高等数学课程

补充：差分与和式

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	差分
第二节	不定和式
第三节	定和式
第四节	分部求和

差分的概念

定义　设 $f(x)$ 为数列，其中 x 为非负整数，定义数列的差分为

$$\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x).$$

数列的差分依然是一个数列.

……………………………………………

差分的概念

定义　设 $f(x)$ 为数列，其中 x 为非负整数，定义数列的差分为

$$\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x).$$

数列的差分依然是一个数列.

……………………………………………

例子　$\Delta(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x+1.$

微分与差分

微分公式

1. $\mathrm{d}(c) = 0$
2. $\mathrm{d}(x) = 1 \cdot \mathrm{d}x$
3. $\mathrm{d}(x^a) = a \cdot x^{a-1} \cdot \mathrm{d}x$
4. $\mathrm{d}(a^x) = \ln a \cdot a^x \cdot \mathrm{d}x$

微分与差分

微分公式

1. $d(c) = 0$
2. $d(x) = 1 \cdot dx$
3. $d(x^a) = a \cdot x^{a-1} \cdot dx$
4. $d(a^x) = \ln a \cdot a^x \cdot dx$ $\Rightarrow$ $d(e^x) = e^x \, dx$

微分与差分

微分公式

1. $\mathrm{d}(c) = 0$
2. $\mathrm{d}(x) = 1 \cdot \mathrm{d}x$
3. $\mathrm{d}(x^{a}) = a \cdot x^{a-1} \cdot \mathrm{d}x$
4. $\mathrm{d}(a^{x}) = \ln a \cdot a^{x} \cdot \mathrm{d}x$ $\Rightarrow$ $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x}) = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

差分公式

1. $\Delta(c) = 0$
2. $\Delta(x) = 1$
3. $\Delta(x^{\underline{a}}) = a \cdot x^{\underline{a-1}}$
4. $\Delta(a^{x}) = (a - 1) \cdot a^{x}$

微分与差分

微分公式

1. $d(c) = 0$
2. $d(x) = 1 \cdot dx$
3. $d(x^a) = a \cdot x^{a-1} \cdot dx$
4. $d(a^x) = \ln a \cdot a^x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad d(e^x) = e^x\, dx$

差分公式

1. $\Delta(c) = 0$
2. $\Delta(x) = 1$
3. $\Delta(x^{\underline{a}}) = a \cdot x^{\underline{a-1}}$
4. $\Delta(a^x) = (a-1) \cdot a^x \quad \Rightarrow \quad \Delta(2^x) = 2^x$

微分与差分

微分公式

1 $\mathrm{d}(c) = 0$

2 $\mathrm{d}(x) = 1 \cdot \mathrm{d}x$

3 $\mathrm{d}(x^{a}) = a \cdot x^{a-1} \cdot \mathrm{d}x$

4 $\mathrm{d}(a^{x}) = \ln a \cdot a^{x} \cdot \mathrm{d}x$ ⇨ $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x}) = \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

差分公式

1 $\Delta(c) = 0$

2 $\Delta(x) = 1$

3 $\Delta(x^{\underline{a}}) = a \cdot x^{\underline{a-1}}$

4 $\Delta(a^{x}) = (a-1) \cdot a^{x}$ ⇨ $\Delta(2^{x}) = 2^{x}$

注记　下降幂 $x^{\underline{a}}$ 的定义见下页.

下降幂

定义 设 a 为正整数，则正指数下降幂定义为

$$x^{\underline{a}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-a+1).$$

而负指数下降幂定义为

$$x^{\underline{-a}} = 1/(x+1)(x+2)\cdots(x+a).$$

微分与差分

微分性质

1. $\mathrm{d}(cu) = c\,\mathrm{d}u$
2. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$
3. $\mathrm{d}(uv) = v\,\mathrm{d}u + u\,\mathrm{d}v$
4. $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$

微分与差分

微分性质

1. $d(cu) = c\,du$
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$
3. $d(uv) = v\,du + u\,dv$
4. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

差分性质

1. $\Delta(cu) = c\Delta u$
2. $\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$
3. $\Delta(uv) = v\Delta u + Eu\Delta v = u\Delta v + Ev\Delta u$
4. $\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{vEv}$

其中移位算子 $E(f(x)) = f(x+1)$.

连续与离散

- 差分的运算性质与微分很相似.

连续与离散

- 差分的运算性质与微分很相似.
- 差分可以认为是离散的微分.

连续与离散

- 差分的运算性质与微分很相似.
- 差分可以认为是离散的微分.
- 是否可以定义离散的积分呢?

连续与离散

- 差分的运算性质与微分很相似.
- 差分可以认为是离散的微分.
- 是否可以定义离散的积分呢？

⇨ 微分的逆运算是积分，而差分的逆运算是和式.

积分与和式

如果 $\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\,\mathrm{d}x$，则定义 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x)\,dx$，则定义 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

例如，由 $d(x^2) = 2x\,dx$ 可知 $\int 2x\,dx = x^2 + C$.

积分与和式

如果 $\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\,\mathrm{d}x$，则定义 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

例如，由 $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$ 可知 $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$.

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$，则定义 $f(x)$ 的不定和式为

$$\sum f(x) = F(x) + C.$$

积分与和式

如果 $\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\,\mathrm{d}x$，则定义 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

例如，由 $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$ 可知 $\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + C$.

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$，则定义 $f(x)$ 的不定和式为

$$\sum f(x) = F(x) + C.$$

例如，由 $\Delta(x^2) = 2x + 1$ 可知 $\sum (2x+1) = x^2 + C$.

不定积分与不定和式

积分公式

1. $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$
2. $$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$
3. $$\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^{x} + C$$

不定积分与不定和式

积分公式

1. $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$
2. $\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
3. $\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^{x} + C \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x} + C$

不定积分与不定和式

积分公式

1. $\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$
2. $\int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$
3. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C \quad \Rightarrow \quad \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$

和式公式

1. $\sum 1 = x + C$
2. $\sum x^{\underline{a}} = \frac{1}{a+1}x^{\underline{a+1}} + C$
3. $\sum a^x = \frac{1}{a-1}a^x + C$

不定积分与不定和式

积分公式

1 $\int 1\,dx = x + C$

2 $\int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$

3 $\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \quad \Rightarrow \quad \int e^x\,dx = e^x + C$

和式公式

1 $\sum 1 = x + C$

2 $\sum x^{\underline{a}} = \frac{1}{a+1}x^{\underline{a+1}} + C$

3 $\sum a^x = \frac{1}{a-1}a^x + C \quad \Rightarrow \quad \sum(2^x) = 2^x + C$

积分与和式

如果 $\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)$ 的定积分等于

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

积分与和式

如果 $\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)$ 的定积分等于

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

其中定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示对应的曲边梯形的面积.

积分与和式

如果 $\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)$ 的定积分等于

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

其中定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示对应的曲边梯形的面积.

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$，则 $f(x)$ 的定和式等于

$$\sum\nolimits_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

积分与和式

如果 $\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)$ 的定积分等于

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

其中定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示对应的曲边梯形的面积.

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$，则 $f(x)$ 的定和式等于

$$\sum\nolimits_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

其中定和式 $\sum_a^b f(x)$ 表示有限和 $\sum\limits_{k=a}^{b-1} f(k)$.

积分与和式

如果 $\mathrm{d}(F(x))=f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)$ 的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\left[F(x)\right]_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a).$$

积分与和式

如果 $\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)$ 的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

其中广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示对应的图形的面积.

积分与和式

如果 $\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)$ 的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

其中广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示对应的图形的面积.

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$，则 $f(x)$ 的无限和式

$$\sum_a^{+\infty} f(x) = \left[F(x)\right]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

积分与和式

如果 $\mathrm{d}(F(x)) = f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $f(x)$ 的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

其中广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 表示对应的图形的面积.

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$，则 $f(x)$ 的无限和式

$$\sum\nolimits_a^{+\infty} f(x) = \left[F(x)\right]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

其中无限和式 $\sum_a^{+\infty} f(x)$ 表示无限和 $\sum\limits_{k=a}^{+\infty} f(k)$.

有限和式

利用不定和式的公式，我们可以计算出平方和：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum\nolimits_1^{n+1} x^2 = \sum\nolimits_1^{n+1} \left(x(x-1)+x\right) \\
&= \sum\nolimits_1^{n+1} \left(x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}\right) = \left[\frac{1}{3}x^{\underline{3}} + \frac{1}{2}x^{\underline{2}}\right]_1^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\,n}{2} - 0 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

有限和式

利用不定和式的公式，我们可以计算出平方和：

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum\nolimits_1^{n+1} x^2 = \sum\nolimits_1^{n+1} \left(x(x-1)+x\right) \\
&= \sum\nolimits_1^{n+1} \left(x^{\underline{2}} + x^{\underline{1}}\right) = \left[\frac{1}{3}x^{\underline{3}} + \frac{1}{2}x^{\underline{2}}\right]_1^{n+1} \\
&= \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3} + \frac{(n+1)\,n}{2} - 0 \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

类似地，也可以计算出高次方和.

第一节	差分
第二节	不定和式
第三节	定和式
第四节	分部求和

分部积分与分部求和

不定积分的分部积分公式为

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

分部积分与分部求和

不定积分的分部积分公式为

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u.$$

不定和式的分部求和公式为

$$\sum u\Delta v = uv - \sum Ev\Delta u.$$

分部积分与分部求和

定积分的分部积分公式为

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

分部积分与分部求和

定积分的分部积分公式为

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

定和式的分部求和公式为

$$\sum\nolimits_a^b u\Delta v = [uv]_a^b - \sum\nolimits_a^b Ev\Delta u.$$

分部求和

在分部求和公式中令 $u=x$，$\Delta v=\frac{1}{2^x}$，得到

$$\begin{aligned}\sum\frac{x}{2^x} &= -2\sum x\cdot\Delta\left(\frac{1}{2^x}\right)\\ &= -2x\cdot\frac{1}{2^x}+2\sum\frac{1}{2^{x+1}}\cdot\Delta x\\ &= -2x\cdot\frac{1}{2^x}+\sum\frac{1}{2^x}\\ &= -2x\cdot\frac{1}{2^x}-2\frac{1}{2^x}+C=-\frac{2x+2}{2^x}+C\end{aligned}$$

分部求和

由上页不定和式的结果，可以得到定和式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = \sum_1^{n+1} \frac{x}{2^x} = \left[-\frac{2x+2}{2^x} \right]_1^{n+1}$$

$$= 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

分部求和

由上页不定和式的结果，可以得到定和式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}=\sum\nolimits_1^{n+1}\frac{x}{2^x}=\left[-\frac{2x+2}{2^x}\right]_1^{n+1}$$

$$=2-\frac{n+2}{2^n}$$

以及无限和式

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}=\sum\nolimits_1^{\infty}\frac{x}{2^x}=\left[-\frac{2x+2}{2^x}\right]_1^{\infty}$$

$$=2-0=2$$