高等数学课程

高等数学 2 复习

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞(lvjr.bitbucket.io)

第七章	微分方程
第八章	空间解析几何
第九章	多元函数微分法
第十章	重积分
第十一章	曲线积分与曲面积分
第十二章	无穷级数

微分方程的概念

定义 1　含有未知函数的导数或微分的方程，即形如下面形式的方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程．其中微分方程中出现的导数的最高阶数 n，称为微分方程的阶．

第七章	微分方程
A	一阶微分方程
B	高阶微分方程

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

一阶微分方程

1. 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$
   - 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$
2. 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

2 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

- 令 $v = \frac{y}{x}$，得 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

2 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

- 令 $v = \frac{y}{x}$，得 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$
- 分离变量，得到 $\frac{\mathrm{d}v}{f(v)-v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

一阶微分方程

1. 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$
   - 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$
2. 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$
   - 令 $v = \frac{y}{x}$，得 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$
   - 分离变量，得到 $\frac{\mathrm{d}v}{f(v)-v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$
3. 一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

2 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

- 令 $v = \frac{y}{x}$，得 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$
- 分离变量，得到 $\frac{\mathrm{d}v}{f(v)-v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

3 一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$

- 先求 $r(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

2 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

- 令 $v = \frac{y}{x}$，得 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$
- 分离变量，得到 $\frac{\mathrm{d}v}{f(v)-v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

3 一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$

- 先求 $r(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$
- 再求 $y = r(x)^{-1}\left(\int q(x)r(x)\,\mathrm{d}x + C\right)$

一阶微分方程

例 1　判别一阶微分方程的类型并求通解：

(1) $(1+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+1)\,\mathrm{d}y=0$

(2) $(x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y=0$

(3) $(x+y)\,\mathrm{d}x+(x+1)\,\mathrm{d}y=0$

一阶微分方程

例 1　判别一阶微分方程的类型并求通解:

(1) $(1+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+1)\,\mathrm{d}y=0$

(2) $(x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y=0$

(3) $(x+y)\,\mathrm{d}x+(x+1)\,\mathrm{d}y=0$

解答

(1) $\arctan x+\arctan y=C$

(2) $y^2-2xy-x^2=C$

(3) $y=\dfrac{1}{x+1}\left(-\dfrac{1}{2}x^2+C\right)$

第七章	微分方程
A	一阶微分方程
B	高阶微分方程

二阶可降阶微分方程

1 $y'' = f(x)$ 型

二阶可降阶微分方程

1 $y'' = f(x)$ 型

- 对 x 积分，得 $y' = F(x) + C$

二阶可降阶微分方程

1. $y'' = f(x)$ 型
   - 对 x 积分，得 $y' = F(x) + C$
2. $y'' = f(x, y')$ 型

二阶可降阶微分方程

1 $y'' = f(x)$ 型

- 对 x 积分，得 $y' = F(x) + C$

2 $y'' = f(x, y')$ 型

- 令 $p = y'$，得 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p)$

二阶可降阶微分方程

1 $y'' = f(x)$ 型

- 对 x 积分，得 $y' = F(x) + C$

2 $y'' = f(x, y')$ 型

- 令 $p = y'$，得 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p)$

3 $y'' = f(y, y')$ 型

二阶可降阶微分方程

1 $y'' = f(x)$ 型

- 对 x 积分，得 $y' = F(x) + C$

2 $y'' = f(x, y')$ 型

- 令 $p = y'$，得 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = f(x, p)$

3 $y'' = f(y, y')$ 型

- 令 $p = y'$，得 $p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = f(y, p)$

二阶可降阶微分方程

例 2　求二阶微分方程的通解：

(1) $y'' = \mathrm{e}^{2x}$

(2) $y'' = \frac{1}{x} y'$

(3) $y'' = \frac{3}{2} y^2$

常系数线性微分方程

常系数线性微分方程

1 齐次情形：$y'' + py' + qy = 0$

常系数线性微分方程

1. 齐次情形：$y'' + py' + qy = 0$
   - 写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$

常系数线性微分方程

1 齐次情形：$y'' + py' + qy = 0$

- 写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$
- 由特征方程的解写出齐次通解

常系数线性微分方程

常系数线性微分方程

1 齐次情形：$y'' + py' + qy = 0$

- 写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$
- 由特征方程的解写出齐次通解

2 非齐次情形：$y'' + py' + qy = f(x)$

常系数线性微分方程

常系数线性微分方程

1 齐次情形：$y'' + py' + qy = 0$

- 写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$
- 由特征方程的解写出齐次通解

2 非齐次情形：$y'' + py' + qy = f(x)$

- 先求齐次通解

常系数线性微分方程

常系数线性微分方程

1 齐次情形：$y'' + py' + qy = 0$

- 写出特征方程 $r^2 + pr + q = 0$
- 由特征方程的解写出齐次通解

2 非齐次情形：$y'' + py' + qy = f(x)$

- 先求齐次通解
- 再用待定系数法求非齐次特解

线性微分方程的叠加原理

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

特解 $y_1^*(x)$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

特解 $y_2^*(x)$

线性微分方程的叠加原理

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

特解 $y_1^*(x)$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

特解 $y^*(x) = y_1^*(x) + y_2^*(x)$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

特解 $y_2^*(x)$

例 3　求微分方程 $y'' + y = x^2 + e^x$ 的通解.

第七章	微分方程
第八章	空间解析几何
第九章	多元函数微分法
第十章	重积分
第十一章	曲线积分与曲面积分
第十二章	无穷级数

第八章	空间解析几何
A	向量及其运算
B	平面和直线
C	曲面与曲线

数量积与向量积

1 数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

数量积与向量积

1 数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$

- $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$

数量积与向量积

1 数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

2 向量积 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$

数量积与向量积

1. 数量积 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta$
   - $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
2. 向量积 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$
   - $\vec{a} \times \vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$

数量积与向量积

1. 数量积 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$
   - $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$
2. 向量积 $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\theta$
   - $\vec{a}\times\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}\parallel\vec{b}$

第八章	空间解析几何
A	向量及其运算
B	平面和直线
C	曲面与曲线

平面的方程

- 一般式方程：

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

- 点法式方程：

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

- 截距式方程：

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

直线的方程

- 一般式方程：$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

- 对称式方程：$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_o}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

- 参数式方程：$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

平面直线间的夹角

- 平面与平面的夹角：$\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$
- 直线与直线的夹角：$\cos\theta = \dfrac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1|\,|\vec{s}_2|}$
- 直线与平面的夹角：$\sin\theta = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}|\,|\vec{n}|}$

平面束的方程

过直线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

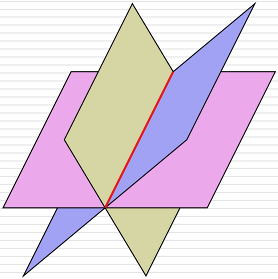
的平面束的方程为

平面束的方程

过直线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

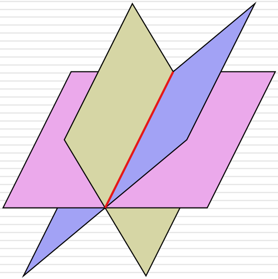
的平面束的方程为



平面束的方程

过直线

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



的平面束的方程为

$$\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

其中，λ_1, λ_2 不全为零.

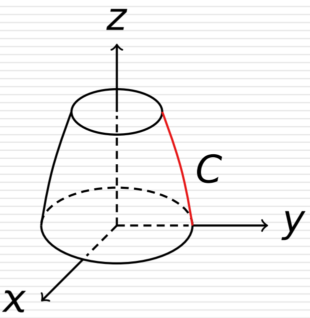
第八章	空间解析几何
A	向量及其运算
B	平面和直线
C	曲面与曲线

旋转曲面

设在 yz 面上的曲线 C 的方程为 $f(y,z)=0$.

它绕 z 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

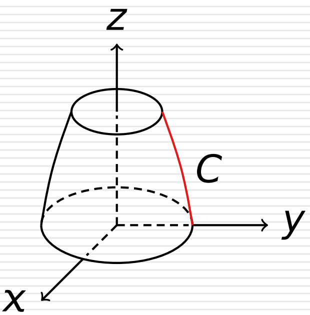


旋转曲面

设在 yz 面上的曲线 C 的方程为 $f(y,z)=0$.

它绕 z 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$



它绕 y 轴旋转一周得到的旋转曲面方程为

$$f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

例 1　直线 L：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，求所得的旋转曲面的方程.

例 1　直线 L：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，求所得的旋转曲面的方程.

解答　设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 L 上任一点，则有

$$\frac{x_1}{3}=\frac{y_1}{2}=\frac{z_1-1}{1} \tag{1}$$

例 1 直线 L：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，求所得的旋转曲面的方程.

解答 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 L 上任一点，则有

$$\frac{x_1}{3}=\frac{y_1}{2}=\frac{z_1-1}{1} \tag{1}$$

设 $M(x,y,z)$ 为 M_1 绕 z 轴旋转轨迹上任一点，则有

$$x^2+y^2=x_1^2+y_1^2,\quad z=z_1 \tag{2}$$

例 1　直线 L：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，求所得的旋转曲面的方程.

解答　设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 L 上任一点，则有

$$\frac{x_1}{3}=\frac{y_1}{2}=\frac{z_1-1}{1} \tag{1}$$

设 $M(x,y,z)$ 为 M_1 绕 z 轴旋转轨迹上任一点，则有

$$x^2+y^2=x_1^2+y_1^2,\quad z=z_1 \tag{2}$$

由 (1) 解得 $x_1=3(z_1-1)$，$y_1=2(z_1-1)$，

例 1 直线 L：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，求所得的旋转曲面的方程.

解答 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 L 上任一点，则有

$$\frac{x_1}{3}=\frac{y_1}{2}=\frac{z_1-1}{1} \tag{1}$$

设 $M(x,y,z)$ 为 M_1 绕 z 轴旋转轨迹上任一点，则有

$$x^2+y^2=x_1^2+y_1^2,\quad z=z_1 \tag{2}$$

由 (1) 解得 $x_1=3(z_1-1)$，$y_1=2(z_1-1)$，代入 (2) 消去 z_1

例 1 直线 L：$\frac{x}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z-1}{1}$ 绕 z 轴旋转一周，求所得的旋转曲面的方程.

解答 设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为 L 上任一点，则有

$$\frac{x_1}{3}=\frac{y_1}{2}=\frac{z_1-1}{1} \tag{1}$$

设 $M(x,y,z)$ 为 M_1 绕 z 轴旋转轨迹上任一点，则有

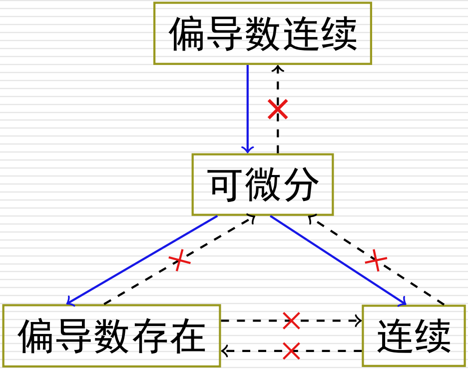
$$x^2+y^2=x_1^2+y_1^2, \quad z=z_1 \tag{2}$$

由 (1) 解得 $x_1=3(z_1-1)$，$y_1=2(z_1-1)$，代入 (2) 消去 z_1 得方程 $x^2+y^2=13(z-1)^2$.

第七章	微分方程
第八章	空间解析几何
第九章	多元函数微分法
第十章	重积分
第十一章	曲线积分与曲面积分
第十二章	无穷级数

第九章	多元函数微分法
A	偏导数与全微分
B	多元微分法几何意义
C	多元极值和条件极值

基本概念的关系图



多元函数求导法

- 复合函数求导（链式法则）
- 隐函数求导（按公式计算）

多元函数求导法

- 复合函数求导（链式法则）
- 隐函数求导（按公式计算）

例 1　设 $z = f(x+y, xy)$，且 f 有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

第九章	多元函数微分法
A	偏导数与全微分
B	多元微分法几何意义
C	多元极值和条件极值

空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\phi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t), \end{cases} \quad t\in[\alpha,\beta].$

则曲线在点 $(x_0,y_0,z_0)=(\phi(t_0),\psi(t_0),\omega(t_0))$ 处有

切向量 $\overrightarrow{T}=(T_1,T_2,T_3)=(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$

切线 $$\frac{x-x_0}{T_1}=\frac{y-y_0}{T_2}=\frac{z-z_0}{T_3}$$

法平面 $T_1(x-x_0)+T_2(y-y_0)+T_3(z-z_0)=0$

空间曲面的法线与切平面

设空间曲面 Σ 的隐式方程为 $F(x,y,z)=0$.

则曲面在点 (x_0,y_0,z_0) 处有

法向量 $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)=\left(F'_x,\ F'_y,\ F'_z\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}$

法线 $$\frac{x-x_0}{n_1}=\frac{y-y_0}{n_2}=\frac{z-z_0}{n_3}$$

切平面 $n_1(x-x_0)+n_2(y-y_0)+n_3(z-z_0)=0$

方向导数

定理　若函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微分，那么它在该点沿任一方向 l 的方向导数存在，且有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)} = f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f'_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

其中 $\vec{e}_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 是与 l 同方向的单位向量.

梯度

定义 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的**梯度**为

$$\mathrm{grad}\, f(x_0,y_0) = \left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\right)$$
$$= f'_x(x_0,y_0)\vec{i} + f'_y(x_0,y_0)\vec{j}$$

或者记为 $\nabla f(x_0,y_0)$.

梯度

定义　二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) = \left(f'_x(x_0,y_0), f'_y(x_0,y_0)\right)$$
$$= f'_x(x_0,y_0)\vec{i} + f'_y(x_0,y_0)\vec{j}$$

或者记为 $\nabla f(x_0,y_0)$.

注记　梯度与方向导数有如下关系：

1 当方向向量与梯度方向相同时，函数增加最快

2 当方向向量与梯度方向相反时，函数减少最快

3 当方向向量与梯度方向垂直时，函数变化率为零

第九章	多元函数微分法
A	偏导数与全微分
B	多元微分法几何意义
C	多元极值和条件极值

极值与最值问题

- 极值的必要条件和充分条件
- 求条件极值的方法
  1. 消元化为无条件极值
  2. 拉格朗日乘数法
- 求解最值和条件最值问题

极值与最值问题

- 极值的必要条件和充分条件
- 求条件极值的方法
  1. 消元化为无条件极值
  2. 拉格朗日乘数法
- 求解最值和条件最值问题

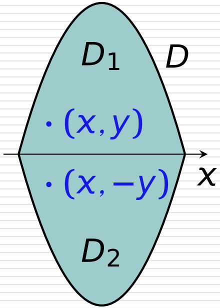
例 2　求二元函数 $f(x,y) = x + y - xy$ 在闭区域 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant 5\}$ 上的最值.

第七章	微分方程
第八章	空间解析几何
第九章	多元函数微分法
第十章	重积分
第十一章	曲线积分与曲面积分
第十二章	无穷级数

第十章	重积分
A	奇偶对称性
B	轮换对称性
C	计算方法
D	几何应用

二重积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 x 轴对称，

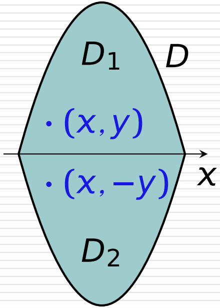


二重积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 x 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$$



二重积分的奇偶对称性

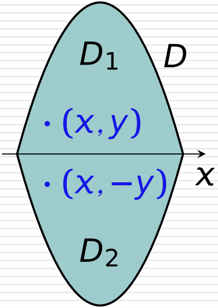
性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 x 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

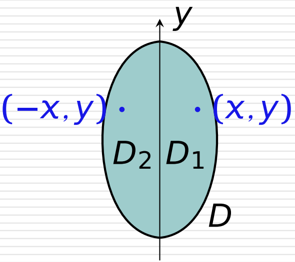
- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$



二重积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 y 轴对称,

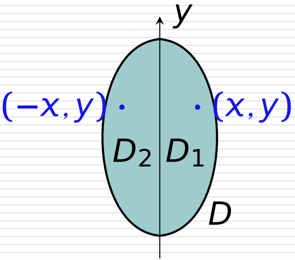


二重积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$$

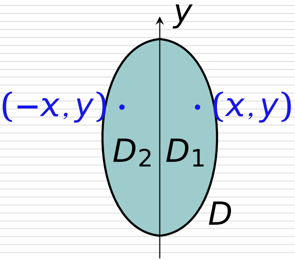


二重积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设闭区域 D 关于 y 轴对称，

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 0$$



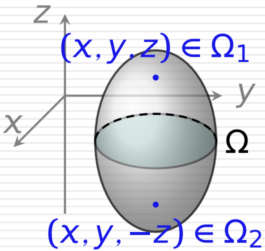
- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数，则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

三重积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)

设空间中三维闭区域 Ω 关于 xy 坐标面对称,



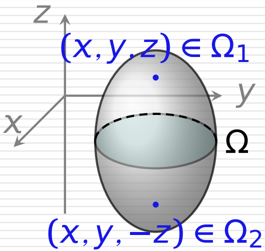
三重积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)

设空间中三维闭区域 Ω 关于 xy 坐标面对称，

(1) 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = 0$$



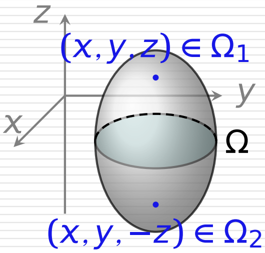
三重积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)

设空间中三维闭区域 Ω 关于 xy 坐标面对称，

(1) 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = 0$$



(2) 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数，则

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

第十章	重积分
A	奇偶对称性
B	轮换对称性
C	计算方法
D	几何应用

轮换对称性

例 1 设 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 围成的闭区域，求积分

$$\iint_D (x^2+3y^2)\,\mathrm{d}\sigma.$$

轮换对称性

例 1　设 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 围成的闭区域，求积分

$$\iint_D (x^2+3y^2)\,\mathrm{d}\sigma.$$

解法　由轮换对称性有 $\iint_D x^2\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D y^2\,\mathrm{d}\sigma$. 从而

$$\iint_D (x^2+3y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D (2x^2+2y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\cdots$$

轮换对称性

例 1　设 D 是圆 $x^2+y^2=1$ 围成的闭区域，求积分

$$\iint_D (x^2+3y^2)\,\mathrm{d}\sigma.$$

解法　由轮换对称性有 $\iint_D x^2\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D y^2\,\mathrm{d}\sigma$. 从而

$$\iint_D (x^2+3y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\iint_D (2x^2+2y^2)\,\mathrm{d}\sigma=\cdots$$

例 2　D 同上，求二重积分 $\iint_D (x^2+2xy+3y^2)\,\mathrm{d}\sigma$.

第十章	重积分
A	奇偶对称性
B	轮换对称性
C	计算方法
D	几何应用

二重积分的计算方法

1. 确定积分区域（求曲面交线的投影曲线）
2. 选择合适的坐标系（直角坐标，极坐标）
3. 选择合适的积分次序（X 型，Y 型）
4. 利用对称性简化计算（可以分块积分）

三重积分的计算方法

1 选择合适的坐标系（直角坐标，柱面坐标）

2 选择合适的积分次序（先一后二，先二后一）

3 利用对称性简化计算（可以分块积分）

第十章	重积分
A	奇偶对称性
B	轮换对称性
C	计算方法
D	几何应用

立体的体积

设曲顶柱体的底面为 xy 平面有界闭区域 D，顶面为连续曲面 $f(x,y)$，则它的体积为

$$V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

立体的体积

设曲顶柱体的底面为 xy 平面有界闭区域 D，顶面为连续曲面 $f(x,y)$，则它的体积为

$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma.$$

占有空间有界闭区域 Ω 的立体的体积为

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

曲面的面积

设曲面 $z = f(x, y)$ 在 xOy 面上的投影区域为 D，且 $f(x, y)$ 的偏导数连续，则曲面的面积为

$$S = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S = \iint_{D} \sqrt{1 + f_x'(x, y)^2 + f_y'(x, y)^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

第七章 微分方程

第八章 空间解析几何

第九章 多元函数微分法

第十章 重积分

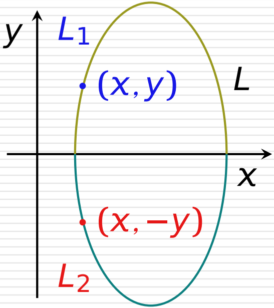
第十一章 曲线积分与曲面积分

第十二章 无穷级数

第十一章	曲线积分与曲面积分
A	奇偶对称性
B	轮换对称性
C	积分联系
D	计算方法

第一类曲线积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设平面曲线 L 关于 x 轴对称

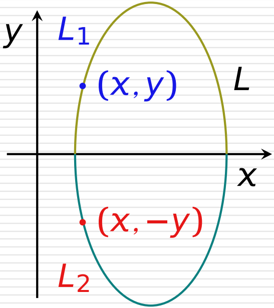


第一类曲线积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设平面曲线 L 关于 x 轴对称

- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = 0$$



第一类曲线积分的奇偶对称性

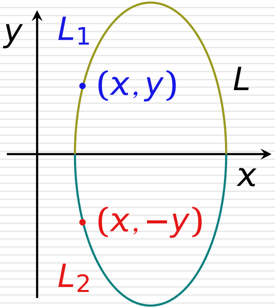
性质 (奇偶对称性)　设平面曲线 L 关于 x 轴对称

- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是奇函数，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = 0$$

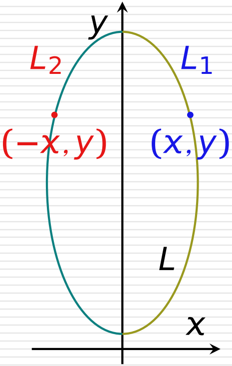
- 若 $f(x,y)$ 关于 y 是偶函数，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s$$



第一类曲线积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设平面曲线 L 关于 y 轴对称

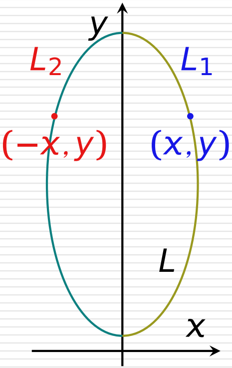


第一类曲线积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设平面曲线 L 关于 y 轴对称

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = 0$$



第一类曲线积分的奇偶对称性

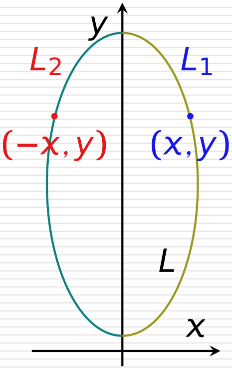
性质 (奇偶对称性)　设平面曲线 L 关于 y 轴对称

- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是奇函数，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = 0$$

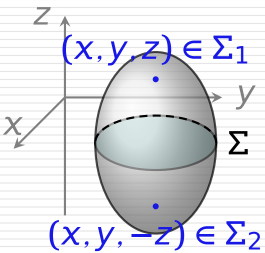
- 若 $f(x,y)$ 关于 x 是偶函数，则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = 2\int_{L_1} f(x,y)\,\mathrm{d}s$$



第一类曲面积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设曲面 Σ 关于 xy 坐标面对称,

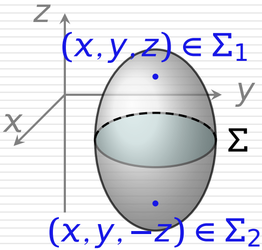


第一类曲面积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设曲面 Σ 关于 xy 坐标面对称，

(1) 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = 0$$

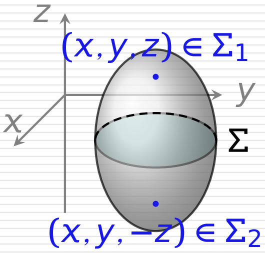


第一类曲面积分的奇偶对称性

性质 (奇偶对称性)　设曲面 Σ 关于 xy 坐标面对称，

(1) 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是奇函数，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = 0$$



(2) 若 $f(x,y,z)$ 关于 z 是偶函数，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = 2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

第十一章	曲线积分与曲面积分
A	奇偶对称性
B	轮换对称性
C	积分联系
D	计算方法

轮换对称性

例 1　Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周，求曲线积分 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$.

轮换对称性

例 1 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周，求曲线积分 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$.

解法 由轮换对称性有

$$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s.$$

轮换对称性

例 1　Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 被平面 $x+y+z=0$ 所截的圆周，求曲线积分 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s$.

解法　由轮换对称性有

$$\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma y^2\,\mathrm{d}s=\oint_\Gamma z^2\,\mathrm{d}s.$$

所以 $\oint_\Gamma x^2\,\mathrm{d}s=\dfrac{1}{3}\oint_\Gamma(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$

$$=\frac{1}{3}\oint_\Gamma 1\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\cdot 2\pi=\frac{2\pi}{3}.$$

轮换对称性

例 2　设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，求曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S.$$

轮换对称性

例 2　设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，求曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S.$$

解法　由轮换对称性有

$$\iint_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S.$$

轮换对称性

例 2 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，求曲面积分

$$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S.$$

解法 由轮换对称性有

$$\iint_{\Sigma}x^2\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}y^2\,\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}z^2\,\mathrm{d}S.$$

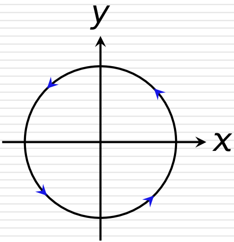
所以 $$\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S=\frac{2}{3}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\frac{2}{3}\iint_{\Sigma}R^2\,\mathrm{d}S=\frac{2}{3}R^2\cdot\mathrm{Area}(\Sigma)=\frac{8}{3}\pi R^4.$$

轮换对称性

例 3　设 L 为逆时针方向的单位圆周 $x^2+y^2=1$，求曲线积分

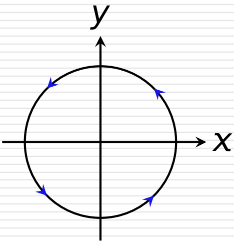
$$\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$



轮换对称性

例 3 设 L 为逆时针方向的单位圆周 $x^2+y^2=1$，求曲线积分

$$\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$



解法 由轮换对称性有 $\oint_L x\,\mathrm{d}y = \oint_L y\,\mathrm{d}x$，从而

$$\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \oint_L x\,\mathrm{d}y - \oint_L y\,\mathrm{d}x = 0.$$

说明上面这种解法的错误之处.

轮换对称性

例 4 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧. 计算

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

轮换对称性

例 4　设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧．计算

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解法　由轮换对称性有

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\quad \iint_{\Sigma} y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

所以原式 $= \displaystyle\iint_{\Sigma} \left(1+z+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cdots = \frac{4\pi}{3}.$

第十一章	曲线积分与曲面积分
A	奇偶对称性
B	轮换对称性
C	积分联系
D	计算方法

区域与边界

闭区域上的积分与区域边界的积分有如下联系：

积分的联系		积分公式
曲线积分与二重积分	$\rightsquigarrow$	格林公式
曲面积分与三重积分	$\rightsquigarrow$	高斯公式
曲线积分与曲面积分	$\rightsquigarrow$	斯托克斯公式

定理 (格林公式) 设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$ 及 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y,$$

其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

定理 (高斯公式)　设空间闭区域 Ω 是由分片光滑的闭曲面 Σ 所围成，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z,)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v$$

$$=\iint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

其中有向曲面 Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧.

定理 (斯托克斯公式) 设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在曲面 Σ 连同边界 Γ 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

其中 Γ 的正向与 Σ 的侧符合右手规则.

格林公式

例 5　设 L 为从 $O(0,0)$ 到 $A(4,0)$ 的上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$，计算曲线积分

$$I=\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y.$$

格林公式

例 5　设 L 为从 $O(0,0)$ 到 $A(4,0)$ 的上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$，计算曲线积分

$$I=\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y.$$

解法　为了使用格林公式，添加辅助线段 AO，求得

$$I=4\iint_D \mathrm{d}\sigma-\int_{AO} x^2\,\mathrm{d}x=8\pi+\frac{64}{3}.$$

高斯公式

例 6　设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧．计算

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

例 6 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧．计算

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解法 由高斯公式有

$$\text{原式} = \iiint_{\Omega} (0+1+2z)\,\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} 1\,\mathrm{d}v = \frac{4\pi}{3}.$$

第十一章	曲线积分与曲面积分
A	奇偶对称性
B	轮换对称性
C	积分联系
D	计算方法

曲线积分的计算

对弧长的曲线积分：$x = \phi(t),\ y = \psi(t)$，$a \leqslant t \leqslant b$

$$\int_L f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\phi(t), \psi(t))\sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

曲线积分的计算

对弧长的曲线积分：$x = \phi(t),\ y = \psi(t)$，$a \leqslant t \leqslant b$

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\phi(t),\psi(t))\sqrt{\phi'(t)^2 + \psi'(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

对坐标的曲线积分：$x = \phi(t),\ y = \psi(t)$，$t$ 从 a 到 b

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b \Big[P(\phi(t),\psi(t))\phi'(t) + Q\big(\phi(t),\psi(t)\big)\psi'(t)\Big]\mathrm{d}t$$

曲面积分的计算

对面积分的曲面积分：设曲面为 $z = z(x, y)$（始终正号）

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\, \mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

曲面积分的计算

对面积的曲面积分：设曲面为 $z = z(x, y)$（始终正号）

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2(x, y) + z_y^2(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

对坐标的曲面积分：设曲面为 $z = z(x, y)$（上正下负）

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

第七章	微分方程
第八章	空间解析几何
第九章	多元函数微分法
第十章	重积分
第十一章	曲线积分与曲面积分
第十二章	无穷级数

第十二章	无穷级数
A	常数项级数
B	幂级数
C	傅里叶级数

正项级数审敛法

必要条件 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发散

满足

比值判别法 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值判别法 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\rho = 1$ $\xrightarrow{\text{不定}}$ $\begin{cases} \text{比较判别法} \\ \text{部分和极限} \end{cases}$

$\rho < 1$ → 收敛

$\rho > 1$ → 发散

一般级数审敛法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发散

满足 ↓

比值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho$

根值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$

- $\rho = 1$ 不定 → Leibniz 定理、部分和极限
- $\rho < 1$ → (绝对) 收敛
- $\rho > 1$ → 发散

第十二章	无穷级数
A	常数项级数
B	幂级数
C	傅里叶级数

幂级数收敛域的求法

- 标准形式幂级数
  1. 先求幂级数的收敛半径 R
  2. 再讨论在 $x = \pm R$ 处的敛散性
- 非标准形式幂级数
  - 通过换元转化为标准形式
  - 直接用比值法或者根值法

幂级数和函数的求法

- 初等变换法：分解和式并套用公式
- 映射变换法：逐项求导或逐项积分

$$\begin{tikzcd}
\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \arrow[rr, "\text{逐项求导或积分}"] \arrow[d, dashed, "\text{难}"] & & \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n \arrow[d, "\text{求和}"] \\
S(x) & & S^*(x) \arrow[ll, "\text{对和式积分或求导}"']
\end{tikzcd}$$

常数项级数和的求法

直接求和　求出级数的部分和，再求极限

间接求和　转换为求幂级数和，再代入值

常数项级数和的求法

直接求和 求出级数的部分和，再求极限

间接求和 转换为求幂级数和，再代入值

例 1 求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{3^n}$ 的和.

函数展开为幂级数的方法

直接展开法 利用泰勒公式计算系数，并研究余项

间接展开法 利用已知的函数展开式，及幂级数性质

函数展开为幂级数的方法

直接展开法 利用泰勒公式计算系数，并研究余项

间接展开法 利用已知的函数展开式，及幂级数性质

例 2 将函数 $\dfrac{x}{x+2}$ 展成 x 的幂级数.

第十二章	无穷级数
A	常数项级数
B	幂级数
C	傅里叶级数

定义 假设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上周期函数，周期为 $T=2\pi$，其傅里叶级数为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

定义 假设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上周期函数，周期为 $T=2l$，其傅里叶级数为：

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$