高等数学课程

补充：贝塞尔曲线

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	贝塞尔曲线简介
第二节	伯恩斯坦多项式
第三节	贝塞尔曲线定义
第四节	贝塞尔曲线应用
第五节	贝塞尔曲面简介

贝塞尔曲线

贝塞尔曲线，又称贝济埃曲线，是在计算机图形学中广泛使用的一种参数曲线.

皮埃尔·贝塞尔 (Pierre Bézier) 是法国雷诺汽车公司的工程师，他从 1962 年开始在汽车外形设计中运用此类曲线.

贝塞尔曲线

贝塞尔曲线，又称贝济埃曲线，是在计算机图形学中广泛使用的一种参数曲线.

皮埃尔 · 贝塞尔 (Pierre Bézier) 是法国雷诺汽车公司的工程师，他从 1962 年开始在汽车外形设计中运用此类曲线.

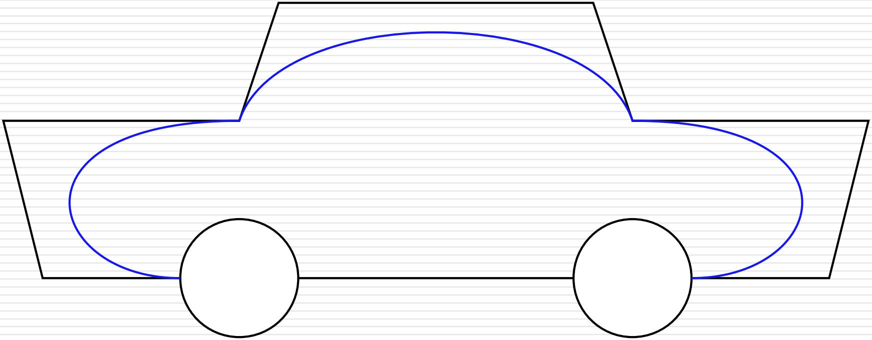
图片来源：Wikipedia

贝塞尔曲线

贝塞尔的想法是先用折线勾画出汽车外形的大致轮廓，然后用光滑的参数曲线去逼近这个折线多边形.

贝塞尔曲线

贝塞尔的想法是先用折线勾画出汽车外形的大致轮廓，然后用光滑的参数曲线去逼近这个折线多边形.



贝塞尔曲线

贝塞尔曲线的优点在于

1. 常用的贝塞尔曲线是三次参数曲线，计算快捷.
2. 存储时只需记录若干控制点的坐标，节省空间.

因此贝塞尔曲线在计算机图形中得到广泛应用.

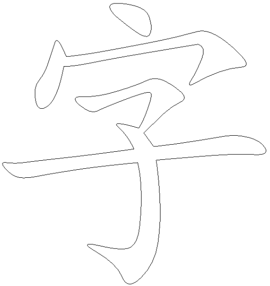
贝塞尔曲线

贝塞尔曲线的优点在于

1. 常用的贝塞尔曲线是三次参数曲线，计算快捷.
2. 存储时只需记录若干控制点的坐标，节省空间.

因此贝塞尔曲线在计算机图形中得到广泛应用.

比如电脑字体中的各个字符的轮廓，就是用贝塞尔曲线来描述的，右图显示了 Windows 系统中的楷体汉字.



第一节	贝塞尔曲线简介
第二节	伯恩斯坦多项式
第三节	贝塞尔曲线定义
第四节	贝塞尔曲线应用
第五节	贝塞尔曲面简介

伯恩斯坦多项式

贝塞尔曲线的定义需要用到下面的伯恩斯坦多项式.

伯恩斯坦多项式

贝塞尔曲线的定义需要用到下面的伯恩斯坦多项式.

定义 给定正整数 n, 以及 $0 \leqslant k \leqslant n$, 我们定义 $n+1$ 个 n 次多项式

$$b_{k,n}(t) = C_n^k \, t^k \, (1-t)^{n-k}$$

其中 C_n^k 是组合数. 这些多项式称为伯恩斯坦多项式.

伯恩斯坦多项式

贝塞尔曲线的定义需要用到下面的伯恩斯坦多项式.

定义 给定正整数 n，以及 $0 \leqslant k \leqslant n$，我们定义 $n+1$ 个 n 次多项式

$$b_{k,n}(t) = C_n^k t^k (1-t)^{n-k}$$

其中 C_n^k 是组合数．这些多项式称为伯恩斯坦多项式.

性质 所有 n 次伯恩斯坦多项式之和恒为零.

伯恩斯坦多项式

例 1　当 $n = 2$ 时，3 个伯恩斯坦多项式之和

$$b_{0,2}(t) + b_{1,2}(t) + b_{2,2}(t)$$

$$= (1-t)^2 + 2t(1-t) + t^2 = 0$$

伯恩斯坦多项式

例 1　当 $n=2$ 时，3 个伯恩斯坦多项式之和

$$b_{0,2}(t)+b_{1,2}(t)+b_{2,2}(t)$$
$$=(1-t)^2+2t(1-t)+t^2=0$$

例 2　当 $n=3$ 时，4 个伯恩斯坦多项式之和

$$b_{0,3}(t)+b_{1,3}(t)+b_{2,3}(t)+b_{3,3}(t)$$
$$=(1-t)^3+3t(1-t)^2+3t^2(1-t)+t^3=0$$

第一节 贝塞尔曲线简介

第二节 伯恩斯坦多项式

第三节 贝塞尔曲线定义

第四节 贝塞尔曲线应用

第五节 贝塞尔曲面简介

贝塞尔曲线

定义　给定平面或空间中 $n+1$ 个点 $P_0, P_1, \cdots, P_n$，我们定义参数曲线

$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} b_{i,n}(t) P_i, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

并称它为 n 次贝塞尔曲线，称这些点为曲线的控制点，称这些点依次连接起来所得折线为曲线的控制多边形.

一次贝塞尔曲线

例 1 给定空间中两点 $P_0(x_0, y_0)$ 和 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，则所得到的一次贝塞尔曲线为

$$P(t) = (1-t)\cdot(x_0, y_0, z_0) + t\cdot(x_1, y_1, z_1).$$

一次贝塞尔曲线

例 1　给定空间中两点 $P_0(x_0, y_0)$ 和 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，则所得到的一次贝塞尔曲线为

$$P(t) = (1-t)\cdot(x_0, y_0, z_0) + t\cdot(x_1, y_1, z_1).$$

令 $P(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$，则该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)\,t, \\ y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)\,t, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \\ z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)\,t, \end{cases}$$

因此，一次贝塞尔曲线就是连接两点的直线段 P_0P_1.

一次贝塞尔曲线

例 1　给定空间中两点 $P_0(x_0, y_0)$ 和 $P_1(x_1, y_1, z_1)$，则所得到的一次贝塞尔曲线为

$$P(t) = (1-t)\cdot(x_0, y_0, z_0) + t\cdot(x_1, y_1, z_1).$$

令 $P(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$，则该曲线的参数方程

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)\,t, \\ y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)\,t, \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \\ z(t) = z_0 + (z_1 - z_0)\,t, \end{cases}$$

因此，一次贝塞尔曲线就是连接两点的直线段 P_0P_1.

注记　我们要将 P_i 视为向量，$P(t)$ 视为向量值函数.

二次贝塞尔曲线

例 2　给定平面上三点 $P_0(1,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(0,1)$, 则所得到的二次贝塞尔曲线为

$$
\begin{aligned}
P(t) &= (1-t)^2\cdot(1,0)+2t(1-t)\cdot(1,1)+t^2\cdot(0,1)\\
&= (1-t^2,2t-t^2)
\end{aligned}
$$

二次贝塞尔曲线

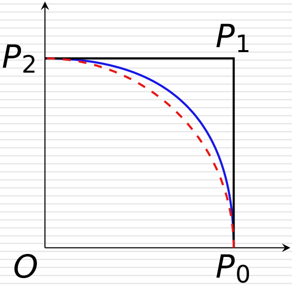
例 2 给定平面上三点 $P_0(1,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(0,1)$, 则所得到的二次贝塞尔曲线为

$$P(t) = (1-t)^2 \cdot (1,0) + 2t(1-t) \cdot (1,1) + t^2 \cdot (0,1)$$
$$= (1-t^2, 2t-t^2)$$

令 $P(t) = (x(t), y(t))$，则曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x(t) = 1 - t^2, \\ y(t) = 2t - t^2, \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

作为对比，图中的虚线是圆弧.



二次贝塞尔曲线

例 3　给定平面上三点 $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(2,0)$, 则所得到的二次贝塞尔曲线为

$$P(t) = (1-t)^2 \cdot (0,0) + 2t(1-t) \cdot (1,1) + t^2 \cdot (2,0)$$
$$= (2t, 2t-2t^2)$$

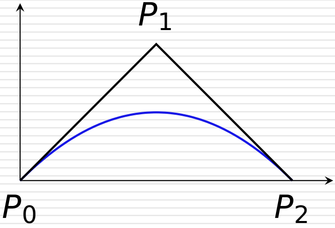
二次贝塞尔曲线

例 3　给定平面上三点 $P_0(0,0)$，$P_1(1,1)$，$P_2(2,0)$，则所得到的二次贝塞尔曲线为

$$P(t) = (1-t)^2\cdot(0,0) + 2t(1-t)\cdot(1,1) + t^2\cdot(2,0)$$
$$= (2t, 2t-2t^2)$$

令 $P(t) = (x(t), y(t))$，则曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x(t) = 2t, \\ y(t) = 2t-2t^2, \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$



三次贝塞尔曲线

例 4　给定平面上四点 $P_0(0,0)$，$P_1(1,1)$，$P_2(2,1)$，$P_3(2,0)$，则所得到的三次贝塞尔曲线为

$$
\begin{aligned}
P(t) &= (1-t)^3\cdot(0,0)+3t(1-t)^2\cdot(1,1) \\
&\quad +3t^2(1-t)\cdot(2,1)+t^3\cdot(2,0) \\
&= (3t-t^3, 3t-3t^2).
\end{aligned}
$$

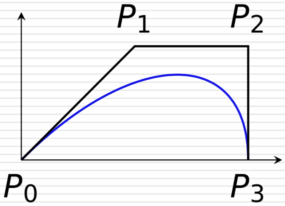
三次贝塞尔曲线

例 4　给定平面上四点 $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(2,1)$, $P_3(2,0)$, 则所得到的三次贝塞尔曲线为

$$\begin{aligned} P(t) = &(1-t)^3\cdot(0,0)+3t(1-t)^2\cdot(1,1) \\ &+3t^2(1-t)\cdot(2,1)+t^3\cdot(2,0) \\ = &(3t-t^3, 3t-3t^2). \end{aligned}$$

令 $P(t)=\big(x(t),y(t)\big)$, 则曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x(t)=3t-t^3, \\ y(t)=3t-3t^2. \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 1).$$



三次贝塞尔曲线

例 5　给定平面上四点 $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(1,-1)$, $P_3(2,0)$，则所得到的三次贝塞尔曲线为

$$
\begin{aligned}
P(t) = (1-t)^3 \cdot (0,0) + 3t(1-t)^2 \cdot (1,1) \\
+ 3t^2(1-t) \cdot (1,-1) + t^3 \cdot (2,0) \\
= (3t - 3t^2 + 2t^3, 3t - 9t^2 + 6t^3).
\end{aligned}
$$

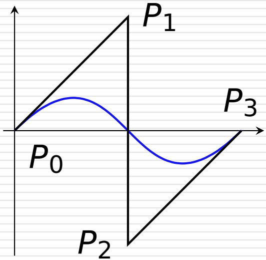
三次贝塞尔曲线

例 5 给定平面上四点 $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$, $P_2(1,-1)$, $P_3(2,0)$，则所得到的三次贝塞尔曲线为

$$\begin{aligned}P(t) &= (1-t)^3\cdot(0,0)+3t(1-t)^2\cdot(1,1)\\ &\qquad +3t^2(1-t)\cdot(1,-1)+t^3\cdot(2,0)\\ &=(3t-3t^2+2t^3, 3t-9t^2+6t^3).\end{aligned}$$

令 $P(t)=(x(t),y(t))$，则曲线的参数方程为 $(0\leqslant t\leqslant 1)$

$$\begin{cases}x(t)=3t-3t^2+2t^3,\\ y(t)=3t-9t^2+6t^3.\end{cases}$$



贝塞尔曲线的性质

性质 贝塞尔曲线与控制点之间的有如下关系:

1. $P(0)=P_0$, $P'(0)=n(P_1-P_0)$.
2. $P(1)=P_n$, $P'(1)=n(P_n-P_{n-1})$.

贝塞尔曲线的性质

性质 贝塞尔曲线与控制点之间的有如下关系：

1. $P(0) = P_0$, $P'(0) = n(P_1 - P_0)$.
2. $P(1) = P_n$, $P'(1) = n(P_n - P_{n-1})$.

或者说

1. 贝塞尔曲线的起点与控制点 P_0 重合，且在 P_0 点的切线与直线 P_0P_1 重合.
2. 贝塞尔曲线的终点与控制点 P_n 重合，且在 P_n 点的切线与直线 $P_{n-1}P_n$ 重合.

第一节 贝塞尔曲线简介
第二节 伯恩斯坦多项式
第三节 贝塞尔曲线定义
第四节 贝塞尔曲线应用
第五节 贝塞尔曲面简介

用贝塞尔曲线作曲线逼近

例 1 用三次贝塞尔曲线逼近单位圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限部分.

用贝塞尔曲线作曲线逼近

例 1　用三次贝塞尔曲线逼近单位圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限部分.

解答　由贝塞尔曲线的性质，我们可以设

$$P_0(1,0),\quad P_1(1,\lambda),\quad P_2(\lambda,1),\quad P_3(0,1).$$

用贝塞尔曲线作曲线逼近

例 1　用三次贝塞尔曲线逼近单位圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限部分.

解答　由贝塞尔曲线的性质，我们可以设

$$P_0(1,0),\quad P_1(1,\lambda),\quad P_2(\lambda,1),\quad P_3(0,1).$$

则对应的三次贝塞尔曲线为

$$\begin{aligned}P(t)&=(x(t),y(t))\\&=(1-t)^3\cdot(1,0)+3t(1-t)^2\cdot(1,\lambda)\\&\quad+3t^2(1-t)\cdot(\lambda,1)+t^3\cdot(0,1)\end{aligned}$$

用贝塞尔曲线作曲线逼近

例 1　用三次贝塞尔曲线逼近单位圆周 $x^2+y^2=1$ 在第一象限部分.

解答　由贝塞尔曲线的性质，我们可以设

$$P_0(1,0),\quad P_1(1,\lambda),\quad P_2(\lambda,1),\quad P_3(0,1).$$

则对应的三次贝塞尔曲线为

$$\begin{aligned} P(t) &= (x(t),y(t)) \\ &= (1-t)^3\cdot(1,0)+3t(1-t)^2\cdot(1,\lambda) \\ &\quad +3t^2(1-t)\cdot(\lambda,1)+t^3\cdot(0,1) \end{aligned}$$

即 $$\begin{cases} x(t)=1-3t^2+2t^3+\lambda(3t^2-3t^3), \\ y(t)=3t^2-2t^3+\lambda(3t-6t^2+3t^3). \end{cases}$$

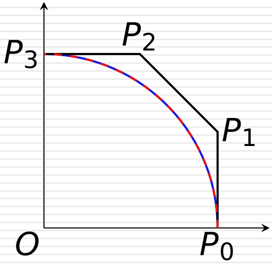
用贝塞尔曲线作曲线逼近

解答 (续) 欲得到较好的逼近效果，可令贝塞尔曲线的中点与圆弧的中点重合，即

$$\left(x\left(\frac{1}{2}\right), y\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

代入前面的参数方程，解得

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{3} \approx 0.5523.$$



图中红线是圆弧，蓝线是贝塞尔曲线.

从绘制出的图形看，贝塞尔曲线已经非常接近圆弧了.

用贝塞尔曲线作曲线逼近

解答 (续)　现在来分析逼近误差

$$\epsilon(t) = [x(t)]^2 + [y(t)]^2 - 1.$$

用贝塞尔曲线作曲线逼近

解答 (续)　现在来分析逼近误差

$$\epsilon(t) = [x(t)]^2 + [y(t)]^2 - 1.$$

代入贝塞尔曲线的参数方程，得到

$$\epsilon(t) = A\,t^2(t - 1/2)^2(t - 1)^2,$$

其中 $A = 2(3\lambda_0 - 2)^2 = 8(3 - 2\sqrt{2})^2 \approx 0.2355.$

用贝塞尔曲线作曲线逼近

解答 (续)　现在来分析逼近误差

$$\epsilon(t) = [x(t)]^2 + [y(t)]^2 - 1.$$

代入贝塞尔曲线的参数方程，得到

$$\epsilon(t) = A\,t^2(t-1/2)^2(t-1)^2,$$

其中 $A = 2(3\lambda_0 - 2)^2 = 8(3-2\sqrt{2})^2 \approx 0.2355.$

求得 $\epsilon(t)$ 在 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 中的最大值为

$$\frac{A}{432} \approx 0.0005.$$

即用贝塞尔曲线代替圆弧时，逼近误差已经相当小了.

三次贝塞尔曲线

从之前例子可以看出，随着次数的增加，贝塞尔曲线的变化也更加多样．因此贝塞尔曲线足够描述实际应用中的复杂几何图形．

三次贝塞尔曲线

从之前例子可以看出，随着次数的增加，贝塞尔曲线的变化也更加多样．因此贝塞尔曲线足够描述实际应用中的复杂几何图形．

但是，在实际应用中我们通常只使用三次贝塞尔曲线．

三次贝塞尔曲线

从之前例子可以看出，随着次数的增加，贝塞尔曲线的变化也更加多样．因此贝塞尔曲线足够描述实际应用中的复杂几何图形．

但是，在实际应用中我们通常只使用三次贝塞尔曲线．这是因为，如果其中一个控制点的坐标变化了，整个贝塞尔曲线的形状也变化了．这样次数越高越不容易对曲线作局部调整．

三次贝塞尔曲线

从之前例子可以看出，随着次数的增加，贝塞尔曲线的变化也更加多样．因此贝塞尔曲线足够描述实际应用中的复杂几何图形．

但是，在实际应用中我们通常只使用三次贝塞尔曲线．这是因为，如果其中一个控制点的坐标变化了，整个贝塞尔曲线的形状也变化了．这样次数越高越不容易对曲线作局部调整．

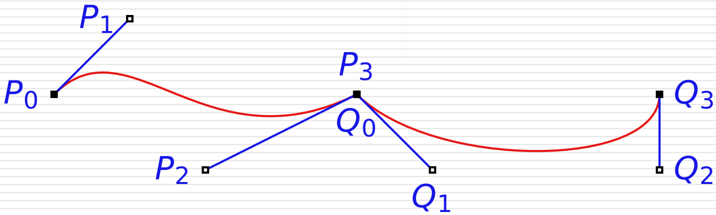
常见的软件中，PowerPoint, Inkscape, Photoshop, Illustrator, CorelDraw 都支持绘制三次贝塞尔曲线．

三次贝塞尔曲线

要描述精细的几何图形，可以用多条三次贝塞尔曲线连接起来. 比如（下图中 P_3 和 Q_0 重合）

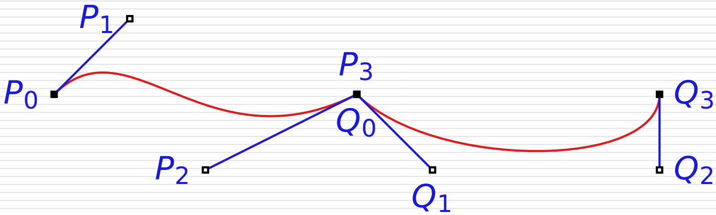
三次贝塞尔曲线

要描述精细的几何图形，可以用多条三次贝塞尔曲线连接起来．比如（下图中 P_3 和 Q_0 重合）



三次贝塞尔曲线

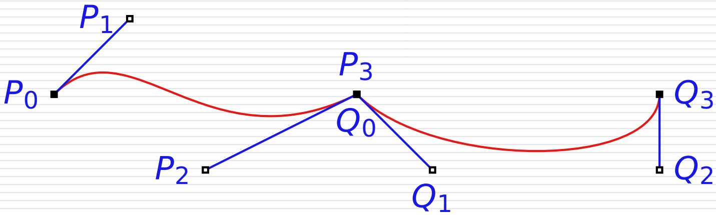
要描述精细的几何图形，可以用多条三次贝塞尔曲线连接起来．比如（下图中 P_3 和 Q_0 重合）



三次贝塞尔曲线的四个控制点可分为两类：P_0 和 P_3 称为顶点(或锚点)，P_1 和 P_2 称为控点(或方向点).

三次贝塞尔曲线

要描述精细的几何图形，可以用多条三次贝塞尔曲线连接起来．比如（下图中 P_3 和 Q_0 重合）



三次贝塞尔曲线的四个控制点可分为两类：P_0 和 P_3 称为顶点(或锚点)，P_1 和 P_2 称为控点(或方向点).

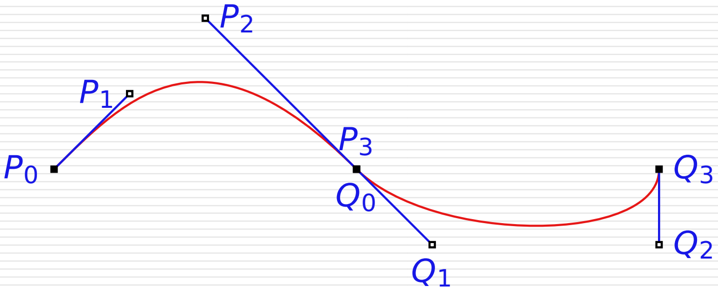
若 P_3P_2 与 Q_0Q_1 不共线，称 P_3(即 Q_0) 为角部顶点.

三次贝塞尔曲线

要去掉两条三次贝塞尔曲线连接处的尖角，可以让 P_3P_2 与 Q_0Q_1 方向相反．比如

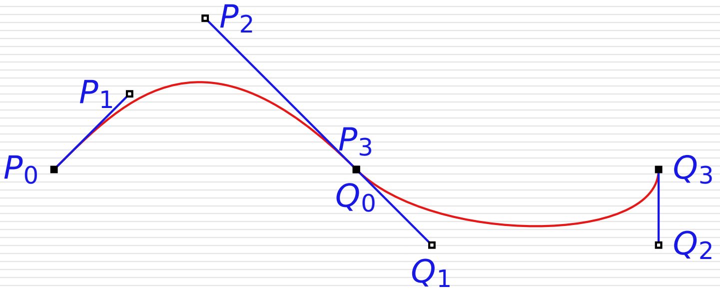
三次贝塞尔曲线

要去掉两条三次贝塞尔曲线连接处的尖角，可以让 P_3P_2 与 Q_0Q_1 方向相反．比如



三次贝塞尔曲线

要去掉两条三次贝塞尔曲线连接处的尖角，可以让 P_3P_2 与 Q_0Q_1 方向相反．比如



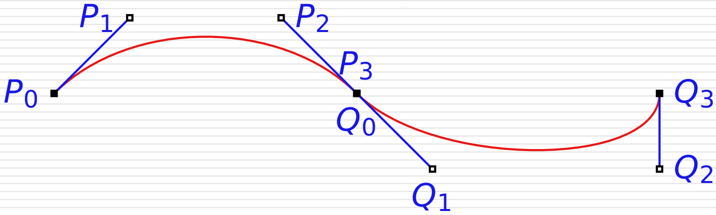
如果 P_3P_2 与 Q_0Q_1 方向相反，我们称 P_3（即 Q_0）为直线顶点．

三次贝塞尔曲线

要让两条三次贝塞尔曲线连接处更加光滑，可以让 P_3P_2 与 Q_0Q_1 方向相反且大小相等．比如

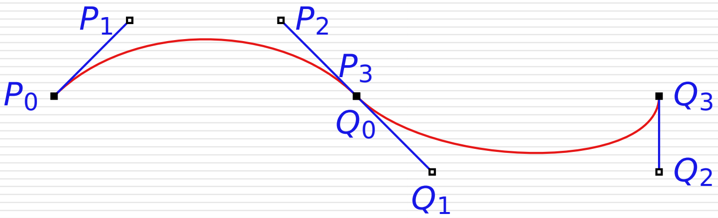
三次贝塞尔曲线

要让两条三次贝塞尔曲线连接处更加光滑，可以让 P_3P_2 与 Q_0Q_1 方向相反且大小相等．比如



三次贝塞尔曲线

要让两条三次贝塞尔曲线连接处更加光滑，可以让 P_3P_2 与 Q_0Q_1 方向相反且大小相等．比如



如果 P_3P_2 与 Q_0Q_1 方向相反且大小相等，我们称 P_3（即 Q_0）为平滑顶点．此时曲线的切向量连续变化．

第一节	贝塞尔曲线简介
第二节	伯恩斯坦多项式
第三节	贝塞尔曲线定义
第四节	贝塞尔曲线应用
第五节	贝塞尔曲面简介

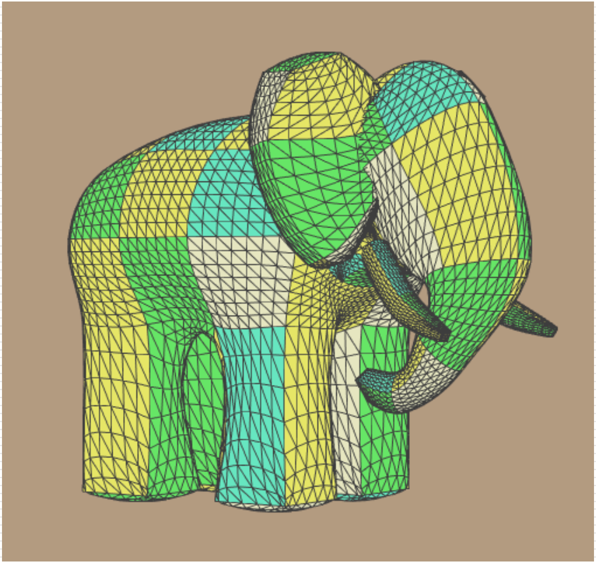
贝塞尔曲面

定义　设 $P_{i,j}$（$i = 0, 1, 2 \cdots, n$; $j = 0, 1, 2, \cdots, m$）是空间中给定的 $(n+1) \times (m+1)$ 个点，参数曲面

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{i,n}(u)\, b_{j,m}(v)\, P_{i,j}, \quad 0 \leqslant u, v \leqslant 1.$$

称为 $n \times m$ 次贝塞尔曲面，这些点称为曲面的控制点.

双三次贝塞尔曲面



图片来源：

Wikipedia

图片作者：

Philip Rideout