高等数学课程

补充：外微分形式

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

主要内容：斯托克斯定理

格林公式

牛顿－莱布尼茨公式

$$\int_{\partial\Omega}\omega=\int_{\Omega}\mathrm{d}\omega$$

高斯公式

斯托克斯公式

第一节 微分形式

第二节 外微分运算

第三节 斯托克斯定理

外积运算

定义 在微分 dx，dy，dz 之间引入外积运算，用符号 $\wedge$ 表示，运算规则是

$$dx \wedge dx = 0, \qquad dx \wedge dy = -dy \wedge dx,$$
$$dy \wedge dy = 0, \qquad dy \wedge dz = -dz \wedge dy,$$
$$dz \wedge dz = 0, \qquad dz \wedge dx = -dx \wedge dy.$$

外积运算

定义　在微分 dx，dy，dz 之间引入外积运算，用符号 $\wedge$ 表示，运算规则是

$$
\begin{aligned}
&dx \wedge dx = 0, \qquad && dx \wedge dy = -dy \wedge dx, \\
&dy \wedge dy = 0, \qquad && dy \wedge dz = -dz \wedge dy, \\
&dz \wedge dz = 0, \qquad && dz \wedge dx = -dx \wedge dy.
\end{aligned}
$$

注记　对于三个微分作外积，规定可用结合律．比如

$$
\begin{aligned}
&dx \wedge dy \wedge dx = dx \wedge (dy \wedge dx) \\
&= -dx \wedge (dx \wedge dy) = -(dx \wedge dx) \wedge dy = 0
\end{aligned}
$$

微分形式

定义 设 P、Q、R 是三元函数，定义微分形式如下

次数	微分形式
0 次	P
1 次	$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$
2 次	$P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$
3 次	$P\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$

微分形式可分别简称为 0 次、1 次、2 次、3 次形式.

微分形式

定义 设 P、Q、R 是三元函数，定义微分形式如下

次数	微分形式
0 次	P
1 次	$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$
2 次	$P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$
3 次	$P\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$

微分形式可分别简称为 0 次、1 次、2 次、3 次形式.

注记 微分形式作外积运算时，规定可用分配律.

微分形式

例 1　计算微分形式的外积 $\omega \wedge \theta$，其中

$$\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$$

$$\theta = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

微分形式

例 1　计算微分形式的外积 $\omega \wedge \theta$，其中

$$\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$$

$$\theta = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

解答　展开 $\omega \wedge \theta$ 后共有 9 项，其中 3 项为零，故有

$$\begin{aligned}\omega \wedge \theta = \ & (gR - hQ)\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\ & + (hP - fR)\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\ & + (fQ - gP)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\end{aligned}$$

微分形式

例 2 计算微分形式的外积 $\omega \wedge \theta$，其中

$$\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$$

$$\theta = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

微分形式

例 2 计算微分形式的外积 $\omega \wedge \theta$，其中

$$\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y + h\,\mathrm{d}z$$

$$\theta = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

解答 展开 $\omega \wedge \theta$ 后共有 9 项，其中 6 项为零，故有

$$\omega \wedge \theta = (fP + gQ + hR)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

第一节	微分形式
第二节	外微分运算
第三节	斯托克斯定理

外微分运算

定义　0 次形式 f 的外微分为 1 次形式（即全微分）

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

1 次形式 $\omega = P\,\mathrm{d}x$ 的外微分为 2 次形式

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x$$

2 次形式 $\omega = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 的外微分为 3 次形式

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

外微分运算

定义　0 次形式 f 的外微分为 1 次形式（即全微分）

$$\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z$$

1 次形式 $\omega = P\,\mathrm{d}x$ 的外微分为 2 次形式

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x$$

2 次形式 $\omega = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$ 的外微分为 3 次形式

$$\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

注记　外微分运算规定 $\mathrm{d}(\omega_1 + \omega_2) = \mathrm{d}\omega_1 + \mathrm{d}\omega_2$.

例 1　计算 1 次微分形式的外微分 $\mathrm{d}\omega$，其中

$$\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z.$$

例 1 计算 1 次微分形式的外微分 $\mathrm{d}\omega$，其中

$$\omega = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z.$$

解答

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}y + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \\
&\quad + \left(\frac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y
\end{aligned}$$

例 2　计算 2 次微分形式的外微分 $\mathrm{d}\omega$，其中

$$\omega = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

例 2 计算 2 次微分形式的外微分 $\mathrm{d}\omega$，其中

$$\omega = P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

解答

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}P \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \mathrm{d}Q \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}R \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\tfrac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x + \tfrac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y + \tfrac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \\
&\quad + \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x + \tfrac{\partial Q}{\partial y}\mathrm{d}y + \tfrac{\partial Q}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \\
&\quad + \left(\tfrac{\partial R}{\partial x}\mathrm{d}x + \tfrac{\partial R}{\partial y}\mathrm{d}y + \tfrac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z\right) \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \left(\tfrac{\partial P}{\partial x} + \tfrac{\partial Q}{\partial y} + \tfrac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z
\end{aligned}$$

第一节 微分形式

第二节 外微分运算

第三节 斯托克斯定理

斯托克斯定理

定理 (斯托克斯定理) 利用第二节两个例子，可以将斯托克斯公式和高斯公式统一表示（$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界）

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega$$

类似地，直线上的牛顿—莱布尼茨公式以及平面上的格林公式中也可以统一到上式.

斯托克斯定理

定理 (斯托克斯定理) 利用第二节两个例子，可以将斯托克斯公式和高斯公式统一表示（$\partial\Omega$ 是 Ω 的边界）

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} \mathrm{d}\omega$$

类似地，直线上的牛顿—莱布尼茨公式以及平面上的格林公式中也可以统一到上式.

注记 边界和外微分有性质 $\partial(\partial\Omega) = \varnothing$，$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$.

微分形式换元

在外微分形式中，积分换元运算变得非常自然．比如计算直角坐标到极坐标的换元：因为 $x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$，所以

$$\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial x}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta\right) \wedge \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial y}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

$$= \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\theta$$

$$= [\cos\theta\cdot(\rho\cos\theta) - (-\rho\sin\theta)\cdot\sin\theta]\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\theta$$

$$= \rho\,\mathrm{d}\rho \wedge \mathrm{d}\theta.$$