高等数学课程

补充：连续性理论

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

实数集

问题 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{Q}$ 分别有何区别？

实数集

问题 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{Q}$ 分别有何区别?

1. 运算性：$\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Z}$ 的区别

实数集

问题 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{Q}$ 分别有何区别？

1. 运算性：$\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Z}$ 的区别
2. 顺序性：$\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 的区别

实数集

问题 $\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Z}$、$\mathbb{C}$、$\mathbb{Q}$ 分别有何区别?

1 运算性：$\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Z}$ 的区别
2 顺序性：$\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{C}$ 的区别
3 连续性：$\mathbb{R}$ 与 $\mathbb{Q}$ 的区别

实数集

定义 实数集 $\mathbb{R}$ 是包含 0 和 1 且满足下列三种性质的数集:

1. 运算性：任何两个实数作四则运算后还是实数，而且四则运算还满足交换律、结合律、分配律等运算定律.
2. 顺序性：任何两个实数都可以比较大小，而且当 $x > 0, y > 0$ 时总有 $x + y > 0$ 和 $xy > 0$.
3. 连续性：实数集满足确界原理，即有上界（下界）的非空子集必有最小上界（最大下界）.

确界原理

对于 $\mathbb{R}$ 的非空子集 A，如果对每个 $x \in A$，都满足 $x \leqslant m$，则称 m 为 A 的一个上界.

确界原理

对于 $\mathbb{R}$ 的非空子集 A，如果对每个 $x \in A$，都满足 $x \leqslant m$，则称 m 为 A 的一个上界.

如果 m 是 A 的一个上界，而且任何小于 m 的数都不是 A 的上界，则称 m 为 A 的最小上界，记为 $\sup A$.

确界原理

对于 $\mathbb{R}$ 的非空子集 A，如果对每个 $x \in A$，都满足 $x \leqslant m$，则称 m 为 A 的一个上界.

如果 m 是 A 的一个上界，而且任何小于 m 的数都不是 A 的上界，则称 m 为 A 的最小上界，记为 $\sup A$.

对于 $\mathbb{R}$ 的非空子集 A，如果对每个 $x \in A$，都满足 $x \geqslant m$，则称 m 为 A 的一个下界.

确界原理

对于 $\mathbb{R}$ 的非空子集 A，如果对每个 $x \in A$，都满足 $x \leqslant m$，则称 m 为 A 的一个上界.

如果 m 是 A 的一个上界，而且任何小于 m 的数都不是 A 的上界，则称 m 为 A 的最小上界，记为 $\sup A$.

对于 $\mathbb{R}$ 的非空子集 A，如果对每个 $x \in A$，都满足 $x \geqslant m$，则称 m 为 A 的一个下界.

如果 m 是 A 的一个下界，而且任何大于 m 的数都不是 A 的下界，则称 m 为 A 的最大下界，记为 $\inf A$.

确界原理

下面是确界原理的一些例子：

1. 若 $A = \{1, 2, 3\}$，则 $\sup A = 3$.

确界原理

下面是确界原理的一些例子：

1. 若 $A=\{1,2,3\}$，则 $\sup A=3$.
2. 若 $A=\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots\}$，则 $\sup A=1$.

确界原理

下面是确界原理的一些例子：

1. 若 $A = \{1, 2, 3\}$，则 $\sup A = 3$.
2. 若 $A = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots\}$，则 $\sup A = 1$.
3. 若 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$，则 $\sup A$ 不存在.

确界原理

下面是确界原理的一些例子:

1. 若 $A=\{1,2,3\}$, 则 $\sup A=3$.
2. 若 $A=\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots\}$, 则 $\sup A=1$.
3. 若 $A=\{1,2,3,4,5,\cdots\}$, 则 $\sup A$ 不存在.
4. 若 $A=\{x\,|\,0<x<1\}$, 则 $\sup A=1$.

确界原理

下面是确界原理的一些例子：

1. 若 $A=\{1,2,3\}$，则 $\sup A=3$.
2. 若 $A=\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots\}$，则 $\sup A=1$.
3. 若 $A=\{1,2,3,4,5,\cdots\}$，则 $\sup A$ 不存在.
4. 若 $A=\{x\,|\,0<x<1\}$，则 $\sup A=1$.
5. 若 $A=\{x\,|\,x^2<2\}$，则 $\sup A=\sqrt{2}$.

确界原理

实数集 $\mathbb{R}$ 满足确界原理：

确界原理

实数集 $\mathbb{R}$ 满足确界原理：当全集为 $\mathbb{R}$ 时，

- $\{x \mid x^2 < 2\}$ 由所有平方小于 2 的实数组成，

确界原理

实数集 $\mathbb{R}$ 满足确界原理：当全集为 $\mathbb{R}$ 时，

- $\{x \mid x^2 < 2\}$ 由所有平方小于 2 的实数组成，
- 它有最小上界 $\sqrt{2}$.

确界原理

实数集 $\mathbb{R}$ 满足确界原理：当全集为 $\mathbb{R}$ 时，

- $\{x \mid x^2 < 2\}$ 由所有平方小于 2 的实数组成，
- 它有最小上界 $\sqrt{2}$.

有理数集 $\mathbb{Q}$ 不满足确界原理：

确界原理

实数集 $\mathbb{R}$ 满足确界原理：当全集为 $\mathbb{R}$ 时，

- $\{x \mid x^2 < 2\}$ 由所有平方小于 2 的实数组成，
- 它有最小上界 $\sqrt{2}$.

有理数集 $\mathbb{Q}$ 不满足确界原理：当全集为 $\mathbb{Q}$ 时，

- $\{x \mid x^2 < 2\}$ 由所有平方小于 2 的有理数组成，

确界原理

实数集 $\mathbb{R}$ 满足确界原理：当全集为 $\mathbb{R}$ 时，

- $\{x \mid x^2 < 2\}$ 由所有平方小于 2 的实数组成，
- 它有最小上界 $\sqrt{2}$.

有理数集 $\mathbb{Q}$ 不满足确界原理：当全集为 $\mathbb{Q}$ 时，

- $\{x \mid x^2 < 2\}$ 由所有平方小于 2 的有理数组成，
- 它有上界 2，但没有最小上界（因为 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$）.

确界原理

例子　求数集 $A = \{x \,|\, x^3 + x < 1\}$ 的最小上界.

确界原理

例子　求数集 $A = \{x \,|\, x^3 + x < 1\}$ 的最小上界.

- 1 为上界，0 不为上界

确界原理

例子　求数集 $A = \{x \,|\, x^3 + x < 1\}$ 的最小上界.

- 1 为上界，0 不为上界
- 0.7 为上界，0.6 不为上界

确界原理

例子　求数集 $A=\{x\,|\,x^3+x<1\}$ 的最小上界.

- 1 为上界，0 不为上界
- 0.7 为上界，0.6 不为上界
- 0.69 为上界，0.68 不为上界

确界原理

例子　求数集 $A = \{x \mid x^3 + x < 1\}$ 的最小上界.

- 1 为上界，0 不为上界
- 0.7 为上界，0.6 不为上界
- 0.69 为上界，0.68 不为上界
- 0.683 为上界，0.682 不为上界

确界原理

例子　求数集 $A = \{x \mid x^3 + x < 1\}$ 的最小上界.

- 1 为上界，0 不为上界
- 0.7 为上界，0.6 不为上界
- 0.69 为上界，0.68 不为上界
- 0.683 为上界，0.682 不为上界
- 0.6824 为上界，0.6823 不为上界

确界原理

例子　求数集 $A=\{x\,|\,x^3+x<1\}$ 的最小上界.

- 1 为上界，0 不为上界
- 0.7 为上界，0.6 不为上界
- 0.69 为上界，0.68 不为上界
- 0.683 为上界，0.682 不为上界
- 0.6824 为上界，0.6823 不为上界
- 0.68233 为上界，0.68232 不为上界

确界原理

例子　求数集 $A = \{x \,|\, x^3 + x < 1\}$ 的最小上界.

- 1 为上界，0 不为上界
- 0.7 为上界，0.6 不为上界
- 0.69 为上界，0.68 不为上界
- 0.683 为上界，0.682 不为上界
- 0.6824 为上界，0.6823 不为上界
- 0.68233 为上界，0.68232 不为上界
- 0.682328 为上界，0.682327 不为上界

确界原理

例子　求数集 $A=\{x\,|\,x^3+x<1\}$ 的最小上界.

- 1 为上界，0 不为上界
- 0.7 为上界，0.6 不为上界
- 0.69 为上界，0.68 不为上界
- 0.683 为上界，0.682 不为上界
- 0.6824 为上界，0.6823 不为上界
- 0.68233 为上界，0.68232 不为上界
- 0.682328 为上界，0.682327 不为上界

最小上界为 0.682327803828019327369483⋯

极限存在准则 II

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

极限存在准则 II

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

极限存在准则 II

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

证明　设数列 $\{x_n\}$ 单调增加而且有上界. 由确界原理, 集合 $\{x_n\}$ 有最小上界 a. 我们断言该数列收敛于 a. 实际上, 对于任何 $\epsilon > 0$, 由于 a 为最小上界, $a - \epsilon$ 不是集合 $\{x_n\}$ 的上界. 所以总存在 N, 使得 $x_N > a - \epsilon$. 再由数列是单调增加的, 我们知道当 $n > N$ 时也有 $x_n > a - \epsilon$, 从而 $|x_n - a| < \epsilon$. 这样就证明了我们的断言.

极限存在准则 II

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

证明　设数列 $\{x_n\}$ 单调增加而且有上界. 由确界原理, 集合 $\{x_n\}$ 有最小上界 a. 我们断言该数列收敛于 a. 实际上, 对于任何 $\epsilon > 0$, 由于 a 为最小上界, $a-\epsilon$ 不是集合 $\{x_n\}$ 的上界. 所以总存在 N, 使得 $x_N > a-\epsilon$. 再由数列是单调增加的, 我们知道当 $n > N$ 时也有 $x_n > a-\epsilon$, 从而 $|x_n - a| < \epsilon$. 这样就证明了我们的断言.

注记　单调增加有上界数列满足 $\sup\{x_n\} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

指数函数的连续性

例子 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$

指数函数的连续性

例子 $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$

证明 假设 $a > 1$. 令 $x_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$, 则 $a = (x_n + 1)^n \geqslant 1 + nx_n$. 即 $x_n \leqslant \frac{a-1}{n}$. $\forall \epsilon > 0$, 取 $N = \frac{a-1}{\epsilon}$, 则当 $n > N$ 时有

$$|x_n - 0| = x_n \leqslant \frac{a-1}{n} < \epsilon$$

故 $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, 即 $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$. 如果 $0 < a < 1$, 我们可以由 $(\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{1/n}}$ 和极限的运算法则得到结果.

指数函数的连续性

例子　证明 $\lim_{x \to 0} a^x = 1.$

指数函数的连续性

例子 证明 $\lim_{x \to 0} a^x = 1$.

证明 我们只证明 $a > 1$ 的情形，$0 < a < 1$ 的情形类似.

$\forall \epsilon > 0$，由 $\lim_{n \to \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ 知道，$\exists N_1 > 0$ 使得当 $n > N_1$ 时有 $|a^{\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$. 因此，当 $0 < x < \frac{1}{N_1}$ 有

$$a^x - 1 < a^{\frac{1}{N_1}} - 1 < \epsilon.$$

指数函数的连续性

证明 (续)　类似地，由 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{a})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$ 知道，$\exists N_2 > 0$ 使得当 $n > N_2$ 时有 $|a^{-\frac{1}{n}} - 1| < \epsilon$. 因此，当 $-\frac{1}{N_2} < x < 0$ 有

$$a^x - 1 > a^{-\frac{1}{N_2}} - 1 > -\epsilon.$$

取 $\delta = \min\{\frac{1}{N_1}, \frac{1}{N_2}\}$，则当 $|x - 0| < \delta$ 时有

$$|a^x - 1| < \epsilon.$$

从而 $\lim_{x\to 0} a^x = 1$.

指数函数的连续性

例子　证明 $\lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$.

指数函数的连续性

例子 证明 $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$.

证明 由 $a^x = a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}$，根据极限的四则运算法则知道

$$\lim_{x\to x_0} a^x = \lim_{x\to x_0} a^{x_0} \lim_{x\to x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{t\to 0} a^t = a^{x_0},$$

这样就证明了指数函数的连续性.

三角函数的连续性

例子　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

三角函数的连续性

例子　证明 $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$

证明　前面已经知道 $\sin x < x$（$0 < x < \frac{\pi}{2}$），从而 $|\sin x| < |x|$（$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$）.

三角函数的连续性

例子　证明 $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$

证明　前面已经知道 $\sin x < x$（$0 < x < \frac{\pi}{2}$），从而 $|\sin x| < |x|$（$0 < |x| < \frac{\pi}{2}$）.

$\forall\epsilon > 0$，取 $\delta=\epsilon$，则当 $0 < |x-x_0| < \delta$ 时，有

$$
\begin{aligned}
|\sin x-\sin x_0| &= \left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right| \\
&\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| < \epsilon
\end{aligned}
$$

这就证明了正弦函数的连续性.

反函数的连续性

定理 设 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（减少）且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也是单调增加（减少）且连续的.

反函数的连续性

定理　设 $y = f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（减少）且连续，则它的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 也是单调增加（减少）且连续的.

证明　我们只证明反函数的连续性．也就是说，任取 $y_0 \in I_y$，我们要证明 $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$.

反函数的连续性

定理 设 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加（减少）且连续，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 也是单调增加（减少）且连续的.

证明 我们只证明反函数的连续性．也就是说，任取 $y_0\in I_y$，我们要证明 $\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$.

事实上，对任何 $\epsilon>0$，令 $y_1=f(x_0-\epsilon)$，$y_2=f(x_0+\epsilon)$，则由反函数的单调性，知道当 $y_1<y<y_2$ 时有 $x_0-\epsilon<x<x_0+\epsilon$，即 $|x-x_0|=|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<\epsilon$．取 $\delta=\min\{y-y_1, y_2-y\}$，即可得到反函数 $f^{-1}(y)$ 在点 y_0 的连续性.

初等函数的连续性

首先说明基本初等函数的连续性：

- $y = c$ 连续
- $y = \sin x$ 连续 $\Longrightarrow y = \arcsin x$ 连续
- $y = a^x$ 连续 $\Longrightarrow y = \log_a x$ 连续
- $y = x^\mu = a^{\mu \log_a x}$ 连续

再利用四则运算和复合运算的连续性，就得到初等函数的连续性.

有界性定理

引理　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则存在 $\delta > 0$，使得它在邻域 $(x-\delta, x+\delta)$ 内有界.

有界性定理

引理　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则存在 $\delta > 0$，使得它在邻域 $(x-\delta, x+\delta)$ 内有界.

定理　闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在该区间上有界.

有界性定理

引理　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则存在 $\delta > 0$，使得它在邻域 $(x-\delta, x+\delta)$ 内有界.

定理　闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在该区间上有界.

证明　设 $S = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b$ 而且 $f(x)$ 在 $[a,x]$ 有上界$\}$，则集合 S 非空而且有上界，由确界原理知 S 有最小上界 c.

我们先证明 $c = b$. 用反证法，假设 $c < b$，则由知道存在 $\delta > 0$ 使得 $f(x)$ 在 $(c-\delta, c+\delta)$ 内有界. 由 c 为最小上界知道，存在 $x_1 \in S$ 使得 $c-\delta < x_1 < c$. 这说明 $f(x)$ 在 $[a,x_1]$ 有上界. 再任取 x_2 使得 $c < x_2 < c+\delta$，则 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 有上界，从而 $f(x)$ 在 $[a,x_2]$ 有上界，即 $x_2 \in S$ 而且 $c < x_2$. 这与 c 为上界矛盾，因此我们有 $c = b$.

有界性定理

证明 (续)　$f(x)$ 在 a 点连续说明 $f(x)$ 在某个右邻域 $[a, a+\delta_1)$ 上有界，因此 $c > a$，从而上面的论述中的 δ 是存在的．而 $f(x)$ 在 b 点连续说明 $f(x)$ 在某个左邻域 $(b-\delta_2, b]$ 上有界，而由 S 的最小上界为 b 已经知道 $f(x)$ 在 $[a, b-\delta_2]$ 上有上界，从而 $f(x)$ 在 $[a.b]$ 上有上界．

类似地，可以证明 $f(x)$ 在 $[a.b]$ 上有下界．

最值定理

定理 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在该区间上一定能取到最大值 M 和最小值 m.

最值定理

定理　闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在该区间上一定能取到最大值 M 和最小值 m.

证明　已经知道 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是有界的．令 $S=\{f(x)|x\in[a.b]\}$，则由确界原理知道 S 有最小上界 M．假设 $f(x)$ 取不到值 M，则对任何 $x\in[a,b]$，恒有 $f(x)<M$.

令 $g(x)=\dfrac{1}{M-f(x)}$，则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也是连续的，从而有上界 $N>0$，使得 $g(x)\leqslant N$．这等价于 $f(x)\leqslant M-\dfrac{1}{N}$，从而和 M 为最小上界矛盾．因此，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到最大值 M.

类似地，可以证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以取到最小值 m.

零值定理

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

零值定理

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

证明 不妨设 $f(a)<0<f(b)$. 令 $S=\{x\,|\,x\in[a,b],f(x)<0\}$，则由确界原理，集合 S 有最小上界 c. 我们断言 $f(c)=0$.

如果 $f(c)<0$，由函数极限的局部保号性，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(c-\delta,c+\delta)$ 时总有 $f(x)<0$. 此时就有 $c+\delta/2\in S$. 这与 c 为上界矛盾.

如果 $f(c)>0$，有函数极限的局部保号性，存在 $\delta>0$，使得当 $x\in(c-\delta,c+\delta)$ 时总有 $f(x)>0$. 此时 S 就有比 c 更小的上界 $c-\delta/2$. 这与 c 为最小上界矛盾.

介值定理

定理 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

介值定理

定理　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

推论　设 $f(x)$ 是在区间 (a,b) 上单调增加的连续函数，$A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，$B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$，则该函数的值域为区间 (A,B).

介值定理

定理　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

推论　设 $f(x)$ 是在区间 (a,b) 上单调增加的连续函数，$A=\lim_{x\to a^+} f(x)$，$B=\lim_{x\to b^-} f(x)$，则该函数的值域为区间 (A,B).

注记 1　如果函数的定义区间为闭区间或无穷区间，或者函数单调减少，此推论作相应修改后仍然成立.

介值定理

定理　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

推论　设 $f(x)$ 是在区间 (a,b) 上单调增加的连续函数，$A=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$，$B=\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$，则该函数的值域为区间 (A,B).

注记 1　如果函数的定义区间为闭区间或无穷区间，或者函数单调减少，此推论作相应修改后仍然成立.

注记 2　利用这个推论，我们才可以说明指数函数 a^x 的值域，即对数函数 $\log_a x$ 的定义域确实为 $(0,+\infty)$.