高等数学课程

第十二章 · 无穷级数

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

无穷级数

- $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$$

无穷级数

- $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$$
- $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$

无穷级数

- $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$$
- $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$$
- $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$
- $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$
- $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$

无穷级数

- $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$$
- $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$$
- $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$
- $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$$
- $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots$$

无穷级数

- $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$$
- $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$$
- $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$
- $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$$
- $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

第一节	常数项级数的概念和性质
A	无穷级数的概念
B	收敛级数的性质

无穷级数

定义 1 给定数列：$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数），记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，

无穷级数

定义 1 给定数列：$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数），记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中第 n 项称为级数的通项.

级数的敛散性

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和,

级数的敛散性

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

级数的敛散性

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

. . . .

如果 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

级数的敛散性

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

. . . .

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

- 称 S 为级数的和

级数的敛散性

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

. . . .

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

- 称 S 为级数的和
- 称 $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数余项

级数的敛散性

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

- 称 S 为级数的和
- 称 $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数余项

如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 发散，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 1　讨论几何级数（或称等比级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

的敛散性，其中 $a \neq 0$，而 q 称为级数的公比.

例 2　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

例 2　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

例 3　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

第一节	常数项级数的概念和性质
A	无穷级数的概念
B	收敛级数的性质

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots) = 1 + \frac{1}{2} S$$

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$$\therefore \; S = 2$$

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$\therefore\ S = 2$ 即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$\therefore\ S = 2$ 即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$ ✓

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$\therefore\ S = 2$ 即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$ ✓

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + (2 + 4 + 8 + \cdots)$$

$$= 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + \cdots) = 1 + 2T$$

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$\therefore\ S = 2$ 即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$ ✓

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + (2 + 4 + 8 + \cdots)$$

$$= 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + \cdots) = 1 + 2T$$

$\therefore\ T = -1$

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$$\therefore\ S = 2 \quad \text{即} \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2 \qquad \checkmark$$

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + (2 + 4 + 8 + \cdots)$$

$$= 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + \cdots) = 1 + 2T$$

$$\therefore\ T = -1 \quad \text{即} \quad 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$$

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$\therefore\ S = 2$ 即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$ ✓

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + (2 + 4 + 8 + \cdots)$$

$$= 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + \cdots) = 1 + 2T$$

$\therefore\ T = -1$ 即 $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$ ✗

性质 1　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

性质 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a u_n$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

性质 2　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

推论　级数的每一项同乘以不为 0 的常数后，其敛散性不变.

例 4　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n}\right)$ 的和.

例 4　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n}\right)$ 的和.

例 5　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 3\ln\frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

性质 3　在级数中加上、去掉或者改变有限项，级数的敛散性不变.

性质 3　在级数中加上、去掉或者改变有限项，级数的敛散性不变.

例 6　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 n 次部分和 $S_n = \frac{n}{2n-1}$，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2}$ 的敛散性．若级数收敛，求出它的和.

无穷级数的运算：无中生有

$$\begin{aligned}0 &= 0+0+0+\cdots \\ &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\ &= 1-1+1-1+1-1+\cdots \\ &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \\ &= 1+0+0+0+\cdots \\ &= 1\end{aligned}$$

无穷级数的运算：无中生有

$$
\begin{aligned}
0 &= 0 + 0 + 0 + \cdots \\
&= (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots \\
&= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots && ✗ \\
&= 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \cdots \\
&= 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots \\
&= 1
\end{aligned}
$$

性质 4 (收敛级数的结合律)　如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

性质 4 (收敛级数的结合律)　如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

例 7　已知几何级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

性质 4 (收敛级数的结合律)　如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

例 7　已知几何级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

加括号后得到的新级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)+\cdots$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+\cdots$$

性质 4 (收敛级数的结合律)　如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

例 7　已知几何级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

加括号后得到的新级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)+\cdots$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+\cdots=\frac{3/2}{1-1/4}=2.$$

性质 4 (收敛级数的结合律)　如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

例 7　已知几何级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

加括号后得到的新级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)+\cdots$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+\cdots=\frac{3/2}{1-1/4}=2.$$

注记 1　发散级数加括号后，可能发散也可能收敛.

收敛的必要条件

定理 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

收敛的必要条件

定理 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

注记 2 若通项不趋于零，则级数一定发散.

收敛的必要条件

定理 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

. . . .

注记 2 若通项不趋于零，则级数一定发散.

例 8 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 1，因此它发散.

收敛的必要条件

定理 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

注记 2 若通项不趋于零，则级数一定发散.

例 8 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 1，因此它发散.

注记 3 若通项趋于零，则级数未必收敛.

收敛的必要条件

定理 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

注记 2 若通项不趋于零，则级数一定发散.

例 8 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 1，因此它发散.

注记 3 若通项趋于零，则级数未必收敛.

例 9 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 0，但是它发散.

练习 1　判断级数的敛散性．如果级数收敛，求出它的和．

(1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2n}+\cdots$

(2) $(\frac{3}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{3}{4}+\frac{1}{9})+(\frac{3}{8}+\frac{1}{27})+\cdots$

复习与提高

题 1　判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛求其和.

复习与提高

题 1　判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ 的敛散性，若收敛求其和.

题 2　判断无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的敛散性，若收敛求其和.

复习与提高

选择　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散，则对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 来说有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 级数收敛　　(B) 级数发散

(C) 级数敛散性不定　　(D) 上述诸结论均不正确

第二节	常数项级数的审敛法
A	正项级数及其审敛法
B	交错级数及其审敛法
C	任意项级数的敛散性

定义 1　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geqslant 0$（对所有 n），则称它为正项级数.

定义 1　若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geqslant 0$（对所有 n），则称它为**正项级数**.

性质　正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列.

定义 1 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geqslant 0$（对所有 n），则称它为**正项级数**.

性质 正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列.

定理 1 正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的部分和数列有界.

定义 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geqslant 0$（对所有 n），则称它为正项级数.

性质 正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列.

定理 1 正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的部分和数列有界.

注记 正项级数加括号后，其敛散性不变.

定理2 (比较判别法) 对于两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若对所有 n 都有 $u_n \leqslant v_n$，

定理2 (比较判别法) 对于两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若对所有 n 都有 $u_n \leqslant v_n$，则有

1 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

2 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

定理2 (比较判别法) 对于两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若对所有 n 都有 $u_n \leqslant v_n$，则有

1 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

2 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

推论 若存在 $c > 0$，使得从某一项开始 $u_n \leqslant c v_n$，则结论依然成立.

比较判别法

例 1 调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

比较判别法

例 1　调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

例 2　判断 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

比较判别法

例 1　调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例 2　判断 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

例 3　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 的敛散性.

定理 3 (比较判别法)　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都为正项级数，且有 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \rho$.

1 若 $0 < \rho < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散；

定理 3 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都为正项级数，且有 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \rho$.

1 若 $0 < \rho < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散；

2 若 $\rho = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

定理 3 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都为正项级数，且有 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \rho$.

1. 若 $0 < \rho < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散；
2. 若 $\rho = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；
3. 若 $\rho = +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

比较判别法

例 4　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 的敛散性.

比较判别法

例 4 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 的敛散性.

例 5 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^3-3}}$ 的敛散性.

比较判别法

例 4　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 的敛散性.

例 5　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^3-3}}$ 的敛散性.

例 6　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

比较判别法

练习 1　判断级数的敛散性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

定理4 (比值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$ 则有

1 若 $\rho < 1$，则级数收敛；

定理4 (比值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho，则有$$

1. 若 $\rho<1$，则级数收敛；
2. 若 $\rho>1$，则级数发散；

定理4 (比值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho,$$ 则有

1. 若 $\rho < 1$，则级数收敛；
2. 若 $\rho > 1$，则级数发散；
3. 若 $\rho = 1$，则级数可能收敛也可能发散.

比值判别法

例 7　设 $x > 0$，判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的敛散性.

比值判别法

例 7　设 $x>0$，判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的敛散性.

例 8　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 的敛散性.

定理5 (根值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则有

1 若 $\rho < 1$，则级数收敛；

定理5 (根值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则有

1. 若 $\rho < 1$，则级数收敛；
2. 若 $\rho > 1$，则级数发散；

定理5 (根值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则有

1. 若 $\rho < 1$，则级数收敛；
2. 若 $\rho > 1$，则级数发散；
3. 若 $\rho = 1$，则级数可能收敛也可能发散.

根值判别法

例 9　设 $a > 0$，判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{na}{n+1}\right)^n$ 的敛散性.

练习 2　判定级数的敛散性：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n(n+1)}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(\arctan n)^n}$

第二节	常数项级数的审敛法
A	正项级数及其审敛法
B	交错级数及其审敛法
C	任意项级数的敛散性

交错级数

定义 2　正负项相间的级数称为交错级数，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$$

或者

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + \cdots$$

其中 $u_n > 0$，$n = 1, 2, 3, \cdots$.

交错级数

定理 6 (莱布尼兹定理) 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足条件

1. $u_{n+1} \leqslant u_n$， $n = 1, 2, 3, \cdots$;
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;

则级数收敛，且其和 $S \leqslant u_1$， 余项满足 $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

交错级数

定理 6 (莱布尼兹定理)　如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足条件

1. $u_{n+1} \leqslant u_n$， $n = 1, 2, 3, \cdots$；
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$；

则级数收敛，且其和 $S \leqslant u_1$，余项满足 $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

例 10　交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛.

第二节	常数项级数的审敛法
A	正项级数及其审敛法
B	交错级数及其审敛法
C	任意项级数的敛散性

引例　研究无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \cdots$$

的敛散性.

任意项级数

定理 7 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

任意项级数

定理 7 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定义 3 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，

任意项级数

定理 7 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定义 3 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，

1 称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散；

任意项级数

定理 7　若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定义 3　对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，

1. 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散；
2. 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 都收敛.

任意项级数

定理 8 对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$ 或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = \rho$，则有

1. 当 $\rho < 1$ 时级数绝对收敛；
2. 当 $\rho > 1$ 时级数发散.

任意项级数

例 11　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$;

任意项级数

例 11　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1};$$

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n};$$

例 11　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}$.

任意项级数

练习 3　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}$;

任意项级数

练习 3　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n-1}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n-1}$;

任意项级数

练习 3　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n-1}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n-1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n\cdot 2^{n}}$.

复习与提高

题 1　设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，能否推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 也收敛？

复习与提高

选择　下列级数中收敛的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\ (0 < p \leqslant 1)$　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - 1\right)$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{5}{2}\right)^n$

复习与提高

选择　设 $u_n \neq 0\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{u_n} = 1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{u_{n+1}} \right)$ . . . . (　　)

(A) 发散

(B) 绝对收敛

(C) 条件收敛

(D) 收敛性不能由条件确定

第三节	幂级数的概念
A	幂级数的收敛域
B	幂级数的和函数

定义 1　形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的级数，即

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

称为 $x-x_0$ 的幂级数.

定义 1 形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的级数，即

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

称为 $x-x_0$ 的幂级数.

特别地，当 $x_0=0$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，即

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

称为 x 的幂级数.

幂级数的收敛域

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

- 若 $x = x_0$ 时级数收敛，称 x_0 为幂级数的收敛点

幂级数的收敛域

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，

- 若 $x = x_0$ 时级数收敛，称 x_0 为幂级数的收敛点
- 若 $x = x_0$ 时级数发散，称 x_0 为幂级数的发散点

幂级数的收敛域

对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

- 若 $x = x_0$ 时级数收敛，称 x_0 为幂级数的收敛点
- 若 $x = x_0$ 时级数发散，称 x_0 为幂级数的发散点

幂级数的全体收敛点构成的集合称为幂级数的收敛域.

定理 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

定理　对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；

定理 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1. 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；
2. 当 $|x| > 1/\rho$ 时，级数发散；

定理 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1. 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；
2. 当 $|x| > 1/\rho$ 时，级数发散；
3. 当 $|x| = 1/\rho$ 时，级数可能收敛也可能发散.

定理 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1. 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；
2. 当 $|x| > 1/\rho$ 时，级数发散；
3. 当 $|x| = 1/\rho$ 时，级数可能收敛也可能发散.

定理 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1. 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；
2. 当 $|x| > 1/\rho$ 时，级数发散；
3. 当 $|x| = 1/\rho$ 时，级数可能收敛也可能发散.

定义 称 $R = 1/\rho$ 为幂级数的收敛半径，称 $(-R, R)$ 为幂级数的收敛区间.

定理 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1. 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；
2. 当 $|x| > 1/\rho$ 时，级数发散；
3. 当 $|x| = 1/\rho$ 时，级数可能收敛也可能发散.

定义 称 $R = 1/\rho$ 为幂级数的收敛半径，称 $(-R, R)$ 为幂级数的收敛区间.

注记 当 $\rho = 0$ 时，规定 $R = +\infty$；当 $\rho = +\infty$ 时，规定 $R = 0$.

幂级数的收敛域

问题　给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答　首先求出收敛半径 R；

1 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能

幂级数的收敛域

问题 给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答 首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能
   - $(-R, R)$

幂级数的收敛域

问题　给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答　首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能

   - $(-R, R)$
   - $[-R, R)$

幂级数的收敛域

问题 给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答 首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能
   - $(-R, R)$
   - $(-R, R]$
   - $[-R, R)$

幂级数的收敛域

问题 给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答 首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能

- $(-R, R)$
- $(-R, R]$
- $[-R, R)$
- $[-R, R]$

幂级数的收敛域

问题　给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答　首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能

   - $(-R, R)$
   - $[-R, R)$
   - $(-R, R]$
   - $[-R, R]$

2. 若 $R = 0$，则收敛域为 $\{0\}$；

幂级数的收敛域

问题　给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答　首先求出收敛半径 R；

1 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能

- $(-R, R)$
- $(-R, R]$
- $[-R, R)$
- $[-R, R]$

2 若 $R = 0$，则收敛域为 $\{0\}$；

3 若 $R = +\infty$，则收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

幂级数的收敛域

例 1　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ 的收敛域.

幂级数的收敛域

例 1　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ 的收敛域.

例 2　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$ 的收敛域.

幂级数的收敛域

例 1　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ 的收敛域.

例 2　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$ 的收敛域.

例 3　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛域.

幂级数的收敛域

例 4　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛域.

幂级数的收敛域

例 4　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛域.

例 5　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n x^{2n}}{n}$ 的收敛域.

幂级数的收敛域

练习 1　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$ 的收敛域.

幂级数的收敛域

注记　即使 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 不存在，即 ρ 不存在，类似的收敛半径 R 依然存在，即有下面的定理.

幂级数的收敛域

注记 即使 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 不存在，即 ρ 不存在，类似的收敛半径 R 依然存在，即有下面的定理.

定理 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在 $x=0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，则必存在一个确定的正数 R，使得

1. 当 $|x|<R$ 时，幂级数绝对收敛；
2. 当 $|x|>R$ 时，幂级数发散.

第三节	幂级数的概念
A	幂级数的收敛域
B	幂级数的和函数

幂级数的运算

定理 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，$R = \min\{R_1, R_2\}$，则有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \pm \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n,$$

其中等式在 $(-R, R)$ 中成立.

幂级数的运算

定理 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，$R = \min\{R_1, R_2\}$，则有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

其中 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$，等式在 $(-R, R)$ 中成立.

幂级数的运算

定理 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，$R=\min\{R_1,R_2\}$，则有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\Big/\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n,$$

其中等式在 $(-R,R)$ 的某个子区间内成立.

幂级数的运算

定理 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，$R=\min\{R_1,R_2\}$，则有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\Big/\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n,$$

其中等式在 $(-R,R)$ 的某个子区间内成立.

例子 $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$ 仅在区间 $(-1,1)$ 上成立.

性质 1 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 上可导，且有逐项求导公式

$$S'(x) = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

性质 1　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 上可导，且有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

例 6　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 的和函数.

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上可积，且有逐项积分公式

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

性质 2 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上可积，且有逐项积分公式

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

例 7 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n+1}$ 的和函数.

性质 3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上连续.

性质 3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上连续.

例 8 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots = \ln 2.$

幂级数的和函数

练习 2　求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ 的和.

复习与提高

选择 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，部分和数列 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$（$n = 1, 2, \cdots$）无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $(-1, 1]$　(B) $[-1, 1)$　(C) $[0, 2)$　(D) $(0, 2]$

第四节	函数展开成泰勒级数
A	泰勒公式和泰勒级数
B	初等函数的幂级数展开式

定理 (泰勒公式)　如果函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶的连续导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)$ 可按 $x-x_0$ 的方幂展开为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

定理 (泰勒公式) 如果函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶的连续导数，则当 $x \in (a,b)$ 时，$f(x)$ 可按 $x-x_0$ 的方幂展开为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

泰勒公式

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

泰勒公式

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 介于 0 和 x 之间.

泰勒公式

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 介于 0 和 x 之间.

令 $\xi = \theta x$，则 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内各阶导数都存在，而且当 $n\to\infty$ 时 $R_n(x)\to 0$，则得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒级数.

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内各阶导数都存在，而且当 $n \to \infty$ 时 $R_n(x) \to 0$，则得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的泰勒级数.

特别地，当 $x_0 = 0$ 时，上式变成

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

第四节	函数展开成泰勒级数
A	泰勒公式和泰勒级数
B	初等函数的幂级数展开式

直接展开法

例 1　将初等函数展开成 x 的幂级数.

(1) $f(x) = \mathrm{e}^x$

直接展开法

例 1　将初等函数展开成 x 的幂级数.

(1) $f(x) = \mathrm{e}^x$

(2) $f(x) = \sin x$

间接展开法

例 2　将初等函数展开成 x 的幂级数.

(1) $f(x) = \cos x$

间接展开法

例 2　将初等函数展开成 x 的幂级数.

(1) $f(x) = \cos x$

(2) $f(x) = \ln(1+x)$

间接展开法

例 2　将初等函数展开成 x 的幂级数.

(1) $f(x) = \cos x$

(2) $f(x) = \ln(1 + x)$

(3) $f(x) = \arctan x$

幂级数展开公式之一

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$$

上述各个幂级数展开式在 $-\infty < x < +\infty$ 时都成立.

幂级数展开公式之二

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

$$\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}x^{2n+1}$$

分别在 $(-1,1)$，$(-1,1)$，$(-1,1]$，$[-1,1]$ 上成立.

初等函数的幂级数展开式

例 3　将函数 $e^{-x/3}$ 展开成 x 的幂级数.

初等函数的幂级数展开式

例 3　将函数 $e^{-x/3}$ 展开成 x 的幂级数.

例 4　将函数 $\cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数.

初等函数的幂级数展开式

例 3　将函数 $e^{-x/3}$ 展开成 x 的幂级数.

例 4　将函数 $\cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数.

例 5　将函数 $\dfrac{x}{x+1}$ 展开成 x 的幂级数.

初等函数的幂级数展开式

例 3　将函数 $e^{-x/3}$ 展开成 x 的幂级数.

例 4　将函数 $\cos^2 x$ 展开成 x 的幂级数.

例 5　将函数 $\dfrac{x}{x+1}$ 展开成 x 的幂级数.

例 6　将函数 $\dfrac{1}{5-x}$ 展开成 $x-2$ 的幂级数.

初等函数的幂级数展开式

练习 1　将函数 $\ln(1-x^2)$ 展成 x 的幂级数.

初等函数的幂级数展开式

练习 1　将函数 $\ln(1-x^2)$ 展成 x 的幂级数.

练习 2　将函数 $\dfrac{x}{x+1}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

幂级数展开公式之三

$$(1+x)^{\alpha}=1+C_{\alpha}^{1}x+C_{\alpha}^{2}x^{2}+C_{\alpha}^{3}x^{3}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}C_{\alpha}^{n}x^{n}$$

幂级数展开公式之三

$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + C_\alpha^3 x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_\alpha^n x^n$$

分别取 $\alpha = 1/2$ 和 $-1/2$，得到

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

上述两个展开式分别在 $[-1,1]$ 和 $(-1,1]$ 上成立.

初等函数的幂级数展开式

例 7　求 $\arcsin x$ 的幂级数展开式.

初等函数的幂级数展开式

例 7 求 $\arcsin x$ 的幂级数展开式.

解答 由 $(1+x)^{\alpha}$ 的幂级数展开式，可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots$$

初等函数的幂级数展开式

例 7 求 $\arcsin x$ 的幂级数展开式.

解答 由 $(1+x)^{\alpha}$ 的幂级数展开式，可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6+\cdots$$

初等函数的幂级数展开式

例 7 求 $\arcsin x$ 的幂级数展开式.

解答 由 $(1+x)^{\alpha}$ 的幂级数展开式，可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^6+\cdots$$

等式两边从 0 到 x 积分，即有

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{x^7}{7}+\cdots$$

复习与提高

题 1　将函数 $\ln(2+x-3x^2)$ 展开为 x 的幂级数.

复习与提高

题 2 将函数 $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ 展成 x 的幂级数.

复习与提高

题 3　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$ 的和函数.

第三节	幂级数的概念
第四节	函数展开成泰勒级数
第五节	幂级数的应用
第七节	傅里叶级数

第五节 幂级数的应用

A	近似计算
B	解微分方程

幂级数的应用

例 1　计算 e 的近似值.

幂级数的应用

例 1 计算 e 的近似值.

例 2 计算 π 的近似值.

幂级数的应用

例 1　计算 e 的近似值.

例 2　计算 π 的近似值.

例 3　计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值.

幂级数的应用

例 1　计算 e 的近似值.

例 2　计算 π 的近似值.

例 3　计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值.

例 4　计算 $\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,dx$ 的近似值.

第五节	幂级数的应用
A	近似计算
B	解微分方程

幂级数的应用

例 5 求方程 $y' = -y - x$ 满足 $y|_{x=0} = 2$ 的特解.

幂级数的应用

例 5 求方程 $y' = -y - x$ 满足 $y|_{x=0} = 2$ 的特解.

例 6 求方程 $y'' = xy$ 满足 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1$ 的特解.

第四节	函数展开成泰勒级数
第五节	幂级数的应用
第七节	傅里叶级数
第八节	一般周期函数的傅里叶级数

认识声波信号

声音由物体的振动产生，如乐器演奏，声带振动.

认识声波信号

声音由物体的振动产生，如乐器演奏，声带振动.

- 基本的简谐振动产生正弦波 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$

认识声波信号

声音由物体的振动产生，如乐器演奏，声带振动.

- 基本的简谐振动产生正弦波 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$
  - 振幅 A 反映声音的音量
  - 频率 ω 反映声音的音调

认识声波信号

声音由物体的振动产生，如乐器演奏，声带振动.

- 基本的简谐振动产生正弦波 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$
  - 振幅 A 反映声音的音量
  - 频率 ω 反映声音的音调
- 复杂的物体振动的声波由不同频率的正弦波组成

认识声波信号

声音由物体的振动产生，如乐器演奏，声带振动.

- 基本的简谐振动产生正弦波 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$
  - 振幅 A 反映声音的音量
  - 频率 ω 反映声音的音调
- 复杂的物体振动的声波由不同频率的正弦波组成
  - 各频率正弦波的比例反映声音的音色

认识声波信号

声音由物体的振动产生，如乐器演奏，声带振动.

- 基本的简谐振动产生正弦波 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$
  - 振幅 A 反映声音的音量
  - 频率 ω 反映声音的音调
- 复杂的物体振动的声波由不同频率的正弦波组成
  - 各频率正弦波的比例反映声音的音色

人耳能感知的声音频率在 20Hz 至 20000Hz 之间，话音的频率在 300Hz 至 3400Hz 之间.

认识声波信号

声音由物体的振动产生，如乐器演奏，声带振动.

- 基本的简谐振动产生正弦波 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$
  - 振幅 A 反映声音的音量
  - 频率 ω 反映声音的音调
- 复杂的物体振动的声波由不同频率的正弦波组成
  - 各频率正弦波的比例反映声音的音色

人耳能感知的声音频率在 20Hz 至 20000Hz 之间，话音的频率在 300Hz 至 3400Hz 之间.

- 记录声音？

认识声波信号

声音由物体的振动产生，如乐器演奏，声带振动.

- 基本的简谐振动产生正弦波 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$
  - 振幅 A 反映声音的音量
  - 频率 ω 反映声音的音调
- 复杂的物体振动的声波由不同频率的正弦波组成
  - 各频率正弦波的比例反映声音的音色

人耳能感知的声音频率在 20Hz 至 20000Hz 之间，话音的频率在 300Hz 至 3400Hz 之间.

- 记录声音？
- 压缩声音？

认识声波信号

声音由物体的振动产生，如乐器演奏，声带振动.

- 基本的简谐振动产生正弦波 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$
  - 振幅 A 反映声音的音量
  - 频率 ω 反映声音的音调
- 复杂的物体振动的声波由不同频率的正弦波组成
  - 各频率正弦波的比例反映声音的音色

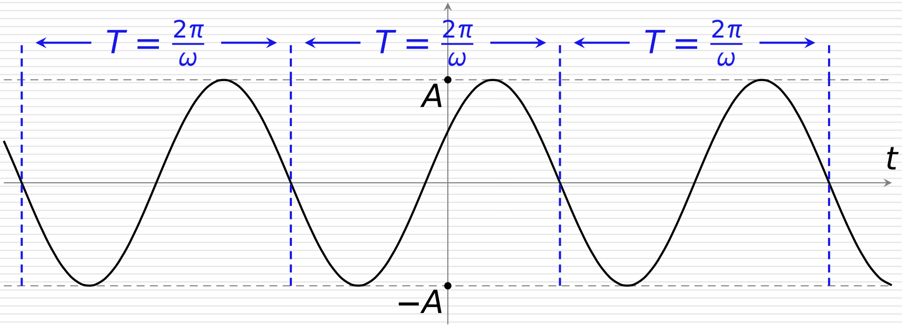
人耳能感知的声音频率在 20Hz 至 20000Hz 之间，话音的频率在 300Hz 至 3400Hz 之间.

- 记录声音？
- 压缩声音？
- 去除噪音？

第七节	傅里叶级数
A	三角级数与三角函数系
B	函数展开为傅里叶级数
C	正弦级数和余弦级数

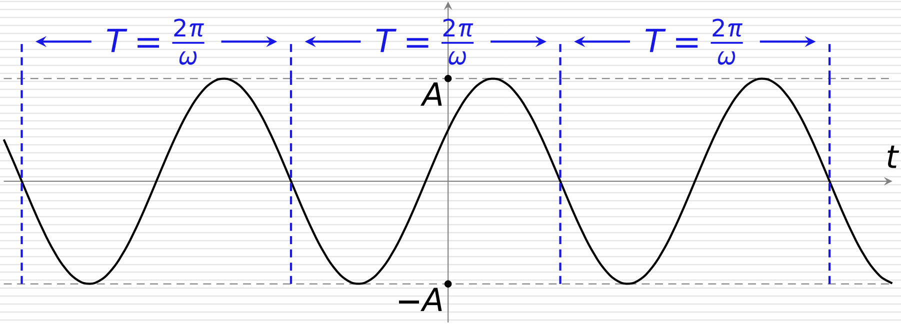
正弦函数 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ 具有周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$，即

$$A\sin(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega(t+T) + \varphi)$$



正弦函数 $y = A\sin(\omega t + \varphi)$ 具有周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$，即

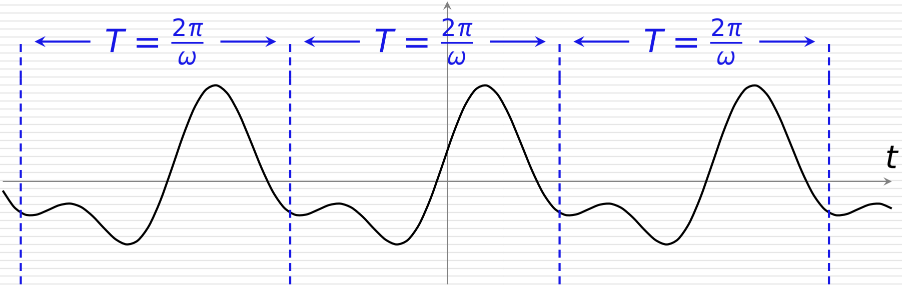
$$A\sin(\omega t + \varphi) = A\sin(\omega(t+T)+\varphi)$$



设 n 为正整数，正弦函数 $y = A_n\sin(n\omega t + \varphi_n)$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{n\omega}$，显然 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 也是周期.

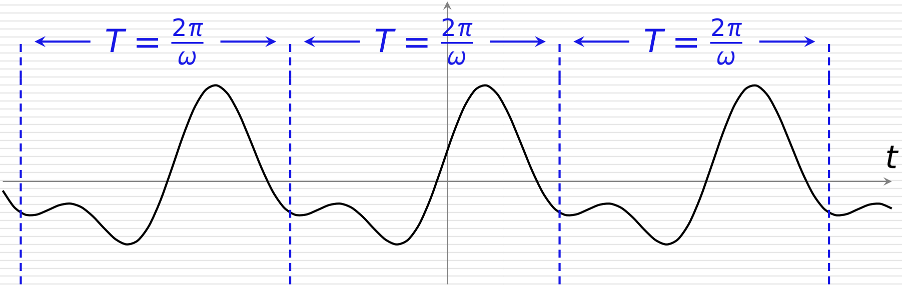
周期函数

设 $f(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，周期也是 $T = \frac{2\pi}{\omega}$.



周期函数

设 $f(t)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数，周期也是 $T=\frac{2\pi}{\omega}$.



问题　是否可将周期函数表示成正弦级数组成的级数

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)\,?$$

设 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2l$，则 $f(t)$ 有周期区间为 $[-l, l]$，

设 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2l$，则 $f(t)$ 有周期区间为 $[-l,l]$，

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)$$

. . . .

设 $T=\frac{2\pi}{\omega}=2l$，则 $f(t)$ 有周期区间为 $[-l,l]$，

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{l}+b_n\sin\frac{n\pi t}{l}\right)$$

. . . .

若周期 $T=2\pi$（$l=\pi$）. $f(x)$ 有周期区间为 $[-\pi,\pi]$，

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

性质　三角函数系 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交．即上述任何两个相异函数乘积，在 $[-\pi, \pi]$ 上积分为零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nx \, dx = 0 \qquad (k, n \in \mathbb{N})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx \, dx = 0 \qquad (k, n \in \mathbb{N}, \ k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx \, dx = 0 \qquad (k, n \in \mathbb{N}, \ k \neq n)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

性质 三角函数系 $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上正交．即上述任何两个相异函数乘积，在 $[-\pi, \pi]$ 上积分为零：

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \cos nx \, dx = 0 \qquad (k, n \in \mathbb{N})$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin nx \, dx = 0 \qquad (k, n \in \mathbb{N},\ k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cdot \cos nx \, dx = 0 \qquad (k, n \in \mathbb{N},\ k \neq n)$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

另外 $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi \quad (n \in \mathbb{N})$

第七节	傅里叶级数
A	三角级数与三角函数系
B	函数展开为傅里叶级数
C	正弦级数和余弦级数

定理 若周期为 2π 的函数 $f(x)$ 能展开为三角级数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

则有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\quad(n=0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

定义　$f(x)$ 的傅里叶级数定义为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

问题　何时有 $f(x)\overset{?}{=}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

定理 (收敛定理)　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

1. 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点
2. 在一个周期内至多只有有限个极值点

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，

定理 (收敛定理)　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

1 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点

2 在一个周期内至多只有有限个极值点

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

1 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$

定理 (收敛定理) 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，如果它满足：

1. 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点
2. 在一个周期内至多只有有限个极值点

那么 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛，并且

1. 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时，级数收敛于 $f(x)$
2. 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时，级数收敛于

$$\frac{1}{2}\left[f(x^-)+f(x^+)\right]$$

例 1 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

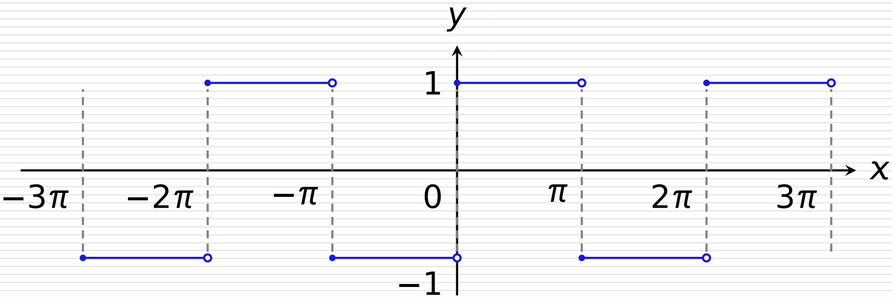
$$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0, \\ 1, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$$

求出 $f(x)$ 的傅里叶级数.

例 1　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$$

求出 $f(x)$ 的傅里叶级数.



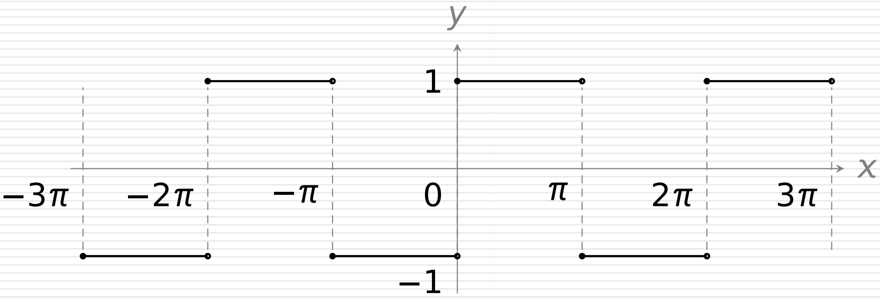
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$

$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：

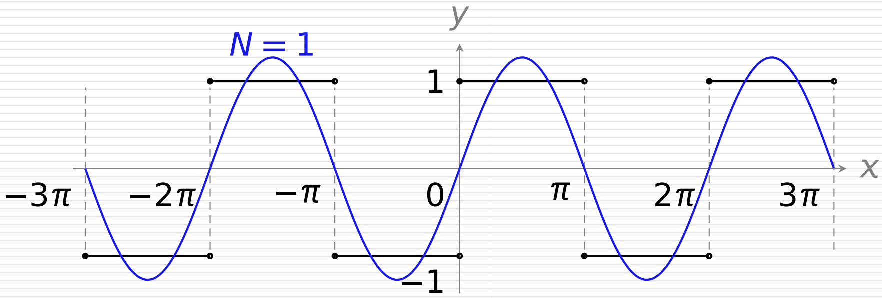
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



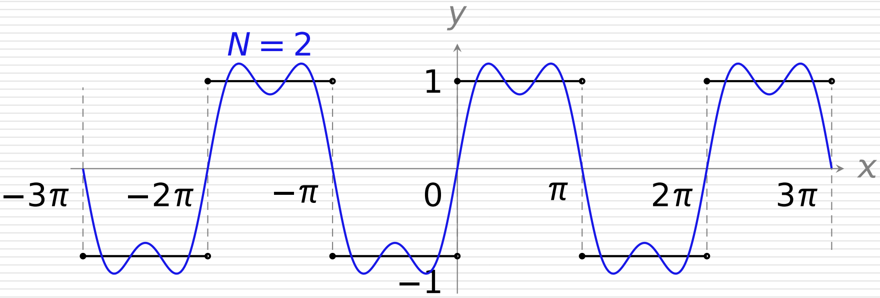
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



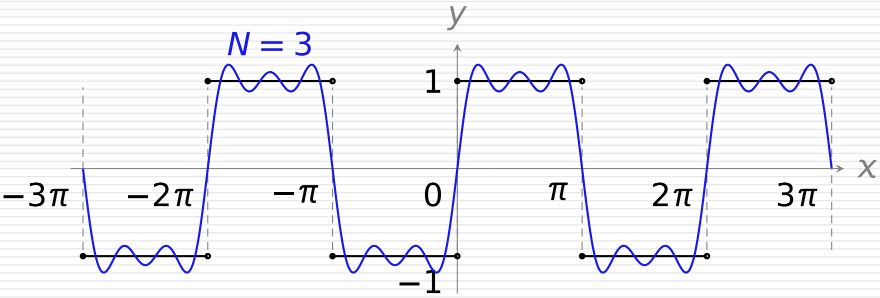
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



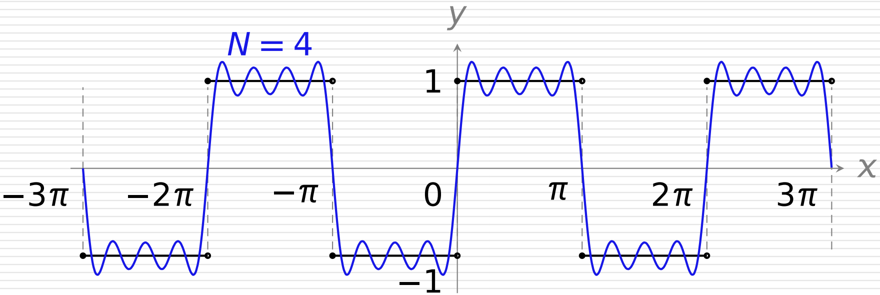
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



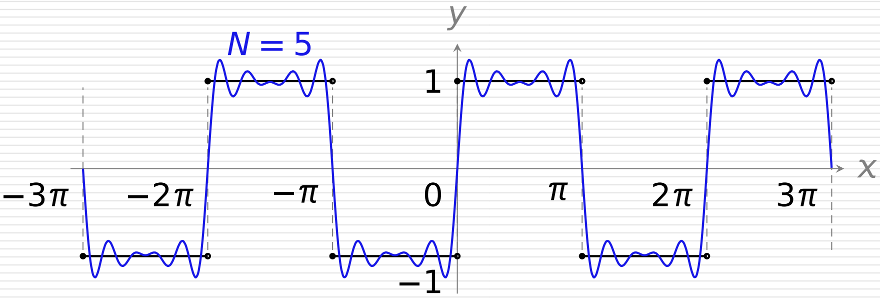
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



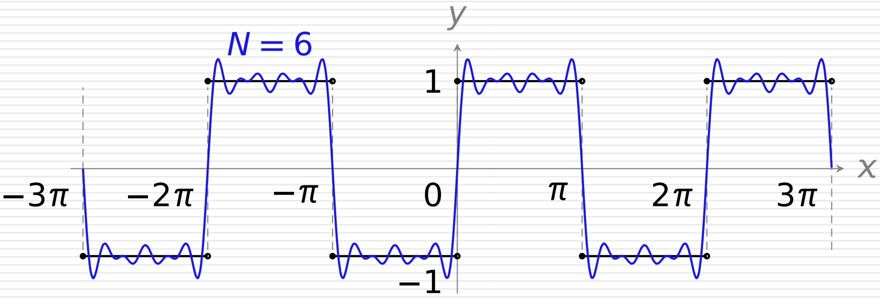
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



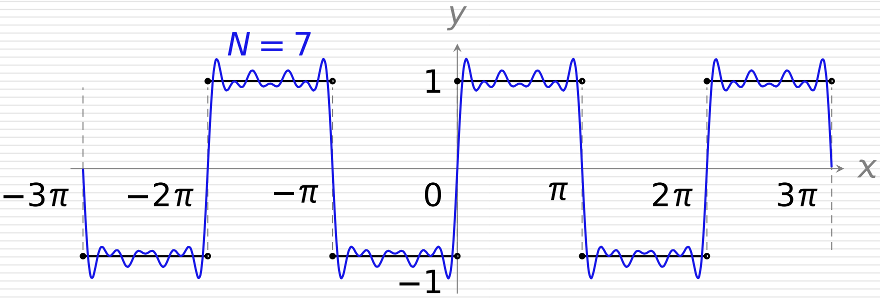
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



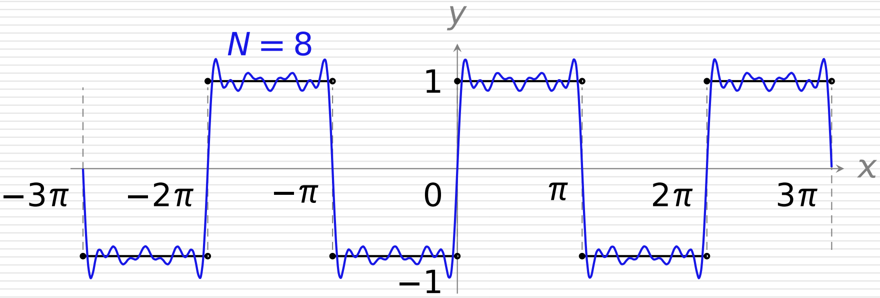
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n-1}\sin\left[(2n-1)x\right]$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



例 2　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi, \pi)$ 上的表达式为

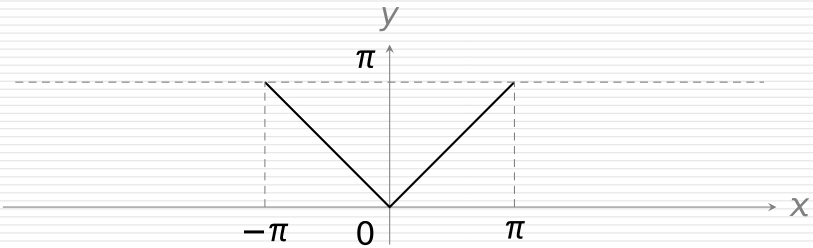
$$f(x) = |x|$$

求出 $f(x)$ 的傅里叶级数.

例 2　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x) = |x|$$

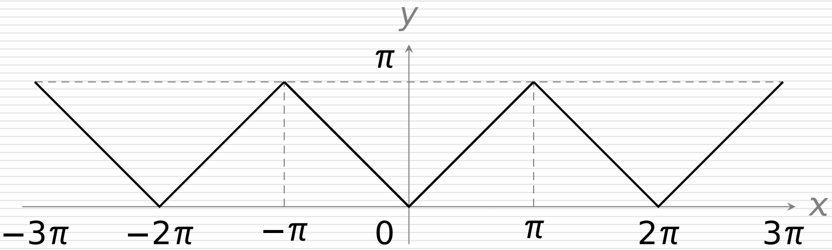
求出 $f(x)$ 的傅里叶级数.



例 2　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为

$$f(x)=|x|$$

求出 $f(x)$ 的傅里叶级数.



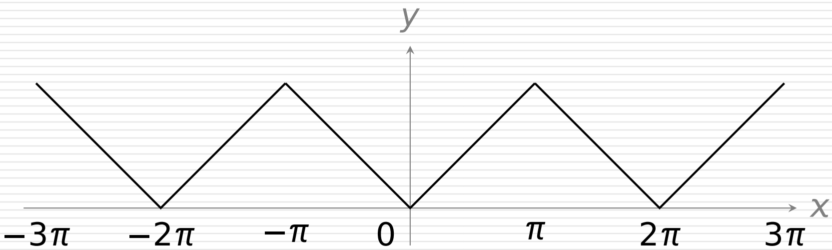
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：

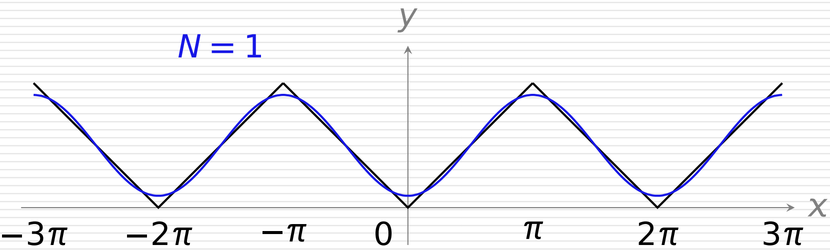
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



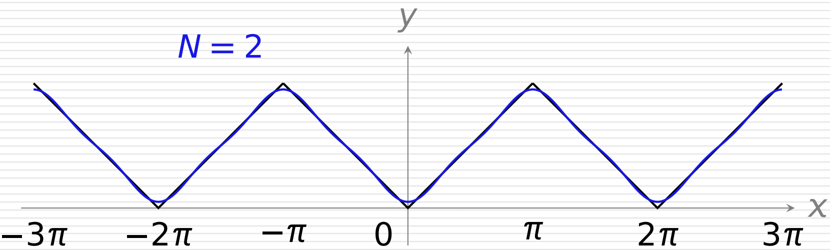
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



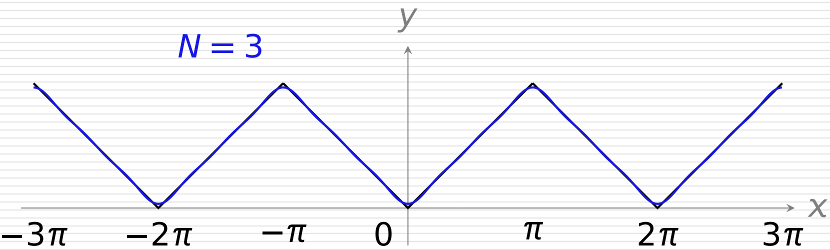
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



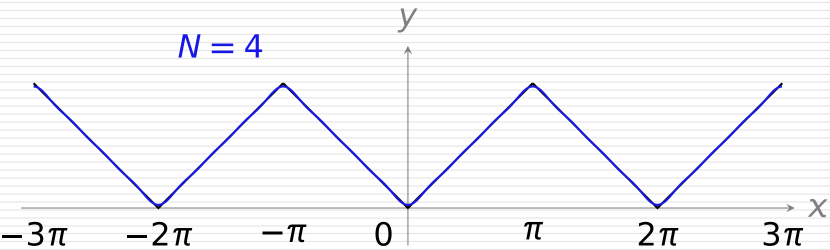
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



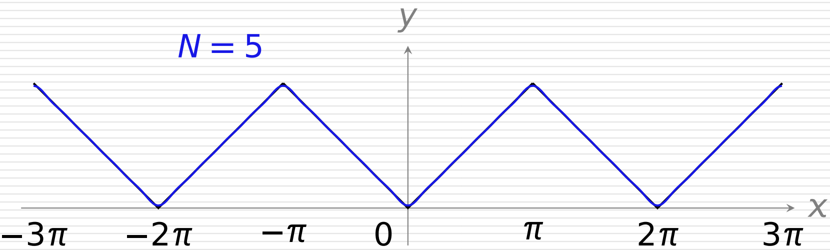
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



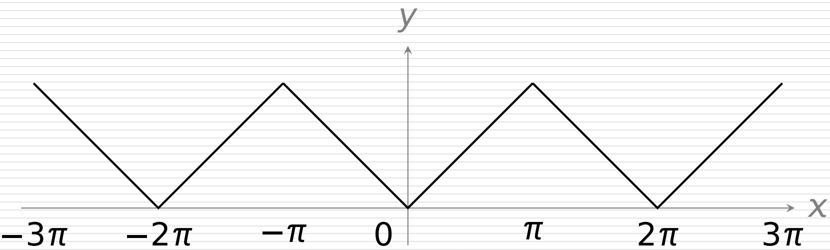
$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



$f(x)$ 的傅里叶级数是 $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos[(2n-1)x]}{(2n-1)^2}$

考虑级数的部分和，即前 N 项之和：



. . . .

令 $x = 0$，得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5^2} + \cdots = \dfrac{\pi^2}{8}$.

定理 (欧拉) $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

定理 (欧拉) $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

定理 (欧拉) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \\ &= \left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right) \\ &\quad+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\right)\end{aligned}$$

定理 (欧拉) $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots \\
&= \left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right) \\
&\quad + \left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\right) \\
&= \frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

定理 (欧拉) $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

$$=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

第七节	傅里叶级数
A	三角级数与三角函数系
B	函数展开为傅里叶级数
C	正弦级数和余弦级数

正弦级数和余弦级数

性质　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，

- 若 $f(x)$ 是奇函数，则傅里叶级数为正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x$$

正弦级数和余弦级数

性质　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，

- 若 $f(x)$ 是奇函数，则傅里叶级数为正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

- 若 $f(x)$ 是偶函数，则傅里叶级数为余弦级数

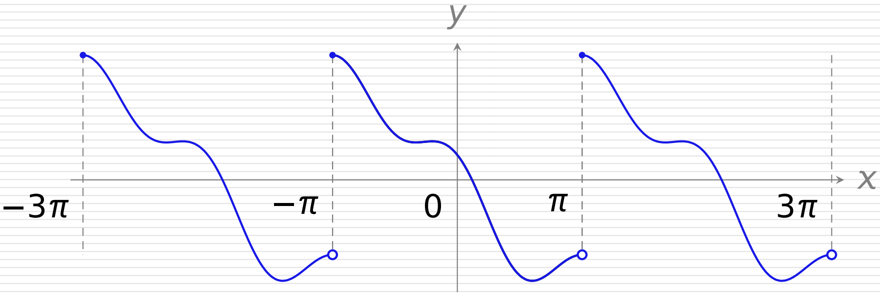
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$$

周期延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-\pi, \pi)$（或 $(-\pi, \pi]$）上的函数，可以对其进行周期延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数：

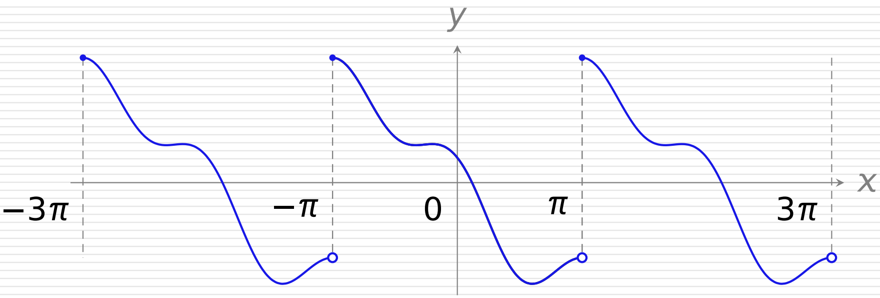
周期延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-\pi, \pi)$（或 $(-\pi, \pi]$）上的函数，可以对其进行周期延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数：



周期延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[-\pi,\pi)$（或 $(-\pi,\pi]$）上的函数，可以对其进行周期延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期函数：



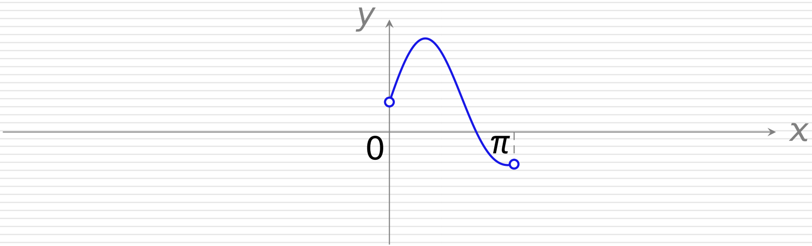
延拓后的周期函数仍记为 $f(x)$，此时可作傅里叶展开.

奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0, \pi)$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期奇函数.

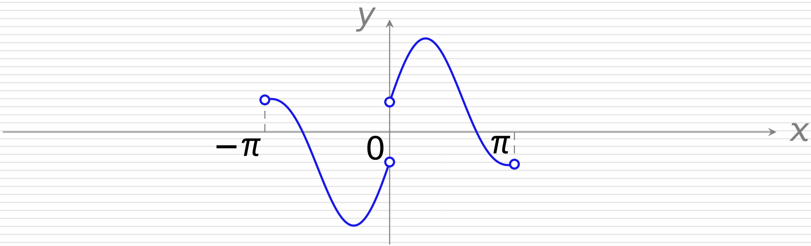
奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,\pi)$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期奇函数.



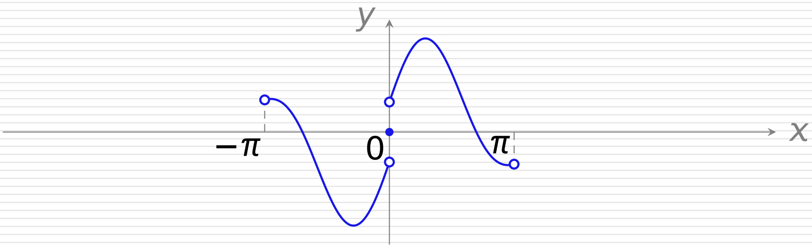
奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,\pi)$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期奇函数.



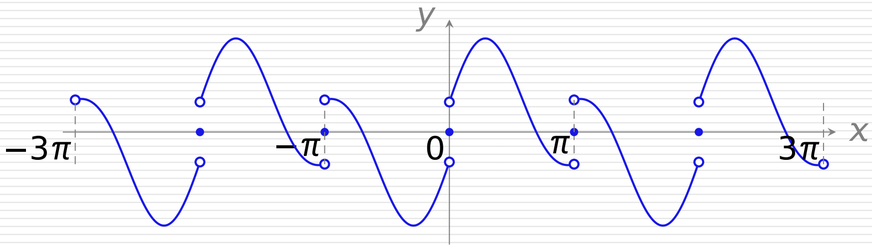
奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,\pi)$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期奇函数.



奇延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $(0,\pi)$ 上的函数，可以对其进行奇延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期奇函数.

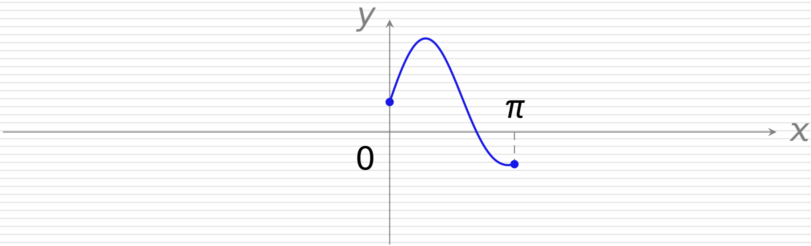


偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0,\pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期偶函数.

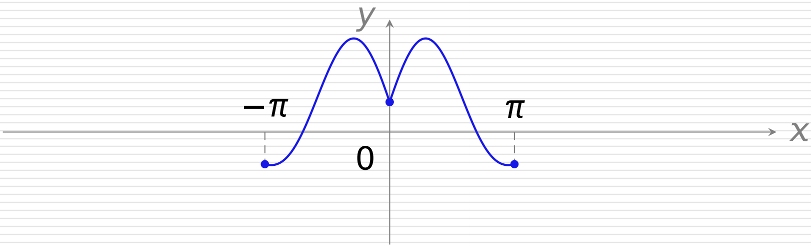
偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期偶函数.



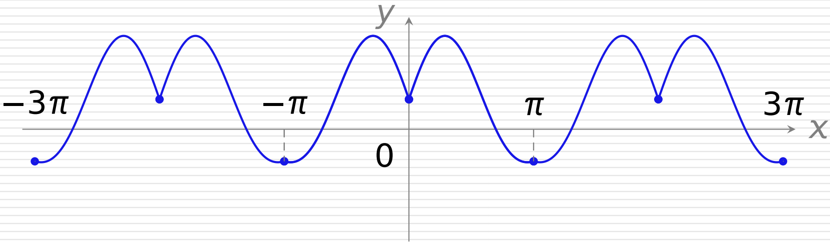
偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0,\pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期偶函数.



偶延拓

设 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, \pi]$ 上的函数，可以对其进行偶延拓，从而得到定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期偶函数.



例 3　将下面函数分别展开成正弦级数和余弦级数

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0 \le x < \pi/2,\\ 0, & \pi/2 \le x \le \pi.\end{cases}$$

复习与提高

选择 将 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2} \\ 2\pi-2x, & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ 展开成傅里叶级数 $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx$ $(-\infty<x<\infty)$，其中 $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则 $S(-\frac{5\pi}{2})$ 等于 ……………………………（　　）

(A) $\dfrac{\pi}{2}$　　(B) $-\dfrac{\pi}{2}$　　(C) $\dfrac{3\pi}{4}$　　(D) $-\dfrac{3\pi}{4}$

第四节	函数展开成泰勒级数
第五节	幂级数的应用
第七节	傅里叶级数
第八节	一般周期函数的傅里叶级数

假设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上周期函数，周期为 $T = 2l$，其傅里叶级数为：

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

例 1　设 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数，它在 $[-2,2)$ 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} 0, & -2 \le x < 0, \\ h, & 0 \le x < 2. \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数.

复习与提高

题 1　将 $f(x) = 2 + |x|$（$-1 \leqslant x \leqslant 1$）展开成以 2 为周期的傅里叶级数.