲线弧 L 分成 L_1 和 L_2 , 则

$$\int_L P(x, y) dx = \int_{L_1} P(x, y) dx + \int_{L_2} P(x, y) dx$$

性质 3 (方向性) 设 L^- 是 L 的反向曲线弧, 则

$$\int_{L^-} P(x, y) dx = - \int_L P(x, y) dx$$

注记 5 前两个性质与第一类曲线积分类似.

第二类曲线积分的计算

注记 设有向曲线弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$,

其中 $t: a \rightarrow b$ (从 a 单调变到 b), 则

$$dx = \phi'(t) dt, \quad dy = \psi'(t) dt.$$

第二类曲线积分的计算

注记 设有向曲线弧 L 的参数方程为 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$,

其中 $t: a \rightarrow b$ (从 a 单调变到 b), 则

$$dx = \phi'(t) dt, \quad dy = \psi'(t) dt.$$

.....

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \int_a^b [P(\phi(t), \psi(t))\phi'(t) + Q(\phi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt \end{aligned}$$

特别地，若有向曲线弧为 $y = \psi(x)$ ($x : a \rightarrow b$)，则

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ = \int_a^b \left[P(x, \psi(x)) + Q(x, \psi(x)) \psi'(x) \right] dx \end{aligned}$$

特别地, 若有向曲线弧为 $y = \psi(x)$ ($x : a \rightarrow b$), 则

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ = \int_a^b \left[P(x, \psi(x)) + Q(x, \psi(x)) \psi'(x) \right] dx \end{aligned}$$

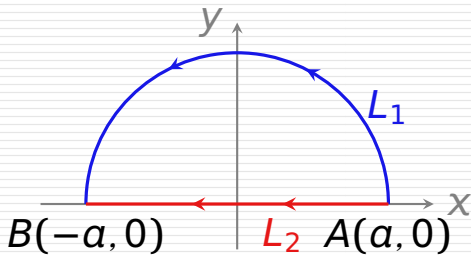
.....

若有向曲线弧为 $x = \phi(y)$ ($y : a \rightarrow b$), 则

$$\begin{aligned} \int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ = \int_a^b \left[P(\phi(y), y) \phi'(y) + Q(\phi(y), y) \right] dy \end{aligned}$$

第二类曲线积分：平面曲线

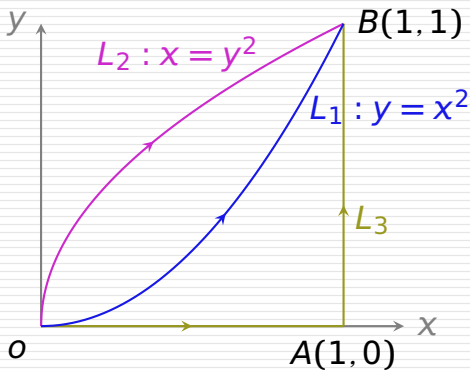
例2 求 $I_i = \int_{L_i} y^2 dx$,
其中 L_i 如右图所示.



例 3 计算

$$I_i = \int_{L_i} 2xy \, dx + x^2 \, dy$$

其中 L_i 如右图所示.



第二类曲线积分：空间曲线

设空间有向曲线弧 Γ 的参数方程是

$$x = \phi(t), y = \psi(t), z = \zeta(t) \quad (t : a \rightarrow b)$$

第二类曲线积分：空间曲线

设空间有向曲线弧 Γ 的参数方程是

$$x = \phi(t), y = \psi(t), z = \zeta(t) \quad (t : a \rightarrow b)$$

则有

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_a^b \left\{ P(\phi(t), \psi(t), \zeta(t)) \cdot \boxed{} \right. \\ & \quad + Q(\phi(t), \psi(t), \zeta(t)) \cdot \boxed{} \\ & \quad \left. + R(\phi(t), \psi(t), \zeta(t)) \cdot \boxed{} \right\} dt \end{aligned}$$

第二类曲线积分：空间曲线

设空间有向曲线弧 Γ 的参数方程是

$$x = \phi(t), y = \psi(t), z = \zeta(t) \quad (t : a \rightarrow b)$$

则有

$$\begin{aligned} & \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz \\ &= \int_a^b \left\{ P(\phi(t), \psi(t), \zeta(t)) \cdot \phi'(t) \right. \\ & \quad + Q(\phi(t), \psi(t), \zeta(t)) \cdot \psi'(t) \\ & \quad \left. + R(\phi(t), \psi(t), \zeta(t)) \cdot \zeta'(t) \right\} dt \end{aligned}$$

第二类曲线积分：空间曲线

例 4 计算 $\int_{\Gamma} x^3 dx + 3zy^2 dy - x^2y dz$, 其中 Γ 是从点 $A(3, 2, 1)$ 到点 $B(0, 0, 0)$ 的直线段 AB .

两类曲线积分的联系

设有向曲线弧 L 的参数方程为

$$x = \phi(t), y = \psi(t), \quad t \text{ 从 } a \text{ 到 } b, \quad a < b.$$

则有

$$\begin{aligned} \int_L P dx + Q dy &= \int_a^b [P\phi'(t) + Q\psi'(t)] dt \\ &= \int_a^b \left[\frac{P \cdot \phi'}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}} + \frac{Q\psi'}{\sqrt{\phi'^2 + \psi'^2}} \right] \cdot \sqrt{\phi'^2 + \psi'^2} dt \\ &= \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds \end{aligned}$$

复习与提高

题 2 将积分 $\int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy$ 化为对弧长的曲线积分, 其中 L 沿上半圆周 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 从 $O(0,0)$ 到 $B(2,0)$.

复习与提高

选择 设 $f(x,y)$ 有连续偏导数, 曲线 $C: f(x,y) = 1$ 过第二象限点 M 和第四象限点 N , L 为 C 上从点 M 到点 N 的一段弧, 则下列积分小于零的是……()

(A) $\int_L f(x,y) dx$

(B) $\int_L f(x,y) dy$

(C) $\int_L f(x,y) ds$

(D) $\int_L f'_x(x,y) dx + f'_y(x,y) dy$

第一节

对弧长的曲线积分

第二节

对坐标的曲线积分

第三节

格林公式

第四节

对面积的曲面积分

第五节

对坐标的曲面积分

第三节

格林公式

A

格林公式

B

曲线积分与路径无关的条件

C

二元函数的全微分求积

牛顿-莱布尼茨公式: $\int_a^b F'(x) dx = F(x) \Big|_a^b$

$F'(x)$ 在闭区间的积分可以通过它的原函数 $F(x)$ 在这个闭区间的边界 (即两个端点) 的值来表达.

牛顿-莱布尼茨公式: $\int_a^b F'(x) dx = F(x) \Big|_a^b$

$F'(x)$ 在闭区间的积分可以通过它的原函数 $F(x)$ 在这个闭区间的边界 (即两个端点) 的值来表达.

问题 上述公式在二重积分中的类比?

牛顿-莱布尼茨公式: $\int_a^b F'(x) dx = F(x) \Big|_a^b$

$F'(x)$ 在闭区间的积分可以通过它的原函数 $F(x)$ 在这个闭区间的边界 (即两个端点) 的值来表达.

问题 上述公式在二重积分中的类比?

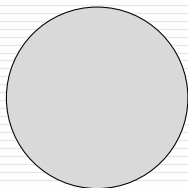
格林公式: $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy$

在平面闭区域 D 上的二重积分可以通过沿闭区域 D 的边界曲线 L 上的曲线积分来表达.

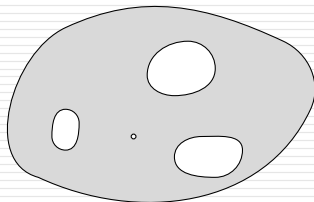
定义 设 D 为平面区域. 如果 D 中任意一条闭曲线所围部分都属于 D , 则称 D 是单连通区域, 否则称 D 是多连通区域.

定义 设 D 为平面区域. 如果 D 中任意一条闭曲线所围部分都属于 D , 则称 D 是**单连通**区域, 否则称 D 是**多连通**区域.

例子 如图, D_1 是单连通区域, 而 D_2 是多连通区域.



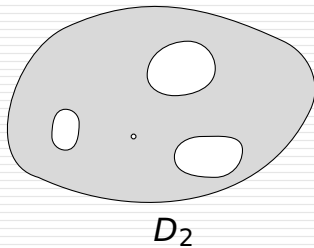
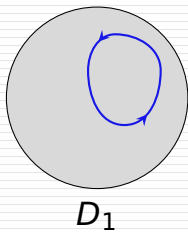
D_1



D_2

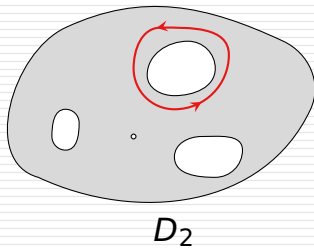
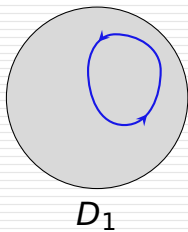
定义 设 D 为平面区域. 如果 D 中任意一条闭曲线所围部分都属于 D , 则称 D 是单连通区域, 否则称 D 是多连通区域.

例子 如图, D_1 是单连通区域, 而 D_2 是多连通区域.



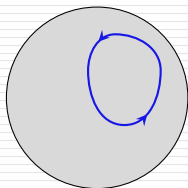
定义 设 D 为平面区域. 如果 D 中任意一条闭曲线所围部分都属于 D , 则称 D 是**单连通**区域, 否则称 D 是**多连通**区域.

例子 如图, D_1 是单连通区域, 而 D_2 是多连通区域.

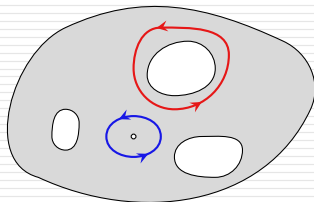


定义 设 D 为平面区域. 如果 D 中任意一条闭曲线所围部分都属于 D , 则称 D 是单连通区域, 否则称 D 是多连通区域.

例子 如图, D_1 是单连通区域, 而 D_2 是多连通区域.



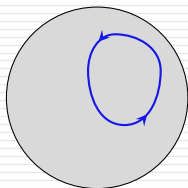
D_1



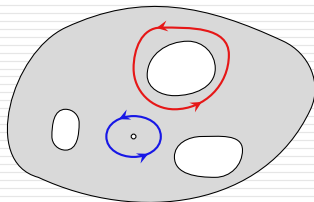
D_2

定义 设 D 为平面区域. 如果 D 中任意一条闭曲线所围部分都属于 D , 则称 D 是单连通区域, 否则称 D 是多连通区域.

例子 如图, D_1 是单连通区域, 而 D_2 是多连通区域.



D_1



D_2

注记 直观上, 单连通区域是指不含“洞”的区域.

定理 1 (格林公式) 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成, 函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy,$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + Q dy.$$

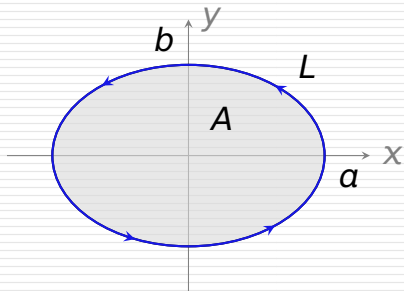
.....

在格林公式中取 $P = -y$, $Q = x$, 即得

$$A = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_L x dy - y dx.$$

也就是说, 可以用此公式来计算闭区域 D 的面积.

例 1 求椭圆 $x = a \cos \theta$,
 $y = b \sin \theta$ 的面积 A .



例 2 设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明:

$$\oint_L 2xy \, dx + x^2 \, dy = 0.$$

例3 计算 $\iint_D e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是以 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭区域.

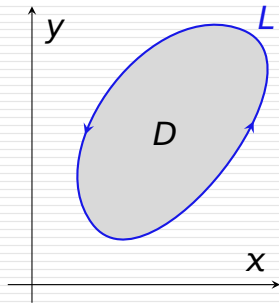
例 4 设 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线, L 的方向为逆时针方向. 计算

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

例 4 设 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线， L 的方向为逆时针方向。计算

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

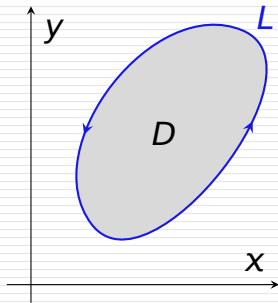
情形 1: $(0,0) \notin D$.



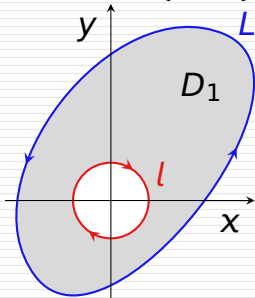
例 4 设 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线， L 的方向为逆时针方向。计算

$$\oint_L \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

情形 1: $(0,0) \notin D$.



情形 2: $(0,0) \in D$.



第三节

格林公式

A

格林公式

B

曲线积分与路径无关的条件

C

二元函数的全微分求积

定义 设 G 是一个区域, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数. 如果对于 G 内任意指定的两个点 A 和 B 以及 G 内从 A 到 B 的任意两条曲线 L_1 和 L_2 , 等式

$$\int_{L_1} P dx + Q dy = \int_{L_2} P dx + Q dy$$

恒成立, 就说曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 在 G 内与路径无关, 否则就说与路径有关.

定理 2 设 G 是单连通区域, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数, 则下述三者等价:

1 在 G 内的曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关.

2 在 G 内的闭曲线积分 $\oint_C P dx + Q dy$ 恒为零.

3 在 G 内 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 恒成立.

定理 2 设 G 是单连通区域, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数, 则下述三者等价:

1 在 G 内的曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关.

2 在 G 内的闭曲线积分 $\oint_C P dx + Q dy$ 恒为零.

3 在 G 内 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 恒成立.

注记 由前面例子知道, 对于多连通区域, 上述定理未必成立.

第三节

格林公式

A

格林公式

B

曲线积分与路径无关的条件

C

二元函数的全微分求积

定理 3 设 G 是单连通区域, 函数 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数, 则下述等价:

1 在 G 内的曲线积分 $\int_L P dx + Q dy$ 与路径无关.

2 在 G 内的闭曲线积分 $\oint_C P dx + Q dy$ 恒为零.

3 在 G 内 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 恒成立.

4 在 G 内存在 $u(x,y)$, 使得 $du = P dx + Q dy$.

注记 若在 G 内存在 $u(x, y)$ 使得 $du = P dx + Q dy$, 则有

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

注记 若在 G 内存在 $u(x, y)$ 使得 $du = P dx + Q dy$, 则有

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

在前面的式子中取特殊的路径, 可以得到

$$(1) \quad u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy$$

$$(2) \quad u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy$$

二元函数的全微分求积

例 5 验证: 在整个平面内, $xy^2 dx + x^2y dy$ 是某个函数的全微分, 并求出一个这样的函数.

复习与提高

题1 设 L 为从 $O(0,0)$ 到 $A(4,0)$ 的上半圆周 $y = \sqrt{4x - x^2}$, 计算曲线积分

$$I = \int_L (x^2 + 3y) dx + (y^2 - x) dy.$$

第二节

对坐标的曲线积分

第三节

格林公式

第四节

对面积的曲面积分

第五节

对坐标的曲面积分

第六节

高斯公式

第四节

对面积的曲面积分

A

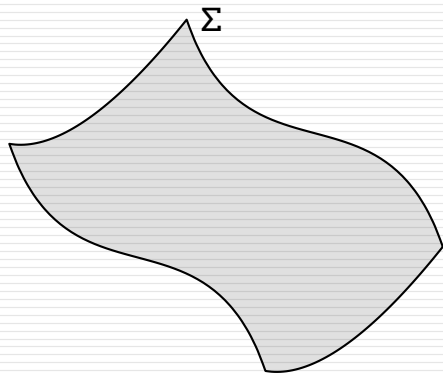
概念与性质

B

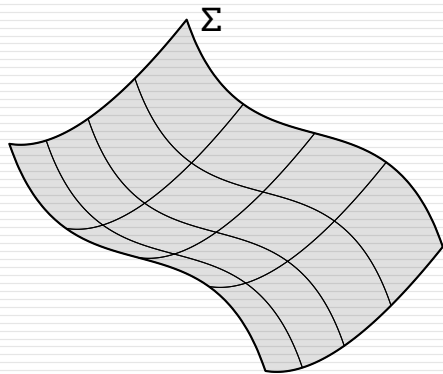
计算方法

引例：曲面型构件的质量

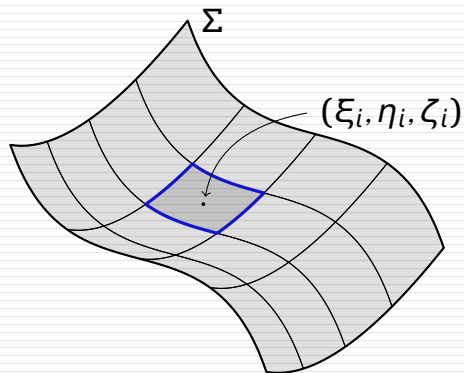
问题 设有曲面型构件 Σ ，面密度为 $f(x,y,z)$ ，计算此构件的质量.



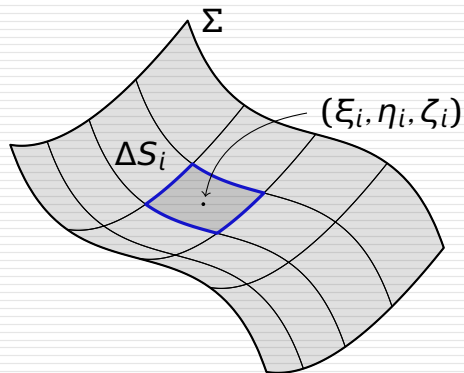
- Σ 在空间中分片光滑
- $f(x,y,z)$ 在 Σ 上有界



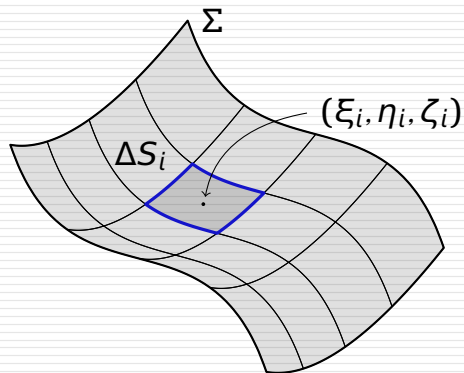
- Σ 在空间中分片光滑
- $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界
- 任意划分 $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$



- Σ 在空间中分片光滑
- $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界
- 任意划分 $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Sigma_i$

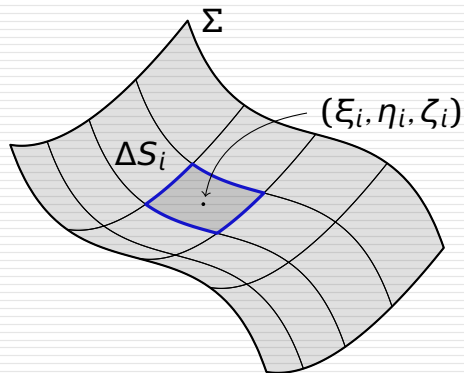


- Σ 在空间中分片光滑
- $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界
- 任意划分 $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Sigma_i$



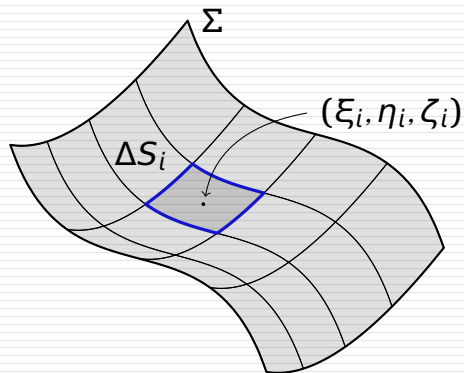
- Σ 在空间中分片光滑
- $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界
- 任意划分 $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Sigma_i$

$$f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



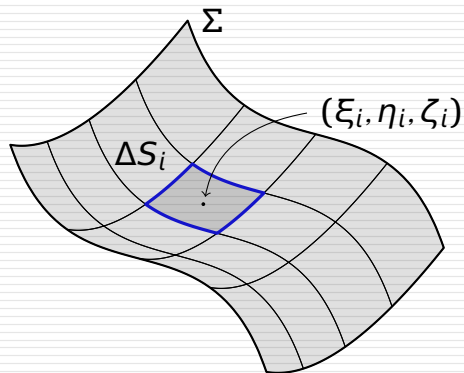
- Σ 在空间中分片光滑
- $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界
- 任意划分 $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Sigma_i$

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



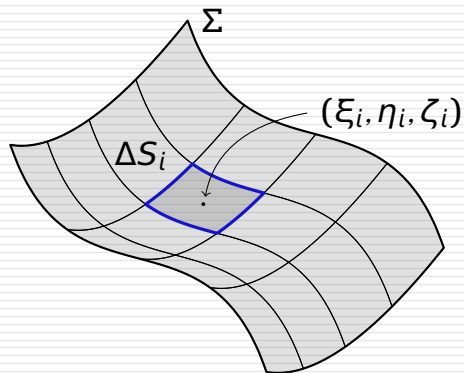
- Σ 在空间中分片光滑
- $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界
- 任意划分 $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Sigma_i$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



- Σ 在空间中分片光滑
- $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界
- 任意划分 $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Sigma_i$

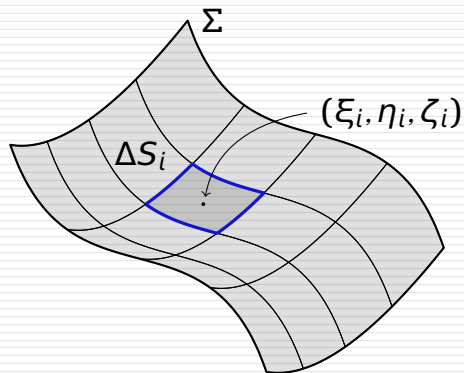
$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



- Σ 在空间中分片光滑
- $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界
- 任意划分 $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Sigma_i$

定义 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$



- Σ 在空间中分片光滑
- $f(x, y, z)$ 在 Σ 上有界
- 任意划分 $\Sigma = \bigcup_i \Sigma_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Sigma_i$

定义 $f(x, y, z)$ 在 Σ 上对面积的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

其中 Σ 称为积分曲面, dS 称为面积元素.

对面积的曲面积分

注记 对面积的曲面积分又称为第一类曲面积分.

对面积的曲面积分

注记 对面积的曲面积分又称为**第一类曲面积分**.

注记 若 Σ 是分片光滑曲面, $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, 则 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z) dS$ 存在.

对面积的曲面积分

注记 对面积的曲面积分又称为第一类曲面积分.

注记 若 Σ 是分片光滑曲面, $f(x,y,z)$ 在 Σ 上连续, 则 $\iint_{\Sigma} f(x,y,z) dS$ 存在.

注记 $\iint_{\Sigma} 1 dS = \text{Area}(\Sigma)$, 即曲面 Σ 的面积.

性质 1 (线性和) 设 α 和 β 为常数, 则有

$$\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$$

性质 1 (线性和) 设 α 和 β 为常数, 则有

$$\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$$

性质 2 (分片和) 将积分曲面 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 , 则有

$$\iint_{\Sigma} f dS = \iint_{\Sigma_1} f dS + \iint_{\Sigma_2} f dS$$

性质 1 (线性和) 设 α 和 β 为常数, 则有

$$\iint_{\Sigma} (\alpha f + \beta g) dS = \alpha \iint_{\Sigma} f dS + \beta \iint_{\Sigma} g dS$$

性质 2 (分片和) 将积分曲面 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 , 则有

$$\iint_{\Sigma} f dS = \iint_{\Sigma_1} f dS + \iint_{\Sigma_2} f dS$$

性质 3 (保号性) 若在 Σ 上 $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \geq \iint_{\Sigma} g(x, y, z) dS$$

第四节

对面积的曲面积分

A

概念与性质

B

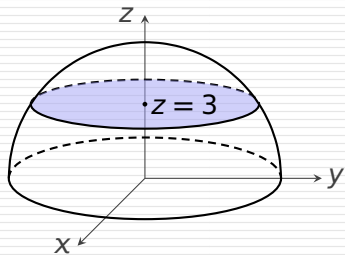
计算方法

第一类曲面积分的计算

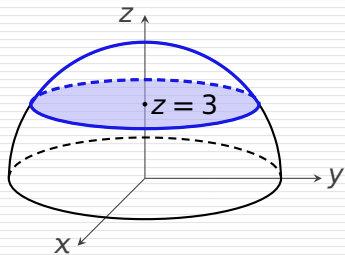
设曲面 Σ 的方程为 $z = z(x, y)$, 它在 xOy 面的投影区域为 D_{xy} . 则对曲面的面积积分可以化为二重积分:

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS \\ &= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)} dx dy \end{aligned}$$

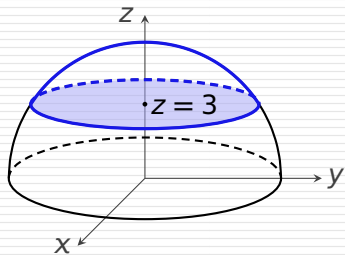
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中
 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$
被平面 $z = 3$ 所截出的顶部.



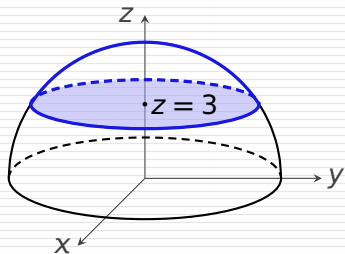
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中
 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$
被平面 $z = 3$ 所截出的顶部.



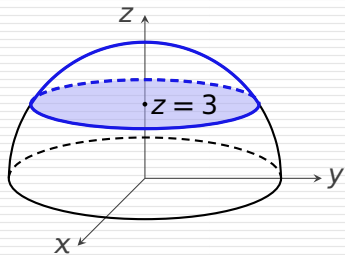
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中
 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$
被平面 $z = 3$ 所截出的顶部.



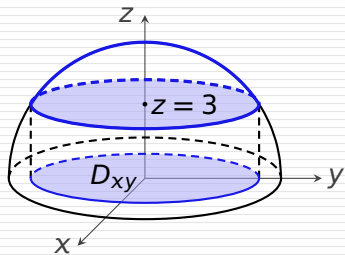
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中
 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$
被平面 $z = 3$ 所截出的顶部.



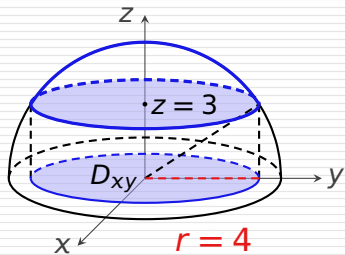
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中
 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$
被平面 $z = 3$ 所截出的顶部.



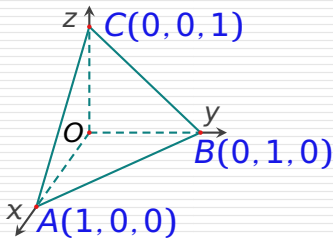
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中
 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$
被平面 $z = 3$ 所截出的顶部.



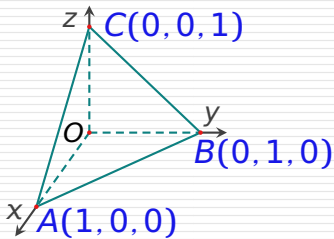
例 1 计算 $\iint_{\Sigma} \frac{1}{z} dS$, 其中
 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 5^2$
被平面 $z = 3$ 所截出的顶部.



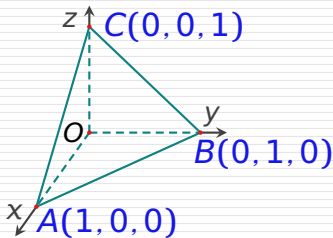
例2 计算 $\iint_{\Sigma} xyz \, dS$, 其中 Σ 是由平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面.



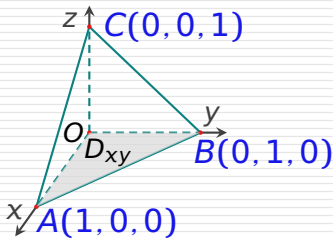
例2 计算 $\iint_{\Sigma} xyz \, dS$, 其中 Σ 是由平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面.



例2 计算 $\iint_{\Sigma} xyz \, dS$, 其中 Σ 是由平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面.

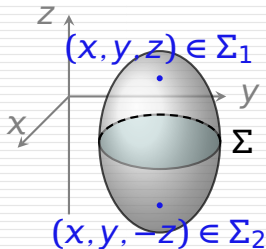


例2 计算 $\iint_{\Sigma} xyz \, dS$, 其中 Σ 是由平面 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面.



复习与提高

性质 (奇偶对称性) 设曲面 Σ 关于 xy 坐标面对称,

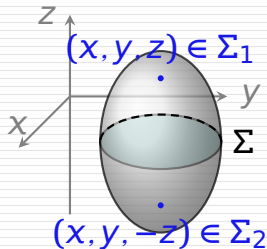


复习与提高

性质 (奇偶对称性) 设曲面 Σ 关于 xy 坐标面对称,

(1) 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是奇函数, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = 0$$

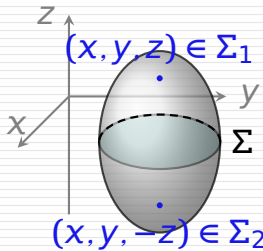


复习与提高

性质 (奇偶对称性) 设曲面 Σ 关于 xy 坐标面对称,

(1) 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是奇函数, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = 0$$



(2) 若 $f(x, y, z)$ 关于 z 是偶函数, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS = 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dS$$

复习与提高

选择 设 Σ 为上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ($z \geq 0$), 而 Σ_1 为 Σ 在第一卦限的部分. 则有.....()

(A) $\iint_{\Sigma} x \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x \, dS$

(B) $\iint_{\Sigma} y \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x \, dS$

(C) $\iint_{\Sigma} z \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} x \, dS$

(D) $\iint_{\Sigma} xyz \, dS = 4 \iint_{\Sigma_1} xyz \, dS$

复习与提高

题1 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 求曲面积分

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2) dS.$$

复习与提高

复习 1 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xz \, dS$, 其中 Σ 是由平面 $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ 和 $x + y + z = 1$ 所围成四面体的整个边界曲面.

人 人

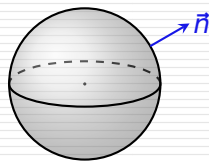
定义 若曲面在整体上具有双侧, 则称它为可定向的. 我们可以通过曲面上法向量的指向来定出曲面的侧.

定义 若曲面在整体上具有双侧，则称它为可定向的. 我们可以通过曲面上法向量的指向来定出曲面的侧. 指定了法向量亦即选定了侧的曲面，称为有向曲面.

定义 若曲面在整体上具有双侧，则称它为可定向的. 我们可以通过曲面上法向量的指向来定出曲面的侧. 指定了法向量亦即选定了侧的曲面，称为有向曲面.

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 可定向:

外側 法向量指向朝外

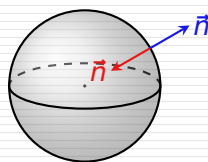


定义 若曲面在整体上具有双侧，则称它为可定向的。我们可以通过曲面上法向量的指向来定出曲面的侧。指定了法向量亦即选定了侧的曲面，称为有向曲面。

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 可定向：

外侧 法向量指向朝外

内测 法向量指向朝内



问题 设稳定流体（假设密度为 1）的速度场为

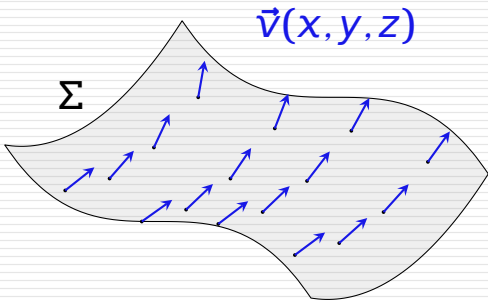
$$\vec{v}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Σ 是速度场中的一片有向曲面，求单位时间内流向 Σ 指定侧（单位法向量为 $\vec{n}$ ）的流体的质量，即流量 Φ .

问题 设稳定流体（假设密度为 1）的速度场为

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

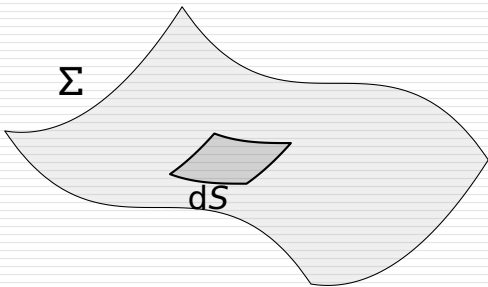
Σ 是速度场中的一片有向曲面, 求单位时间内流向 Σ 指定侧 (单位法向量为 $\vec{n}$) 的流体的质量, 即流量 Φ .



问题 设稳定流体（假设密度为 1）的速度场为

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

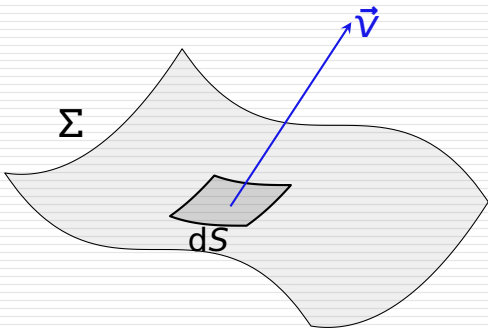
Σ 是速度场中的一片有向曲面, 求单位时间内流向 Σ 指定侧 (单位法向量为 $\vec{n}$) 的流体的质量, 即流量 Φ .



问题 设稳定流体（假设密度为 1）的速度场为

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

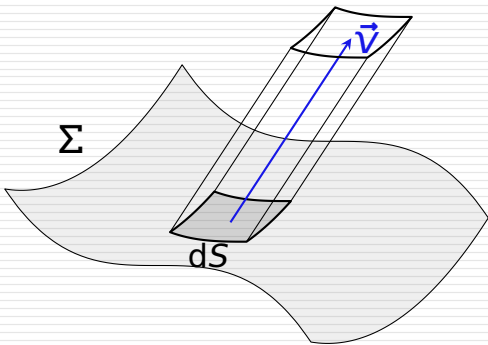
Σ 是速度场中的一片有向曲面, 求单位时间内流向 Σ 指定侧 (单位法向量为 $\vec{n}$) 的流体的质量, 即流量 Φ .



问题 设稳定流体（假设密度为 1）的速度场为

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

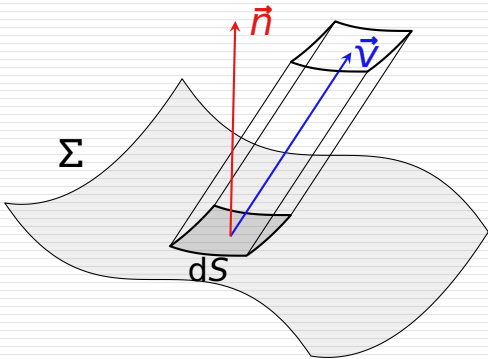
Σ 是速度场中的一片有向曲面, 求单位时间内流向 Σ 指定侧 (单位法向量为 $\vec{n}$) 的流体的质量, 即流量 Φ .



问题 设稳定流体（假设密度为 1）的速度场为

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

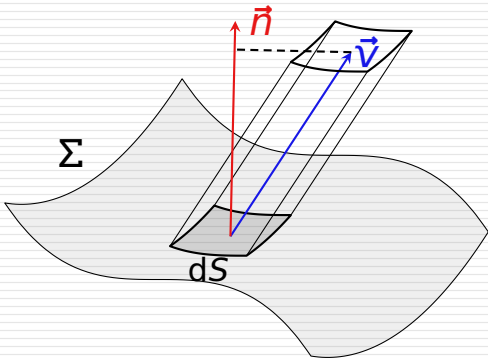
Σ 是速度场中的一片有向曲面, 求单位时间内流向 Σ 指定侧 (单位法向量为 $\vec{n}$) 的流体的质量, 即流量 Φ .



问题 设稳定流体（假设密度为 1）的速度场为

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Σ 是速度场中的一片有向曲面, 求单位时间内流向 Σ 指定侧 (单位法向量为 $\vec{n}$) 的流体的质量, 即流量 Φ .

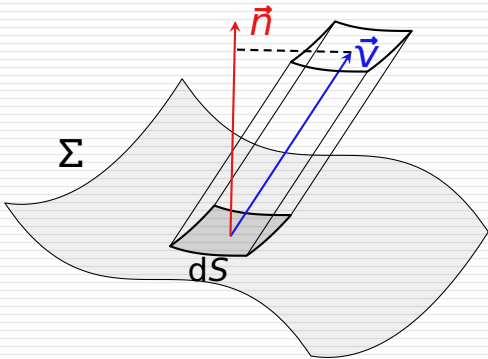


$$d\Phi = \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

问题 设稳定流体（假设密度为 1）的速度场为

$$\vec{v}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}.$$

Σ 是速度场中的一片有向曲面, 求单位时间内流向 Σ 指定侧 (单位法向量为 $\vec{n}$) 的流体的质量, 即流量 Φ .



$$d\Phi = \vec{v} \cdot \vec{n} dS$$

$$\Rightarrow \Phi = \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS$$

已知速度场 $\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$,
单位法向量 $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 从而

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS \\ &= \iint_{\Sigma} P \cos \alpha \, dS + \iint_{\Sigma} Q \cos \beta \, dS + \iint_{\Sigma} R \cos \gamma \, dS \\ &\stackrel{\text{记为}}{=} \iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + \iint_{\Sigma} Q \, dz \, dx + \iint_{\Sigma} R \, dx \, dy\end{aligned}$$

已知速度场 $\vec{v} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$,
单位法向量 $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 从而

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_{\Sigma} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) \, dS \\&= \iint_{\Sigma} P \cos \alpha \, dS + \iint_{\Sigma} Q \cos \beta \, dS + \iint_{\Sigma} R \cos \gamma \, dS \\&\stackrel{\text{记为}}{=} \iint_{\Sigma} P \, dy \, dz + \iint_{\Sigma} Q \, dz \, dx + \iint_{\Sigma} R \, dx \, dy\end{aligned}$$

称为对坐标的曲面积分, 或第二类曲面积分.

两类曲面积分的联系

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha dS$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \cos \beta dS$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \end{aligned}$$

性质 1 (线性和) 设 α 和 β 为常数, 则有

$$\iint_{\Sigma} (\alpha R_1 + \beta R_2) dx dy = \alpha \iint_{\Sigma} R_1 dx dy + \beta \iint_{\Sigma} R_2 dx dy$$

性质 1 (线性和) 设 α 和 β 为常数, 则有

$$\iint_{\Sigma} (\alpha R_1 + \beta R_2) dx dy = \alpha \iint_{\Sigma} R_1 dx dy + \beta \iint_{\Sigma} R_2 dx dy$$

性质 2 (分片和) 将有向曲面 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 , 则有

$$\iint_{\Sigma} R dx dy = \iint_{\Sigma_1} R dx dy + \iint_{\Sigma_2} R dx dy$$

性质 1 (线性和) 设 α 和 β 为常数, 则有

$$\iint_{\Sigma} (\alpha R_1 + \beta R_2) dx dy = \alpha \iint_{\Sigma} R_1 dx dy + \beta \iint_{\Sigma} R_2 dx dy$$

性质 2 (分片和) 将有向曲面 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 , 则有

$$\iint_{\Sigma} R dx dy = \iint_{\Sigma_1} R dx dy + \iint_{\Sigma_2} R dx dy$$

性质 3 (方向性) 设 Σ^- 是 Σ 的反向有向曲面, 则有

$$\iint_{\Sigma^-} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$$

性质 1 (线性和) 设 α 和 β 为常数, 则有

$$\iint_{\Sigma} (\alpha R_1 + \beta R_2) dx dy = \alpha \iint_{\Sigma} R_1 dx dy + \beta \iint_{\Sigma} R_2 dx dy$$

性质 2 (分片和) 将有向曲面 Σ 分成 Σ_1 和 Σ_2 , 则有

$$\iint_{\Sigma} R dx dy = \iint_{\Sigma_1} R dx dy + \iint_{\Sigma_2} R dx dy$$

性质 3 (方向性) 设 Σ^- 是 Σ 的反向有向曲面, 则有

$$\iint_{\Sigma^-} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$$

注记 1 前两个性质与第一类曲面积分类似.

设积分曲面 Σ 是由方程 $z = z(x, y)$ 所给出的曲面的上侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域是 D_{xy} .

设积分曲面 Σ 是由方程 $z = z(x, y)$ 所给出的曲面的上侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域是 D_{xy} .

此时有向曲面 Σ 的单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2}}(-z'_x, -z'_y, 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

设积分曲面 Σ 是由方程 $z = z(x, y)$ 所给出的曲面的上侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域是 D_{xy} .

此时有向曲面 Σ 的单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}(-z'_x, -z'_y, 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) \, dx \, dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma \, dS$$

设积分曲面 Σ 是由方程 $z = z(x, y)$ 所给出的曲面的上侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域是 D_{xy} .

此时有向曲面 Σ 的单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}(-z_x', -z_y', 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dx dy \end{aligned}$$

设积分曲面 Σ 是由方程 $z = z(x, y)$ 所给出的曲面的上侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域是 D_{xy} .

此时有向曲面 Σ 的单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}(-z_x', -z_y', 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

设积分曲面 Σ 是由方程 $z = z(x, y)$ 所给出的曲面的下侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域是 D_{xy} .

设积分曲面 Σ 是由方程 $z = z(x, y)$ 所给出的曲面的下侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域是 D_{xy} .

此时有向曲面 Σ 的单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}(z_x', z_y', -1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

设积分曲面 Σ 是由方程 $z = z(x, y)$ 所给出的曲面的下侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域是 D_{xy} .

此时有向曲面 Σ 的单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}(z'_x, z'_y, -1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS$$

设积分曲面 Σ 是由方程 $z = z(x, y)$ 所给出的曲面的下侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域是 D_{xy} .

此时有向曲面 Σ 的单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}(z'_x, z'_y, -1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \frac{-1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2} dx dy\end{aligned}$$

设积分曲面 Σ 是由方程 $z = z(x, y)$ 所给出的曲面的下侧, Σ 在 xOy 面上的投影区域是 D_{xy} .

此时有向曲面 Σ 的单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}(z'_x, z'_y, -1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy &= \iint_{\Sigma} R(x, y, z) \cos \gamma dS \\ &= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) \frac{-1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy \\ &= - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy \end{aligned}$$

设积分曲面为 $z = z(x, y)$, 则 (上侧正号, 下侧负号)

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

设积分曲面为 $x = x(y, z)$, 则 (前侧正号, 后侧负号)

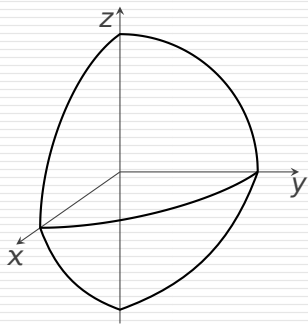
$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz$$

设积分曲面为 $y = y(z, x)$, 则 (右侧正号, 左侧负号)

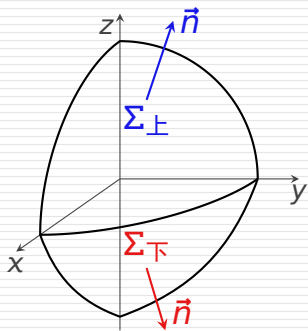
$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z) dz dx$$

例 1 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz$, 其中 Σ 是长方体 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c\}$ 的整个表面的外_•侧_•.

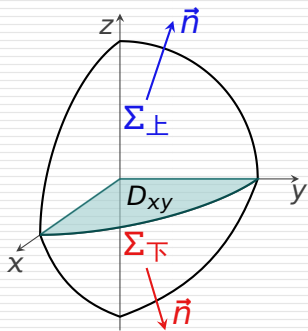
例2 计算 $\iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分.



例2 计算 $\iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分.



例2 计算 $\iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在 $x \geq 0, y \geq 0$ 的部分.



设积分曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$ 给出. 单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2}}(-z'_x, -z'_y, 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

设积分曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$ 给出. 单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}(-z_x', -z_y', 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha dS$$

设积分曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$ 给出. 单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2}}(-z'_x, -z'_y, 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha dS \\ &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \cos \gamma dS \end{aligned}$$

设积分曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$ 给出. 单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2}}(-z'_x, -z'_y, 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \cos \alpha dS \\ &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \cos \gamma dS \\ &= \iint_{\Sigma} P(x, y, z)(-z'_x) dx dy\end{aligned}$$

设积分曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$ 给出. 单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2}}(-z'_x, -z'_y, 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

设积分曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$ 给出. 单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2}}(-z'_x, -z'_y, 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \cos \beta dS$$

设积分曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$ 给出. 单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}(-z_x', -z_y', 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx &= \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \cos \beta dS \\ &= \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \cos \gamma dS \end{aligned}$$

设积分曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$ 给出. 单位法向量 $\vec{n}$ 为

$$\frac{\pm 1}{\sqrt{1 + z'_x{}^2 + z'_y{}^2}}(-z'_x, -z'_y, 1) = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx &= \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \cos \beta dS \\ &= \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) \frac{\cos \beta}{\cos \gamma} \cos \gamma dS \\ &= \iint_{\Sigma} Q(x, y, z)(-z'_y) dx dy\end{aligned}$$

设积分曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \iint_{\Sigma} P(x, y, z)(-z'_x) dx dy$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z)(-z'_y) dx dy$$

设积分曲面 Σ 由 $z = z(x, y)$ 给出, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \iint_{\Sigma} P(x, y, z)(-z'_x) dx dy$$

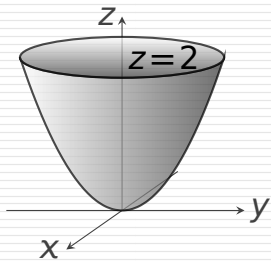
$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \iint_{\Sigma} Q(x, y, z)(-z'_y) dx dy$$

从而有第二类曲面积分的转换公式:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ = \iint_{\Sigma} [P(-z'_x) + Q(-z'_y) + R] dx dy \end{aligned}$$

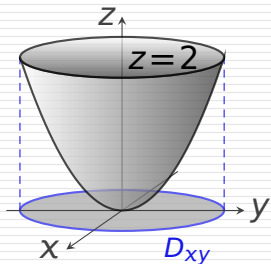
例 3 设有向曲面 Σ 是旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于 $z = 0$ 及 $z = 2$ 之间的部分的下侧, 求

$$\iiint_{\Sigma} (z^2 + x) \, dy \, dz - z \, dx \, dy.$$



例 3 设有向曲面 Σ 是旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于 $z = 0$ 及 $z = 2$ 之间的部分的下侧, 求

$$\iiint_{\Sigma} (z^2 + x) \, dy \, dz - z \, dx \, dy.$$



第三节

格林公式

第四节

对面积的曲面积分

第五节

对坐标的曲面积分

第六节

高斯公式

第七节

斯托克斯公式

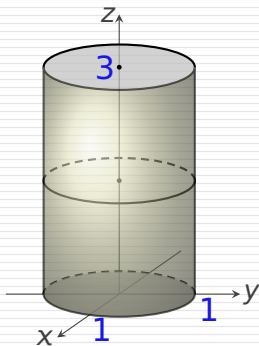
定理 (高斯公式) 设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成, 函数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv \\ &= \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS \end{aligned}$$

其中有向曲面 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外_•侧_•.

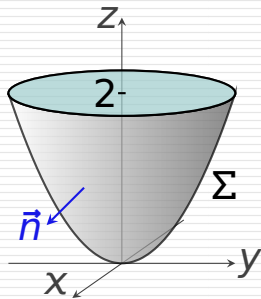
例 1 设有向曲面 Σ 是右边圆柱体 Ω 的整个边界曲面的外侧. 计算

$$\iint_{\Sigma} (x - y) dx dy + (y - z)x dy dz$$



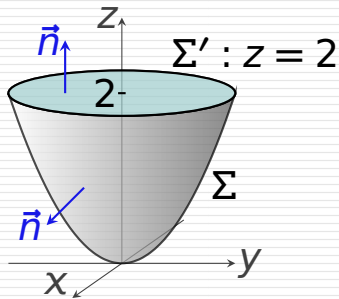
例2 设有向曲面 Σ 是抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于 $z = 0$ 及 $z = 2$ 部分的下侧，计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy.$$



例2 设有向曲面 Σ 是抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于 $z = 0$ 及 $z = 2$ 部分的下侧, 计算

$$\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy.$$



复习与提高

题 1 设 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 取外侧, Ω 为 Σ 所围立体, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 判断下列演算是否正确?

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \frac{x^3}{r^3} dy dz + \frac{y^3}{r^3} dz dx + \frac{z^3}{r^3} dx dy \\ &= \frac{1}{R^3} \iint_{\Sigma} x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy \\ &= \frac{1}{R^3} \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dv = \frac{3}{R} \iiint_{\Omega} dv = 4\pi R^2 \end{aligned}$$

复习与提高

题 2 设 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 取外侧, Ω 为 Σ 所围立体, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 判断下列演算是否正确?

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} \frac{x^3}{r^3} dy dz + \frac{y^3}{r^3} dz dx + \frac{z^3}{r^3} dx dy \\ &= \iiint_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y^3}{r^3} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z^3}{r^3} \right) \right] dv \\ &= \dots \end{aligned}$$

复习与提高

题3 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧. 计算

$$\iint_{\Sigma} dy dz + y dz dx + z^2 dx dy.$$

复习与提高

题 4 设 Σ 是圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 位于 $0 \leq z \leq 1$ 的外侧. 计算

$$I = \iint_{\Sigma} (x - y) dy dz + (y - z) dz dx + (z - x) dx dy.$$

第三节

格林公式

第四节

对面积的曲面积分

第五节

对坐标的曲面积分

第六节

高斯公式

第七节

斯托克斯公式

定理 (斯托克斯公式) 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线, Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面, 函数 $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ 在曲面 Σ 连同边界 Γ 上具有一阶连续偏导数, 则有

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ = \oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \end{aligned}$$

其中 Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则.

斯托克斯公式

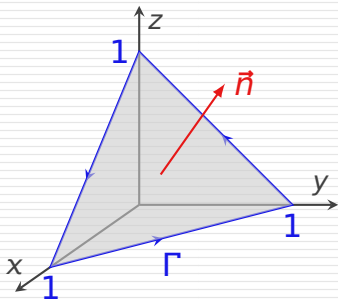
利用行列式记号，斯托克斯公式可以写为

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$
$$= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS$$

例 1 用斯托克斯公式计算积分

$$\oint_{\Gamma} z dx + x dy + y dz$$

其中 Γ 由平面 $x + y + z = 1$ 被三个坐标面所截得.



复习与提高

题 1 Γ 为柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 与平面 $y = z$ 的交线，从 z 轴正向看为顺时针，用斯托克斯公式求

$$I = \oint_{\Gamma} y^2 dx + xy dy + xz dz.$$

