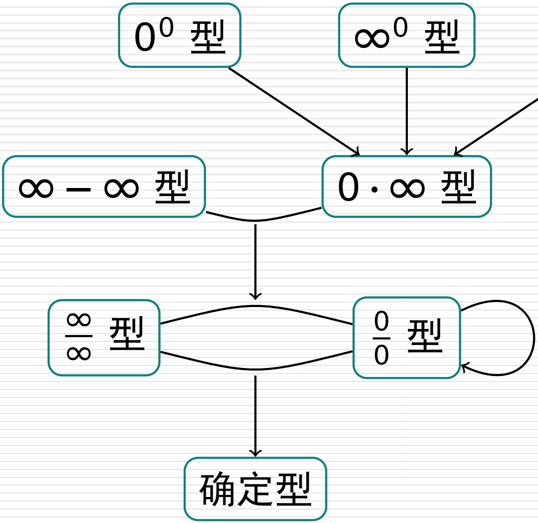
高等数学课程

高等数学 1 复习

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞(lvjr.bitbucket.io)

函数极限



0^0 型
∞^0 型
1^∞ 型
$\infty-\infty$ 型
$0\cdot\infty$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
确定型

关于 1^{∞} 型极限

例 1　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

关于 1^∞ 型极限

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

定理 1 若 $x\to\square$ 时，$a(x)\to 0$，$b(x)\to\infty$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to\square}\left(1+a(x)\right)^{b(x)} = e^{\lim\limits_{x\to\square} a(x)b(x)}}$$

极限的四则运算

各种极限都有四则运算法则：

(1) $$\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

(2) $$\lim(f(x)\cdot g(x))=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$$

(3) $$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

等价无穷小代换

例 2　求下列极限：

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$$

(5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x}$$

等价无穷小代换

例 2　求下列极限：

(4)
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$$

(5)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x}$$

事实　等价无穷小代换有如下特点：

- 我们只有对 $x\to 0$ 的代换公式；

等价无穷小代换

例 2　求下列极限：

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$$

(5) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x}$$

事实　等价无穷小代换有如下特点：

- 我们只有对 $x \to 0$ 的代换公式；
- 只能对乘除因子代换，不能对加减项代换.

洛必达法则

例 3　求下列极限：

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^3 x}$$

(7) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x}{\cos 3x}$$

洛必达法则

例 3　求下列极限：

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^3 x}$$

(7) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x}{\cos 3x}$$

事实　洛必达法则有如下特点：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；

洛必达法则

例 3　求下列极限：

(6) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^3 x}$$

(7) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x}{\cos 3x}$$

事实　洛必达法则有如下特点：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
- 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限.

闭区间上连续函数

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

闭区间上连续函数

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

最值定理 $f(x)$ 在该区间上有界，而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

闭区间上连续函数

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

最值定理 $f(x)$ 在该区间上有界，而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

零值定理 若 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

闭区间上连续函数

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

最值定理 $f(x)$ 在该区间上有界，而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

零值定理 若 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

介值定理 若 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

导数公式

- $(C)' = 0$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^{x})' = a^{x}\ln a$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^{x})' = a^{x} \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则：

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则：

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(Cu)' = Cu'$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则：

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(Cu)' = Cu'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则：

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(Cu)' = Cu'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

复合函数求导

例 1　求下列函数的导数：

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$；

(2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$；

复合函数求导

例 1　求下列函数的导数：

(1) $f(x) = e^{x^2}$；

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$；

定理　设 $y = f(u), u = g(x)$，则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

复合函数求导

例 1　求下列函数的导数：

(1) $f(x) = e^{x^2}$；

(2) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$；

定理　设 $y = f(u), u = g(x)$，则有

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

例 2　已知 $f(u)$ 可导，求 $f(\ln x)$ 的导数和二阶导数.

隐函数求导

例 3　对下面的方程求导数 y'_x：

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

隐函数求导

例 3　对下面的方程求导数 y'_x：

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

对于隐函数求导，要注意

- $(\phi(x))'_x = \phi'(x)$；
- $(\phi(y))'_x = \phi'(y)y'_x$.

隐函数求导

例 3　对下面的方程求导数 y'_x：

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

对于隐函数求导，要注意

- $(\phi(x))'_x = \phi'(x)$；
- $(\phi(y))'_x = \phi'(y)y'_x$.

例 4　求幂指函数 $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 的导数.

参数方程求导

设参数方程 $\begin{cases} x = \phi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定了 x 和 y 的函数关系，

则有

(1) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\psi'(t)}{\phi'(t)}$$

(2) $$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\psi''(t)\phi'(t) - \psi'(t)\phi''(t)}{\phi'^3(t)}$$

罗尔中值定理

定理　如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，
2. 在开区间 (a,b) 内可导，
3. $f(a)=f(b)$，

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

罗尔中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,
2. 在开区间 (a,b) 内可导,
3. $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

事实 该定理可用于证明存在性等式.

拉格朗日中值定理

定理　如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，
2. 在开区间 (a,b) 内可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

拉格朗日中值定理

定理　如果函数 $f(x)$ 满足下列条件：

1. 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，
2. 在开区间 (a,b) 内可导，

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

事实　该定理可用于证明恒等式和不等式.

柯西中值定理

定理 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件：

1. 在闭区间 $[a, b]$ 上都连续，
2. 在开区间 (a, b) 内都可导，
3. 在开区间 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$，

则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$ 使 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

泰勒公式

例 1　求函数 $f(x) = \ln(2 + x)$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式.

泰勒公式

例 1 求函数 $f(x) = \ln(2+x)$ 的带有佩亚诺余项的 4 阶麦克劳林公式.

注记 求函数 $f(x)$ 的泰勒公式有两种方法:

1. 直接计算法 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 依次求 $f(x)$ 的 n 阶导数
2. 间接计算法 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ 利用已知函数的泰勒公式

单调区间与极值

例 2　求下列函数的单调区间与极值：

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7;$
2. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$

单调区间与极值

例 2　求下列函数的单调区间与极值：

1. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$;
2. $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

事实　对于单调区间与极值，有如下基本结果：

- $f'(x) > 0$ 的区间为单调增加区间；
- $f'(x) < 0$ 的区间为单调减少区间；
- $f'(x) = 0$ 或者不存在的点很可能为极值点.

函数的最值

事实　一般地，对于函数在闭区间 $[a, b]$ 上的最值，我们只需考虑下述这些可疑点：

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点.

函数的最值

事实 一般地，对于函数在闭区间 $[a, b]$ 上的最值，我们只需考虑下述这些可疑点：

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点.

事实 特殊地，若函数在区间（开或闭，有限或无限）上可导，且在区间内只有一个驻点，则有

- 如果该驻点为极大值，则它也是最大值；
- 如果该驻点为极小值，则它也是最小值.

凹凸区间与拐点

例 3　求下列曲线的凹凸区间与拐点：

1 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1;$

2 $f(x) = (x-2)^{\frac{5}{3}}.$

凹凸区间与拐点

例 3　求下列曲线的凹凸区间与拐点：

1 $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$;

2 $f(x) = (x-2)^{\frac{5}{3}}$.

事实　对于凹凸区间与拐点，有如下基本结果：

- $f''(x) > 0$ 的区间为凹区间；
- $f''(x) < 0$ 的区间为凸区间；
- $f''(x) = 0$ 或者不存在的点很可能为拐点.

证明不等式的方法

例 4　证明：当 $x > 0$ 时，有 $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$.

证明不等式的方法

例 4　证明：当 $x > 0$ 时，有 $\ln(1+x) > x - \dfrac{x^2}{2}$.

注记　证明不等式有如下这些方法：

1. 拉格朗日中值定理……………………利用 1 阶导数
2. 泰勒公式……………………………利用 n 阶导数
3. 函数的单调性………………………利用 1 阶导数
4. 曲线的凹凸性………………………利用 2 阶导数

曲线的渐近线

例 5　求曲线 $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$ 的渐近线.

曲线的渐近线

例 5　求曲线 $f(x) = \dfrac{2x+3}{x-1}$ 的渐近线.

事实　对于曲线的渐近线，我们有如下定义：

- 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$，则 $y = b$ 为水平渐近线；
- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，则 $x = a$ 为铅直渐近线.

不定积分

我们以第四章总习题第 4 大题奇数编号题目作为例子，说明求不定积分的基本方法.

不定积分

我们以第四章总习题第 4 大题奇数编号题目作为例子，说明求不定积分的基本方法.

这里只提供比较原始的做法，也许不够简单.

不定积分

我们以第四章总习题第 4 大题奇数编号题目作为例子，说明求不定积分的基本方法.

这里只提供比较原始的做法，也许不够简单．但是比较自然，容易掌握.

第四章	不定积分
A	有理分式的积分
B	换元积分法
C	分部积分法

有理分式 1

有理分式可以先化为部分分式的和，再分别求积分.

有理分式 1

有理分式可以先化为部分分式的和，再分别求积分.

---

(9) $$\int \frac{dx}{x(x^6+4)} = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{x^5}{x^6+4}\right) dx$$

有理分式 1

有理分式可以先化为部分分式的和，再分别求积分.

$$(9)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)} = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{x^5}{x^6+4}\right)\mathrm{d}x$$

$$(25)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{16-x^4} = \int \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4-x^2} + \frac{1}{4+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

有理分式 1

有理分式可以先化为部分分式的和，再分别求积分.

$$(9)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^6+4)} = \int \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} - \frac{x^5}{x^6+4}\right)\mathrm{d}x$$

$$(25)\ \int \frac{\mathrm{d}x}{16-x^4} = \int \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4-x^2} + \frac{1}{4+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

将有理分式分解为部分分式的时候，可以用待定系数法．但对于较简单的情形，可以直接凑出分子的系数．

有理分式 2

有理分式也可以用换元积分法化为简单的有理分式.

有理分式 2

有理分式也可以用换元积分法化为简单的有理分式.

$$(3)\ \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{a^6 - x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x^3)}{a^6 - x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{a^6 - u^2}$$

有理分式 2

有理分式也可以用换元积分法化为简单的有理分式.

$$(3)\ \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{a^6 - x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x^3)}{a^6 - x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}u}{a^6 - u^2}$$

$$(23)\ \int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(1+x^8)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x^4)}{(1+x^8)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2}$$

第四章	不定积分
A	有理分式的积分
B	换元积分法
C	分部积分法

换元积分法 1

换元积分法的一般函数情形：

$$\int \phi(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int \phi(g(x))\,\mathrm{d}(g(x)) = \int \phi(u)\,\mathrm{d}u$$

换元积分法 1

换元积分法的一般函数情形：

$$\int \phi(g(x))g'(x)\,\mathrm{d}x = \int \phi(g(x))\,\mathrm{d}(g(x)) = \int \phi(u)\,\mathrm{d}u$$

---

(5) $$\int \frac{\ln\ln x\,\mathrm{d}x}{x} = \int \ln(\ln x)\,\mathrm{d}(\ln x) = \int \ln u\,\mathrm{d}u$$

换元积分法 2

换元积分法的指数函数情形：对于 $\int \phi(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$，令 $u=\mathrm{e}^x$，则有 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$.

换元积分法 2

换元积分法的指数函数情形：对于 $\int \phi(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$，令 $u=\mathrm{e}^x$，则有 $\mathrm{d}x=\dfrac{\mathrm{d}u}{u}$.

---

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}=\int \frac{\mathrm{d}u}{u(u-u^{-1})}=\int \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$$

换元积分法 2

换元积分法的指数函数情形：对于 $\int \phi(\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x$，令 $u = \mathrm{e}^x$，则有 $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{u}$.

---

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u(u - u^{-1})} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u^2 - 1}$$

(31) $$\int \frac{(\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{2x} + 1} = \int \frac{(u^2 + 1)\,\mathrm{d}u}{u^4 - u^2 + 1} = \int \frac{(u^2 + 1)\,\mathrm{d}u}{(u^2 + 1)^2 - 3u^2}$$

换元积分法 3

换元积分法的正切正割函数情形 (令 $u = \tan x$):

$$\int \phi(\tan x) \sec^{2k} x \,\mathrm{d}x = \int \phi(u)(1+u^2)^{k-1} \,\mathrm{d}u$$

换元积分法 3

换元积分法的正切正割函数情形 (令 $u=\tan x$):

$$\int \phi(\tan x)\sec^{2k} x\,\mathrm{d}x = \int \phi(u)(1+u^2)^{k-1}\,\mathrm{d}u$$

---

(7) $\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x = \int \tan^2 x \sec^2 x\,\mathrm{d}x - \int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

换元积分法 4

换元积分法的正弦余弦函数情形 (k 可为负整数):

$$\int \phi(\sin x)\cos^{2k+1} x \, \mathrm{d}x = \int \phi(u)(1-u^2)^k \, \mathrm{d}u$$

$$\int \phi(\cos x)\sin^{2k+1} x \, \mathrm{d}x = -\int \phi(u)(1-u^2)^k \, \mathrm{d}u$$

换元积分法 4

换元积分法的正弦余弦函数情形 (k 可为负整数):

$$\int \phi(\sin x)\cos^{2k+1} x \,\mathrm{d}x = \int \phi(u)(1-u^2)^k \,\mathrm{d}u$$

$$\int \phi(\cos x)\sin^{2k+1} x \,\mathrm{d}x = -\int \phi(u)(1-u^2)^k \,\mathrm{d}u$$

---

(37) $$\int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{\sin x(1+\sin x)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$$

换元积分法 4

换元积分法的正弦余弦函数情形 (k 可为负整数):

$$\int \phi(\sin x)\cos^{2k+1} x\,\mathrm{d}x = \int \phi(u)(1-u^2)^k\,\mathrm{d}u$$

$$\int \phi(\cos x)\sin^{2k+1} x\,\mathrm{d}x = -\int \phi(u)(1-u^2)^k\,\mathrm{d}u$$

---

(37) $$\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x(1+\sin x)} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}$$

(39) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x} = -\int \frac{\mathrm{d}u}{(2+u)(1-u^2)}$$

换元积分法 5

换元积分法的万能公式情形：

$$\int \phi(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \phi\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

换元积分法 5

换元积分法的万能公式情形：

$$\int \phi(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \phi\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

---

(37) $$\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x(1+\sin x)} = \int \frac{1-u^2}{u(u^2+2u+1)}\,\mathrm{d}u$$

换元积分法 5

换元积分法的万能公式情形：

$$\int \phi(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x = \int \phi\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$(37)\quad \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin x(1+\sin x)} = \int \frac{1-u^2}{u(u^2+2u+1)}\,\mathrm{d}u$$

$$(39)\quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x} = \int \frac{1+u^2}{u(u^2+3)}\,\mathrm{d}u$$

换元积分法 6

换元积分法的根号情形 I：

1. 若含有 $\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，令 $u=\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$；
2. 若含有 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$，令 $u=\sqrt[6]{x}$.

换元积分法的根号情形 I:

1. 若含有 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$，令 $u=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$;
2. 若含有 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$，令 $u=\sqrt[6]{x}$.

---

(21) $\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int 2u\arctan u\,\mathrm{d}u$

换元积分法 6

换元积分法的根号情形 I:

1. 若含有 $\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$，令 $u=\sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}$;
2. 若含有 $\sqrt{x}$ 和 $\sqrt[3]{x}$，令 $u=\sqrt[6]{x}$.

---

(21) $$\int \arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\int 2u\arctan u\,\mathrm{d}u$$

(29) $$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\,\mathrm{d}x=6\int\frac{1}{u^2+u}\,\mathrm{d}u$$

换元积分法 7

换元积分法的根号情形 II：

1. 若含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$；
2. 若含有 $\sqrt{a^2+x^2}$，令 $x=a\tan t$；
3. 若含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$；

换元积分法 7

换元积分法的根号情形 II：

1. 若含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$；
2. 若含有 $\sqrt{a^2+x^2}$，令 $x=a\tan t$；
3. 若含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$；

---

(11) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}$

换元积分法 7

换元积分法的根号情形 II：

1 若含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$；

2 若含有 $\sqrt{a^2+x^2}$，令 $x=a\tan t$；

3 若含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$；

---

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}$

(15) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \cos t \, dt$

换元积分法 7

换元积分法的根号情形 II：

1. 若含有 $\sqrt{a^2 - x^2}$，令 $x = a\sin t$；
2. 若含有 $\sqrt{a^2 + x^2}$，令 $x = a\tan t$；
3. 若含有 $\sqrt{x^2 - a^2}$，令 $x = a\sec t$；

---

(11) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}$

(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \cos t\,\mathrm{d}t$

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\,\mathrm{d}t$

换元积分法 7

换元积分法的根号情形 II：

1. 若含有 $\sqrt{a^2-x^2}$，令 $x=a\sin t$；
2. 若含有 $\sqrt{a^2+x^2}$，令 $x=a\tan t$；
3. 若含有 $\sqrt{x^2-a^2}$，令 $x=a\sec t$；

---

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2}}$

(15) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \int \cos t\, dt$

(17) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\cos^3 t}{\sin^4 t}\, dt$

(35) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\, dx = \int \cos t \cdot t \cdot \cos t\, dt$

第四章	不定积分
A	有理分式的积分
B	换元积分法
C	分部积分法

分部积分法

分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

分部积分法

分部积分公式：$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \qquad = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
- $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$
- $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$
- $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

分部积分法

分部积分公式：$\displaystyle\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\displaystyle\int x\,e^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(e^x)$
- $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\displaystyle\int x\ln x\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

分部积分法

分部积分公式: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$:

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
- $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

分部积分法

分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
- $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x = \int \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

分部积分法 1

$$(5)\ \int \ln u \,\mathrm{d}u = u\ln u - \int u\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u$$

分部积分法 1

$$(5)\ \int \ln u \, \mathrm{d}u = u \ln u - \int u \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u$$

$$(19)\ \int \ln(1+x^2) \, \mathrm{d}x = x \ln(1+x^2) - \int x \frac{2x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

分部积分法 1

$$(5)\ \int \ln u \, \mathrm{d}u = u \ln u - \int u \frac{1}{u} \, \mathrm{d}u$$

$$(19)\ \int \ln(1+x^2) \, \mathrm{d}x = x \ln(1+x^2) - \int x \frac{2x}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

$$(21)\ \int 2u \arctan u \, \mathrm{d}u = \int \arctan u \, \mathrm{d}(u^2)$$

$$= u^2 \arctan u - \int \left(\frac{u^2}{1+u^2} \right) \mathrm{d}u$$

分部积分法 2

$$(35)\ \int \cos^2 t \cdot t\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\cos 2t}{2} t\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}\int t\,\mathrm{d}(\sin 2t)$$

$$= \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t\sin 2t - \frac{1}{4}\int \sin 2t\,\mathrm{d}t$$

分部积分法 3

(13) (仅考虑 $a \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 情形)

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{1}{b} \int e^{ax} \, d(\sin bx)$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} \int e^{ax} \, d(\cos bx)$$

$$= \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx$$

分部积分法 4

$$(23)\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2} = -\int \frac{1}{2u}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+u^2}\right)$$

$$= -\frac{2u}{1+u^2} + \int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2u}\right)$$

$$= -\frac{2u}{1+u^2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1+u^2)u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= -\frac{2u}{1+u^2} - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{(1+u^2)}\right)\mathrm{d}u$$

微积分基本公式

定理 1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

微积分基本公式

定理 1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

它称为微积分基本公式或牛顿—莱布尼茨公式.

定积分的换元公式

定积分换元公式：令 $x = \phi(t)$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

其中，当 $x = a$ 时，$t = \alpha$；当 $x = b$ 时，$t = \beta$.

定积分的换元公式

定积分换元公式：令 $x=\phi(t)$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

其中，当 $x=a$ 时，$t=\alpha$；当 $x=b$ 时，$t=\beta$.

例 1　求下列定积分 $\int_{-1}^{2} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

定积分的分部积分公式

分部积分公式：

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

定积分的分部积分公式

分部积分公式：

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

例 2　求下列定积分 $\int_0^1 x e^x \,\mathrm{d}x$.

反常积分

反常积分有两种类型：

1. 无限区间上的积分
2. 对无界函数的积分

反常积分

反常积分有两种类型:

1 无限区间上的积分

2 对无界函数的积分

例 3 求反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x + 1}{e^{x \ln x}} dx.$

计算面积的步骤

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

2 确定积分区间

计算面积的步骤

1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

2 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到

3 确定被积函数

计算面积的步骤

1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到
3. 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到

计算面积的步骤

1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到
3. 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到
4. 计算积分结果

直角坐标下的面积

由曲线 $y=f(x)$, x 轴，直线 $x=a$ 以及直线 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$A=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

直角坐标下的面积

由曲线 $y = f(x)$, x 轴，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

由曲线 $x = f(y)$, y 轴，直线 $y = a$ 以及直线 $y = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b |f(y)|\,\mathrm{d}y$$

直角坐标下的面积

由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

直角坐标下的面积

由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

由曲线 $x = f(y)$, $x = g(y)$，直线 $y = a$ 以及直线 $y = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$A = \int_a^b |f(y) - g(y)| \, \mathrm{d}y$$

直角坐标下的面积

例 1　求由曲线 $y=-x^2+x+2$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

直角坐标下的面积

例 1　求由曲线 $y=-x^2+x+2$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

例 2　求由曲线 $y^2=x$ 和 $y^2=2-x$ 所围成的图形的面积.

极坐标下的面积

在极坐标中，由射线 $\theta = \alpha$，$\theta = \beta$ 以及曲线 $\rho = \phi(\theta)$ 围成的曲边扇形的面积为

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \phi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

例 3 求曲线 $\rho = 2\cos\theta$ 围成的面积.

旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

由曲线 $x = f(y)$，直线 $y = c, y = d$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y = \int_c^d \pi x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_c^d [f(y)]^2 \, \mathrm{d}y$$

旋转体的体积

例 4　求由曲线 $y = x^2$，$x = 1$ 与 x 轴所围成的平面图形，分别绕 x 轴和 y 轴旋转而成的旋转体的体积.

一般立体的体积

设立体在过点 $x = a$、$x = b$ 且垂直于 x 轴的两个平面之间，过点 x 且垂直于 x 轴的截面面积为 $A(x)$，则该立体的体积为

$$V = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$

平面曲线的弧长

1 参数方程：$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\phi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,\mathrm{d}t$

2 直角坐标：$s=\int_{a}^{b}\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$

3 极坐标：$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho(\theta)^2+\rho'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$