概率论与数理统计

第一章 · 随机事件

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	随机事件
A	事件的概念与表示
B	事件的关系与运算

随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类：

1. 在一定条件下必然出现的现象，称为必然现象；
2. 在一定条件下可能出现也可能不出现的现象，称为随机现象.

随机现象

人们所观察到的现象大体上分成两类：

1. 在一定条件下必然出现的现象，称为必然现象；
2. 在一定条件下可能出现也可能不出现的现象，称为随机现象.

概率论与数理统计就是研究随机现象量的规律性的数学学科.

随机试验

对某种现象的观察过程称为试验.

随机试验

对某种现象的观察过程称为试验.

满足下述三个特点的试验称为随机试验：

1. 可以在相同条件下重复进行；
2. 事先知道全部可能出现的结果；
3. 每次试验前不能预言将出现的结果.

随机试验

对某种现象的观察过程称为试验.

满足下述三个特点的试验称为随机试验：

1. 可以在相同条件下重复进行；
2. 事先知道全部可能出现的结果；
3. 每次试验前不能预言将出现的结果.

在本课程中，我们一般用试验指代随机试验.

随机试验

随机试验的例子：

1. 掷一颗骰子，观察所掷的点数；
2. 观察某城市一个月内交通事故发生的次数；
3. 观察某类产品的使用寿命.

随机事件

对随机试验的结果的陈述称为随机事件，简称事件.

随机事件

对随机试验的结果的陈述称为随机事件，简称事件.

在掷骰子的随机试验中，下列陈述均为随机事件：

1. 点数为 1；
2. 点数为 4；
3. 点数大于 3；
4. 点数为奇数.

样本空间

随机试验的每个可能结果 ω 称为一个样本点.

样本空间

随机试验的每个可能结果 ω 称为一个样本点.

全体样本点组成的集合 Ω 称为样本空间.

样本空间

随机试验的每个可能结果 ω 称为一个样本点.

全体样本点组成的集合 Ω 称为样本空间.

每个随机事件都可用样本空间的某个子集表示，通常记为 A, B, C 等.

样本空间

随机试验的每个可能结果 ω 称为一个样本点.

全体样本点组成的集合 Ω 称为样本空间.

每个随机事件都可用样本空间的某个子集表示，通常记为 A, B, C 等.

在随机试验中，当事件中的一个样本点出现时，称该事件发生.

样本空间

在掷骰子的试验中，样本空间 $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

1. 点数为 1 ..... $\{1\}$
2. 点数为 4 ..... $\{4\}$
3. 点数大于 3 ..... $\{4, 5, 6\}$
4. 点数为奇数 ..... $\{1, 3, 5\}$

样本空间

随机事件的分类：

- 只含一个样本点的事件称为基本事件
- 含有多于一个样本点的事件称为复合事件
- Ω：必然事件
- $\varnothing$：不可能事件

第一节	随机事件
A	事件的概念与表示
B	事件的关系与运算

事件的关系

若事件 A 发生时，事件 B 一定发生．则称事件 A 包含于事件 B（或事件 B 包含 A），记作

$$A \subset B \text{ (或} B \supset A\text{)}$$

事件的关系

若事件 A 发生时，事件 B 一定发生．则称事件 A 包含于事件 B（或事件 B 包含 A），记作

$$A \subset B \text{ (或} B \supset A\text{)}$$

对任意事件 A，有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

事件的关系

若事件 A 发生时，事件 B 一定发生．则称事件 A 包含于事件 B（或事件 B 包含 A），记作

$$A \subset B \ (\text{或} B \supset A)$$

对任意事件 A，有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

若 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称事件 A 与 B 相等，记作 $A = B$.

事件的运算

以下事件

“事件 A、B 至少有一个发生”

称为事件 A 与 B 的和或并(union)，记作

$$A \cup B \text{ (或} A + B\text{)}$$

事件的运算

以下事件

“事件 A、B 至少有一个发生”

称为事件 A 与 B 的和或并(union)，记作

$$A \cup B \text{ (或} A + B\text{)}$$

从集合的观点来看，

$$A \cup B = \{\omega | \omega \in A \text{ or } \omega \in B\}$$

事件的运算

事件的并可以推广到多个的情形：如 n 个事件的并

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件 } A_1, \cdots, A_n \text{ 至少有一个发生”}$$

可数个事件的并

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2, \cdots \text{ 至少有一个发生”}$$

事件的运算

以下事件

“事件 A、B 同时发生”

称为事件 A 与 B 的积或交(intersection)，记作

$$AB \ (\text{或} A \cap B)$$

事件的运算

以下事件

“事件 A、B 同时发生”

称为事件 A 与 B 的积或交(intersection)，记作

$$AB \text{ (或} A \cap B\text{)}$$

从集合的观点来看，

$$A \cap B = \{\omega | \omega \in A \text{ and } \omega \in B\}$$

事件的运算

事件的交可以推广到多个的情形：如 n 个事件的交

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件 } A_1, \cdots, A_n \text{ 全都发生”}$$

可数个事件的交

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件 } A_1, A_2, \cdots \text{ 全都发生”}$$

事件的关系

若 $AB = \varnothing$，则称 A 与 B 互斥（或称 A 与 B 不相容），即 A 与 B 不可能同时发生.

事件的运算

以下事件

“事件 A 发生，但 B 不发生”

称为事件 A 与 B 的差，记作

$$A - B$$

事件的运算

以下事件

“事件 A 发生，但 B 不发生”

称为事件 A 与 B 的差，记作

$$A - B$$

从集合的观点来看，

$$A - B = \{\omega | \omega \in A \text{ and } \omega \notin B\}$$

事件的运算

以下事件

“事件 A 发生，但 B 不发生”

称为事件 A 与 B 的差，记作

$$A - B$$

从集合的观点来看，

$$A - B = \{\omega | \omega \in A \text{ and } \omega \notin B\}$$

性质　对任意两个事件 A 和 B，总有 $A - B = A - AB$.

事件的运算

称 $\Omega - A$ 为事件 A 的对立事件（或称 A 的补），记为 $\overline{A}$. 它表示“事件 A 不发生”.

事件的运算

称 $\Omega - A$ 为事件 A 的对立事件（或称 A 的补），记为 $\overline{A}$. 它表示“事件 A 不发生”.

性质　事件 A、B 对立当且仅当 A、B 互斥且 $A \cup B = \Omega$.

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1. 交换律

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1. 交换律
   - $AB = BA,\ A \cup B = B \cup A$

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1. 交换律
   - $AB = BA,\ A \cup B = B \cup A$
2. 结合律

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1. 交换律
   - $AB = BA,\ A \cup B = B \cup A$
2. 结合律
   - $(AB)C = A(BC),\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1. 交换律
   - $AB = BA$, $A \cup B = B \cup A$
2. 结合律
   - $(AB)C = A(BC)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. 分配律

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1. 交换律
   - $AB = BA$, $A \cup B = B \cup A$
2. 结合律
   - $(AB)C = A(BC)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. 分配律
   - $A(B \cup C) = AB \cup AC$, $A(B - C) = AB - AC$

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1. 交换律
   - $AB = BA$, $A \cup B = B \cup A$
2. 结合律
   - $(AB)C = A(BC)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. 分配律
   - $A(B \cup C) = AB \cup AC$, $A(B - C) = AB - AC$
4. 对偶律

事件的运算定律

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1. 交换律
   - $AB = BA,\ A \cup B = B \cup A$
2. 结合律
   - $(AB)C = A(BC),\ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
3. 分配律
   - $A(B \cup C) = AB \cup AC,\ A(B - C) = AB - AC$
4. 对偶律
   - $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B},\ \overline{A \cup B} = \overline{A}\,\overline{B}$

事件运算常用等式

性质　设 A, B 为两个事件，则有

1. $A\overline{B} = A - B = A - AB$;
2. $A = AB \cup A\overline{B}$.

事件运算常用等式

性质 设 A, B 为两个事件，则有

1. $A\overline{B} = A - B = A - AB$;
2. $A = AB \cup A\overline{B}$.

解答 用事件运算的分配律：

1. $A\overline{B} = A(\Omega - B) = A\Omega - AB = A - AB$;

事件运算常用等式

性质 设 A, B 为两个事件，则有

1. $A\overline{B} = A - B = A - AB$;
2. $A = AB \cup A\overline{B}$.

解答 用事件运算的分配律：

1. $A\overline{B} = A(\Omega - B) = A\Omega - AB = A - AB$;
2. $AB \cup A\overline{B} = A(B \cup \overline{B}) = A\Omega = A$.

例 1　一名射手连续向某个目标射击三次，事件 A_i 表示该射手第 i 次射击时击中目标（$i = 1, 2, 3$）．试用事件的运算符号表示下列事件：

(1) 三次射击至少有一次击中目标；

(2) 三次射击恰有两次击中目标；

(3) 三次射击至多有一次击中目标.

复习与提高

关系	记号	运算	记号
包含	$A \subset B$	并	$A \cup B$
相等	$A = B$	积	AB
互斥	$A \cap B = \varnothing$	差	$A - B$
对立	$A = \overline{B}$	补	$\overline{A}$

随机事件的概率

事件的概率：刻画试验中随机事件发生的可能性大小.

随机事件的概率

事件的概率：刻画试验中随机事件发生的可能性大小.

在概率论的发展历史上，曾有过多种概率定义方法：

- 概率的统计定义
- 概率的古典定义
- ~~概率的几何定义~~

第二节	事件的概率
A	概率的统计定义
B	概率的古典定义

事件的频率

定义 1 设在 n 次试验中，事件 A 发生了 m 次，则称

$$f_n(A) := \frac{m}{n}$$

为事件 A 发生的频率(frequency).

事件的频率

历史上的掷硬币试验：

试验者	投掷次数	正面次数	频率
Buffon	4040	2048	0.5069
Kerrich	10000	5067	0.5067
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

概率的统计定义

定义 2　在相同条件下重复进行的试验中，若随着试验次数 n 的增加，事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近，则称 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A) = p$.

概率的统计定义

定义 2　在相同条件下重复进行的试验中，若随着试验次数 n 的增加，事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近，则称 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A) = p$.

也就是说：概率是频率的稳定值.

概率的统计定义

定义 2　在相同条件下重复进行的试验中，若随着试验次数 n 的增加，事件 A 发生的频率稳定在某一常数 p 附近，则称 p 为事件 A 的概率，记作 $P(A) = p$.

也就是说：概率是频率的稳定值.

意义：实际应用中常将大量重复试验中事件的频率作为概率的近似估计.

事件的频率

有人收集了包含数十万个单词的英语文本，并统计出其中各字母出现的频率，结果如下：

A	0.0788	H	0.0573	O	0.0776	U	0.0280
B	0.0156	I	0.0707	P	0.0186	V	0.0102
C	0.0268	J	0.0010	Q	0.0009	W	0.0214
D	0.0389	K	0.0060	R	0.0594	X	0.0016
E	0.1268	L	0.0394	S	0.0634	Y	0.0202
F	0.0256	M	0.0244	T	0.0987	Z	0.0006
G	0.0187	N	0.0706				

事件的频率

频率的性质：

1. $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；
2. $f_n(\Omega) = 1$, $f_n(\varnothing) = 0$；
3. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互斥，则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$$

第二节	事件的概率
A	概率的统计定义
B	概率的古典定义

古典概率模型

对某些特殊类型的随机试验，要确定事件发生的概率，并不需要作重复试验，而是根据人类长期积累的关于“对称性”的实际经验，提出数学模型，直接计算出来，从而给出概率相应的定义．这类试验称为等可能概率模型或古典概型．

古典概率模型

定义 3 如果一个随机试验具有以下特点：

1. 样本空间只含有限多个样本点；
2. 各样本点出现的可能性相等，

则称此随机试验是古典型的．此时对每个事件 $A \subset \Omega$，

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点的总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

称为事件 A 的古典概率．

古典概率模型

定义 3 如果一个随机试验具有以下特点：

1. 样本空间只含有限多个样本点；
2. 各样本点出现的可能性相等，

则称此随机试验是古典型的．此时对每个事件 $A \subset \Omega$，

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 包含的样本点数}}{\text{样本点的总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

称为事件 A 的古典概率．

性质 $P(\varnothing) = 0$，$P(\Omega) = 1$．

古典概率模型

例 1　掷一颗均匀骰子，设 A 表示所掷结果为“四点或五点”，B 表示所掷结果为“偶数点”，求 $P(A)$ 和 $P(B)$.

古典概率模型

例 1　掷一颗均匀骰子，设 A 表示所掷结果为“四点或五点”，B 表示所掷结果为“偶数点”，求 $P(A)$ 和 $P(B)$.

例 2　将一枚均匀硬币抛掷三次，设事件 A = “恰有两次正面朝上”，B = “至少一次正面朝上”. 求 $P(A)$ 和 $P(B)$.

组合数

定义：从 n 个不同元素中，取出 $m(m \leqslant n)$ 个元素的所有组合的个数，称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，记为 C_n^m 或 $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$.

组合数公式：

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

组合数

例 3　袋中有 5 个白球和 3 个黑球．从中任取三个球，计算下列概率．

(1) 三个球都是白球的概率．

(2) 三个球两个为白球一个为黑球的概率．

组合数

例 3　袋中有 5 个白球和 3 个黑球．从中任取三个球，计算下列概率．

(1) 三个球都是白球的概率．

(2) 三个球两个为白球一个为黑球的概率．

练习 1　袋中有 6 个白球和 3 个黑球，从中任取 5 个球，计算其中 3 个为白球 2 个为黑球的概率．

分组数

性质　把 n 个物品分成 k 组，使第一组有 n_1 个，第二组有 n_2 个，$\cdots$，第 k 组有 n_k 个，且

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

分组数

性质　把 n 个物品分成 k 组，使第一组有 n_1 个，第二组有 n_2 个，$\cdots$，第 k 组有 n_k 个，且

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

则不同的分组方法数为

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$$

分组数

性质　把 n 个物品分成 k 组，使第一组有 n_1 个，第二组有 n_2 个，$\cdots$，第 k 组有 n_k 个，且

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$$

则不同的分组方法数为

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

分组数是组合数的推广.

分组数

例 4　某公司生产的 15 件产品中，有 12 件正品，3 件次品．现将它们随机地分装在 3 个箱中，每箱装 5 件，设

$A =$ “每箱中恰有一件次品”，

$B =$ “三件次品都在同一箱中”．

求 $P(A)$ 和 $P(B)$．

抽签的公平性

例 5　袋中有 a 个红球和 b 个白球，每次从袋中任取一个球且不放回．用事件 A_n 表示第 n 次取到红球，$1 \leqslant n \leqslant a+b$，试证明 $P(A_n)=\dfrac{a}{a+b}$，与 n 无关．

第三节	概率的加法公式
A	加法公式
B	概率的公理定义

概率的可加性

性质 (加法公式)　若两个事件 A, B 互斥，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

概率的可加性

性质 (加法公式) 若两个事件 A, B 互斥，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

推论 由加法公式可得到如下性质：

1. 对任意事件 A，有 $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$.

概率的可加性

性质 (加法公式) 若两个事件 A, B 互斥，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

推论 由加法公式可得到如下性质：

1. 对任意事件 A，有 $P(A) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$.
2. 对任意两个事件 A, B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

加法公式

例 1　货架上有外观相同的商品 15 件，其中 12 件来自产地甲，3 件来自产地乙．现从 15 件商品中随机地抽取两件，求这两件商品来自同一产地的概率．

加法公式

例 2　10 个产品中有 6 个合格品与 4 个废品，从中抽取 3 个，求其中有废品的概率.

加法公式

例 2　10 个产品中有 6 个合格品与 4 个废品，从中抽取 3 个，求其中有废品的概率.

解答　$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

加法公式

例 2　10 个产品中有 6 个合格品与 4 个废品，从中抽取 3 个，求其中有废品的概率.

解答　$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

练习 1　已知袋中有 4 白 3 黑共 7 个球，从袋中任取 3 个球.

(1) 求其中至少 2 个为白球的概率;

(2) 求其中至多 2 个为白球的概率.

生日问题

例 3　设每个人在一年（按 365 天计）内每一天出生的可能性都相同，现随机选取 $n(n \leqslant 365)$ 个人，试求事件“至少有两人同生日”的概率.

生日问题

例 3　设每个人在一年（按 365 天计）内每一天出生的可能性都相同，现随机选取 $n(n \leqslant 365)$ 个人，试求事件“至少有两人同生日”的概率.

n	20	23	30	40	50	60
P	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.994

三个事件的加法公式

若三个事件 A_1, A_2, A_3 两两互斥，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

三个事件的加法公式

若三个事件 A_1, A_2, A_3 两两互斥，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

对任意三个事件 A_1, A_2, A_3，有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) \\ & + P(A_1A_2A_3). \end{aligned}$$

三个事件的加法公式

若三个事件 A_1, A_2, A_3 两两互斥，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3).$$

对任意三个事件 A_1, A_2, A_3，有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = {} & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ & - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) \\ & + P(A_1A_2A_3). \end{aligned}$$

练习 2　连续掷 3 次骰子，求其中有 6 点出现的概率.

赌注分配问题

例 4　17 世纪，法国贵族梅累向法国数学家帕斯卡提出如下问题：甲、乙两个赌徒下了赌注之后，约定先赢 4 局者获得全部赌注．假定在每一局中两者获胜机会均等．现在甲已赢 2 局而乙已赢 1 局，赌局被迫停止，问赌注应该如何分配？

赌注分配问题

例 4　17 世纪，法国贵族梅累向法国数学家帕斯卡提出如下问题：甲、乙两个赌徒下了赌注之后，约定先赢 4 局者获得全部赌注．假定在每一局中两者获胜机会均等．现在甲已赢 2 局而乙已赢 1 局，赌局被迫停止，问赌注应该如何分配？

注记　赌注的分配取决于，若赌博能持续下去，甲和乙各自获胜的概率．

赌注分配问题

甲需再赢 2 局才能获胜，乙需再赢 3 局才能获胜．为确保能决出胜负，要再进行 $2+3-1=4$ 局赌博．

赌注分配问题

甲需再赢 2 局才能获胜，乙需再赢 3 局才能获胜．为确保能决出胜负，要再进行 $2+3-1=4$ 局赌博．

用 X_i 表示再进行 4 局赌博甲获胜 i 次（$0 \leqslant i \leqslant 4$），

赌注分配问题

甲需再赢 2 局才能获胜，乙需再赢 3 局才能获胜．为确保能决出胜负，要再进行 $2+3-1=4$ 局赌博．

用 X_i 表示再进行 4 局赌博甲获胜 i 次（$0 \leqslant i \leqslant 4$），则甲最终获胜的概率等于

$$P(A)=P(X_2 \cup X_3 \cup X_4)=\frac{C_4^2}{2^4}+\frac{C_4^3}{2^4}+\frac{C_4^4}{2^4}=\frac{11}{16}$$

赌注分配问题

甲需再赢 2 局才能获胜，乙需再赢 3 局才能获胜．为确保能决出胜负，要再进行 $2+3-1=4$ 局赌博．

用 X_i 表示再进行 4 局赌博甲获胜 i 次（$0 \leqslant i \leqslant 4$），则甲最终获胜的概率等于

$$P(A)=P(X_2 \cup X_3 \cup X_4)=\frac{C_4^2}{2^4}+\frac{C_4^3}{2^4}+\frac{C_4^4}{2^4}=\frac{11}{16}$$

乙最终获胜的概率等于

$$P(B)=P(\overline{A})=P(X_0 \cup X_1)=\frac{C_4^0}{2^4}+\frac{C_4^1}{2^4}=\frac{5}{16}$$

赌注分配问题

甲需再赢 2 局才能获胜，乙需再赢 3 局才能获胜．为确保能决出胜负，要再进行 $2+3-1=4$ 局赌博．

用 X_i 表示再进行 4 局赌博甲获胜 i 次（$0 \leqslant i \leqslant 4$），则甲最终获胜的概率等于

$$P(A)=P(X_2 \cup X_3 \cup X_4)=\frac{C_4^2}{2^4}+\frac{C_4^3}{2^4}+\frac{C_4^4}{2^4}=\frac{11}{16}$$

乙最终获胜的概率等于

$$P(B)=P(\overline{A})=P(X_0 \cup X_1)=\frac{C_4^0}{2^4}+\frac{C_4^1}{2^4}=\frac{5}{16}$$

因此甲、乙两人应该按 $11:5$ 的比例分配赌注．

概率的减法公式

推论 由加法公式可得到减法公式：

1. 若事件 $A \subset B$，则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$.

概率的减法公式

推论 由加法公式可得到减法公式：

1. 若事件 $A \subset B$，则 $P(B-A) = P(B) - P(A)$.
   特别地，$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$.

概率的减法公式

推论 由加法公式可得到减法公式：

1. 若事件 $A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.
   特别地，$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
2. 对任意两个事件 A, B，有

$$P(B-A)=P(B)-P(AB).$$

概率的减法公式

推论 由加法公式可得到减法公式：

1. 若事件 $A \subset B$，则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.
   特别地，$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqslant P(B)$.
2. 对任意两个事件 A, B，有
   $$P(B-A)=P(B)-P(AB).$$

注记 由于 $B\overline{A}=B-A$，所以同样有
$$P(B\overline{A})=P(B)-P(AB).$$

第三节	概率的加法公式
A	加法公式
B	概率的公理定义

概率的公理定义

定义 1 设 Ω 是样本空间，对每个事件 A 定义一个实数 $P(A)$ 与之对应．若函数 P 满足以下条件：

1. 非负性：对任意事件 A，均有 $P(A) \geqslant 0$；
2. 规范性：$P(\Omega) = 1$；
3. 可加性：若事件序列 $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率(probability).

第四节	条件概率与乘法公式
A	条件概率
B	乘法公式
C	全概率公式
D	贝叶斯公式

条件概率

定义 在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率，称为条件概率，记为 $P(B|A)$.

条件概率

定义 在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率，称为条件概率，记为 $P(B|A)$.

有时为了强调区别，也称 $P(B)$ 为无条件概率.

条件概率

定义 在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率，称为条件概率，记为 $P(B|A)$.

有时为了强调区别，也称 $P(B)$ 为无条件概率.

例 1 袋中有 6 个球，其中 4 个红球，2 个白球．每次从袋中抽取一个球且不放回，连续取两次．求在第一次取到红球的条件下，第二次又取到红球的概率.

条件概率

例子　某个班级的考试情况如下表：

	及格	不及格	合计
男生	40	20	60
女生	30	10	40
合计	70	30	100

求（1）全班及格率；（2）男生及格率.

条件概率定义

定义 1 设 $P(A) > 0$，称

$$P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下，事件 B 的条件概率.

条件概率定义

定义 1 设 $P(A) > 0$，称

$$P(B|A) := \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下，事件 B 的条件概率.

在古典概率模型中，

$$P(B|A) = \frac{\text{事件 } AB \text{ 包含的样本点数}}{\text{事件 } A \text{ 包含的样本点数}} = \frac{n(AB)}{n(A)}.$$

条件概率

例 3　某个家庭有两个小孩，若已知有一个是女孩，则两个都是女孩的概率是多少？

条件概率

例 3　某个家庭有两个小孩，若已知有一个是女孩，则两个都是女孩的概率是多少？

解答　事件 A 表示至少有一个为女孩，事件 B 表示两个都是女孩，则 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}$.

条件概率

例 4　保险公司按年向车主收取保险费，并承担交通事故的赔偿费用．假设车主一年内发生事故的概率为 0.2，连续两年发生事故的概率是 0.08．试解释保险公司的车险浮动费率规则的合理性：

(1) 若第一年内发生了事故，则上调第二年的保险费；

(2) 若第一年内未发生事故，则下调第二年的保险费．

条件概率

练习 1　某公司推出新产品前先做电视广告，之后对该产品进行了调查．设事件 A 表示“某人看过该广告”，B 表示“某人买了该产品”．若 $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(AB) = 0.1$，问该广告是否有效？

条件概率的性质

条件概率也是概率．因此关于概率的一切性质，也都适用于条件概率．比如

1. $P(B|A)+P(\overline{B}|A)=1$；
2. $P(B\cup C|A)=P(B|A)+P(C|A)-P(BC|A)$.

第四节	条件概率与乘法公式
A	条件概率
B	乘法公式
C	全概率公式
D	贝叶斯公式

乘法公式

定理 1 (乘法公式) 由条件概率的定义，得到

- 如果 $P(A) > 0$，则有 $P(AB) = P(A)P(B|A)$.

乘法公式

定理 1 (乘法公式) 由条件概率的定义，得到

- 如果 $P(A) > 0$，则有 $P(AB) = P(A)P(B|A)$.
- 如果 $P(B) > 0$，则有 $P(AB) = P(B)P(A|B)$.

乘法公式

定理 1 (乘法公式) 由条件概率的定义，得到

- 如果 $P(A) > 0$，则有 $P(AB) = P(A)P(B|A)$.
- 如果 $P(B) > 0$，则有 $P(AB) = P(B)P(A|B)$.

例 5 在某次抽签考试中有 10 个考题，其中 4 个是难题．甲乙二人参加抽题（不放回），甲先乙后.

(1) 求甲乙都抽到难题的概率.

(2) 求甲没抽到难题而乙抽到难题的概率.

三个事件的乘法公式

推论　如果 $P(A_1A_2) > 0$，则有乘法公式

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2).$$

三个事件的乘法公式

推论 如果 $P(A_1A_2) > 0$，则有乘法公式

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2).$$

例 6 一批灯泡共 100 只，其中 10 只是次品，其余为正品，作不放回抽取，每次取一只，求第三次才取到正品的概率.

第四节	条件概率与乘法公式
A	条件概率
B	乘法公式
C	全概率公式
D	贝叶斯公式

全概率公式

例 7　在某次抽签考试中有 10 个考题，其中 4 个是难题．甲乙二人参加抽题（不放回），甲先乙后．

(1) 求甲抽到难题的概率．

(2) 求乙抽到难题的概率．

全概率公式

例 7　在某次抽签考试中有 10 个考题，其中 4 个是难题．甲乙二人参加抽题（不放回），甲先乙后．

(1) 求甲抽到难题的概率．

(2) 求乙抽到难题的概率．

注记　这个例子说明抽签是公平的，与先后顺序无关．

全概率公式

定理 (全概率公式) 若事件 A 满足 $0 < P(A) < 1$，则对任何事件 B，有

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}).$$

全概率公式

定理 (全概率公式) 若事件 A 满足 $0 < P(A) < 1$，则对任何事件 B，有

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}).$$

例 8 市场上供应的灯泡中，甲厂产品占 70%，乙厂产品占 30%，甲厂产品的合格率是 95%，乙厂的合格率是 80%．求市场上灯泡的合格率．

全概率公式

定理 (全概率公式) 若事件 A 满足 $0 < P(A) < 1$，则对任何事件 B，有

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A}).$$

例 8 市场上供应的灯泡中，甲厂产品占 70%，乙厂产品占 30%，甲厂产品的合格率是 95%，乙厂的合格率是 80%．求市场上灯泡的合格率．

解答 0.905.

样本空间的划分

定义 2 设 Ω 为某试验的样本空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一组事件．如果以下条件成立：

1. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，
2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$，

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分．

样本空间的划分

定义 2 设 Ω 为某试验的样本空间，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为一组事件．如果以下条件成立：

1. $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，
2. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$，

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为样本空间 Ω 的一个划分．

例子 对任意事件 A，A 与 $\overline{A}$ 为样本空间的一个划分．

全概率公式

定理 2 (全概率公式) 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间的划分，且都有正概率，则对任意事件 B 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

全概率公式

定理 2 (全概率公式) 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间的划分，且都有正概率，则对任意事件 B 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

例 9 一批螺丝钉由编号为 I、II、III 的三台机器共同生产，各台机器生产的螺丝钉所占比例分别为 35%、40% 和 25%，次品率分别为 3%、2% 和 1%．求整批螺丝钉的次品率．

全概率公式

定理 2 (全概率公式) 如果 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间的划分，且都有正概率，则对任意事件 B 有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i).$$

例 9 一批螺丝钉由编号为 I、II、III 的三台机器共同生产，各台机器生产的螺丝钉所占比例分别为 35%、40% 和 25%，次品率分别为 3%、2% 和 1%．求整批螺丝钉的次品率．.....0.021

全概率公式

练习 3 (产品验收问题)　每个箱子中有十件产品，其次品数从 0 到 2 等概率．开箱检验时，从中一次抽取两件，如果发现有次品，则认为该箱产品不合格而拒收．求一箱产品通过验收的概率．

全概率公式

敏感性问题的社会调查：

- 在问卷调查中，有些问题可能会使受访者感到尴尬而不愿做真实的回答.

全概率公式

敏感性问题的社会调查：

- 在问卷调查中，有些问题可能会使受访者感到尴尬而不愿做真实的回答.
- 针对这种情况，调查设计者一般会采用“随机化回答”的方法进行调查.

全概率公式

例 10　假设要对研究生论文抄袭现象进行社会调查，我们设计两个具有相同答案的问题：

(1) 你的生日是否在 7 月 1 日以前？

(2) 你做论文时是否有过抄袭行为？

全概率公式

例 10　假设要对研究生论文抄袭现象进行社会调查，我们设计两个具有相同答案的问题：

(1) 你的生日是否在 7 月 1 日以前？

(2) 你做论文时是否有过抄袭行为？

同时提供给受访者一个放有等量红球和白球的袋子，受访者在不被观察的情况下从袋子中随机取一个球观察颜色后放回．如果是红球回答第一个问题，白球回答第二个问题．

全概率公式

例 10　假设要对研究生论文抄袭现象进行社会调查，我们设计两个具有相同答案的问题：

(1) 你的生日是否在 7 月 1 日以前？

(2) 你做论文时是否有过抄袭行为？

同时提供给受访者一个放有等量红球和白球的袋子，受访者在不被观察的情况下从袋子中随机取一个球观察颜色后放回．如果是红球回答第一个问题，白球回答第二个问题．

假定受访者有 150 人，统计出共有 60 个回答“是”．问：有抄袭行为的比率是多少？

第四节	条件概率与乘法公式
A	条件概率
B	乘法公式
C	全概率公式
D	贝叶斯公式

贝叶斯公式

例 11　市场上供应的灯泡中，甲厂产品占 70%，乙厂产品占 30%，甲厂产品的合格率是 95%，乙厂的合格率是 80%．现购买到一个合格灯泡，求该灯泡是甲厂生产的概率．

贝叶斯公式

例 11　市场上供应的灯泡中，甲厂产品占 70%，乙厂产品占 30%，甲厂产品的合格率是 95%，乙厂的合格率是 80%．现购买到一个合格灯泡，求该灯泡是甲厂生产的概率．……0.735

贝叶斯公式

例 11　市场上供应的灯泡中，甲厂产品占 70%，乙厂产品占 30%，甲厂产品的合格率是 95%，乙厂的合格率是 80%．现购买到一个合格灯泡，求该灯泡是甲厂生产的概率．.....0.735

定理 (贝叶斯公式)　设 $0 < P(A) < 1$，$P(B) > 0$，则有

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(\overline{A})P(B|\overline{A})}$$

贝叶斯公式

例 12　某一地区患有癌症的人占 0.5%，患者对一种试验反应是阳性的概率为 0.95，正常人对这种试验反应是阳性的概率为 0.04，现抽查了一个人，试验反应是阳性，问此人是癌症患者的概率有多大？

贝叶斯公式

例 12　某一地区患有癌症的人占 0.5%，患者对一种试验反应是阳性的概率为 0.95，正常人对这种试验反应是阳性的概率为 0.04，现抽查了一个人，试验反应是阳性，问此人是癌症患者的概率有多大？

解答　设事件 A 表示此人是癌症患者，事件 B 表示此人检测为阳性，则有 $P(A|B) = 0.1066$.

贝叶斯公式

例 12　某一地区患有癌症的人占 0.5%，患者对一种试验反应是阳性的概率为 0.95，正常人对这种试验反应是阳性的概率为 0.04，现抽查了一个人，试验反应是阳性，问此人是癌症患者的概率有多大？

解答　设事件 A 表示此人是癌症患者，事件 B 表示此人检测为阳性，则有 $P(A|B) = 0.1066$.

注记　$P(\overline{A}|B) = 0.8934$ 表示检测为阳性的人中大部分是正常人.

贝叶斯公式

例 12　某一地区患有癌症的人占 0.5%，患者对一种试验反应是阳性的概率为 0.95，正常人对这种试验反应是阳性的概率为 0.04，现抽查了一个人，试验反应是阳性，问此人是癌症患者的概率有多大？

解答　设事件 A 表示此人是癌症患者，事件 B 表示此人检测为阳性，则有 $P(A|B) = 0.1066$.

注记　$P(\overline{A}|B) = 0.8934$ 表示检测为阳性的人中大部分是正常人．而作为对比，$P(B|\overline{A}) = 0.04$ 表示正常人中很少有检测为阳性的.

贝叶斯公式

定理 3 如果 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是样本空间的一个划分，且都有正概率，则对任意正概率的事件 B 有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}.$$

贝叶斯公式

定理 3 如果 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是样本空间的一个划分，且都有正概率，则对任意正概率的事件 B 有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}.$$

例 13 一批螺丝钉由编号为 I、II、III 的三台机器共同生产，各台机器生产的螺丝钉所占比例分别为 35%、40% 和 25%，次品率分别为 3%、2% 和 1%．现从该批螺丝钉中抽到一颗次品．求这颗螺丝钉由 I, II, III 号机器生产的概率各为多少？

贝叶斯公式

定理 3 如果 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是样本空间的一个划分，且都有正概率，则对任意正概率的事件 B 有

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}.$$

例 13 一批螺丝钉由编号为 I、II、III 的三台机器共同生产，各台机器生产的螺丝钉所占比例分别为 35%、40% 和 25%，次品率分别为 3%、2% 和 1%．现从该批螺丝钉中抽到一颗次品．求这颗螺丝钉由 I, II, III 号机器生产的概率各为多少？ . . . . . $\frac{1}{2}, \frac{8}{21}, \frac{5}{42}$

全概率公式与贝叶斯公式

练习 5　两个口袋，甲袋中有三个白球，两个黑球，乙袋中两个白球，一个黑球．现在由甲袋中任取一个球放入乙袋，再从乙袋中取出一个球．

(1) 求从乙袋取到白球的概率．

(2) 若发现乙袋中取出的球是白球，求从甲袋中取出的球是白球的概率．

复习与提高

选择　设随机事件 A, B 满足 $P(B) > 0$, $P(A|B) = 1$, 则必有.....(　　)

(A) $P(A \cup B) > P(A)$　　(B) $P(A \cup B) > P(B)$

(C) $P(A \cup B) = P(A)$　　(D) $P(A \cup B) = P(B)$

第五节	事件的独立性
A	两个事件的独立性
B	多个事件的独立性

两个事件的独立性

定义 1 若两事件 A、B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称事件 A、B 相互独立.

两个事件的独立性

定义 1 若两事件 A、B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称事件 A、B 相互独立.

实际意义：若 $P(B) > 0$，则上式等价于

$$P(A|B) = P(A),$$

即事件 A 的概率不受事件 B 发生与否的影响.

两个事件的独立性

在实际应用中，往往根据问题的实际情况去假设事件间的独立性．如

- 投掷硬币（或骰子），我们相信每次的结果都不受以前结果的影响；
- 在相同条件下做实验，一般假定每次的实验误差相互独立；
- 一般假定生产中不同的流程（机器、人）也是相互独立的．

两个事件的独立性

例 1　从一副标准 52 张扑克牌中任取一张，用 A 表示事件“抽到 K”，B 表示事件“抽到黑色的牌”．问事件 A 和 B 是否相互独立？

两个事件的独立性

性质　若事件 A 与 B 相互独立，则

$$\overline{A} \text{ 与 } B、A \text{ 与 } \overline{B}、\overline{A} \text{ 与 } \overline{B}$$

也是相互独立的.

两个事件的独立性

性质　若事件 A 与 B 相互独立，则

$$\overline{A} \text{ 与 } B、A \text{ 与 } \overline{B}、\overline{A} \text{ 与 } \overline{B}$$

也是相互独立的.

例 2　甲乙两射手独立地射击同一目标，他们击中目标的概率分别为 0.9 和 0.8．求每人射击一次后，目标被击中的概率.

两个事件的独立性

练习 1 (2014 数三)　设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B) = 0.5$，$P(A - B) = 0.3$，求 $P(B - A)$.

第五节	事件的独立性
A	两个事件的独立性
B	多个事件的独立性

多个事件的独立性

定义 2 称 $n(n \geqslant 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，如果对任意一组指标

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n \quad (k \geqslant 2)$$

都有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k}).$$

多个事件的独立性

例 3　三个事件 A, B, C 相互独立的条件是

1. 两两独立：$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases}$
2. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

多个事件的独立性

例 3 三个事件 A, B, C 相互独立的条件是

1. 两两独立：$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) \\ P(AC) = P(A)P(C) \\ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases}$
2. $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$

注记 三个事件两两独立 $\not\Rightarrow$ 三个事件相互独立.

多个事件的独立性

性质　设 $n(n \geqslant 2)$ 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则

1. 其中任意 $k(k \geqslant 2)$ 个事件也是相互独立的.
2. 将若干个 A_i 用 $\overline{A}_i$ 替换后，得到的新事件集也相互独立.
3. 特别地，我们有

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdots P(\overline{A}_n).$$

多个事件的独立性

例 4　三人独立地去破译一份密码, 已知每个人能译出的概率分别为 1/5，1/3，1/4．问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少？

多个事件的独立性

例 4　三人独立地去破译一份密码, 已知每个人能译出的概率分别为 1/5，1/3，1/4．问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少？

例 5　若干人独立地向一移动目标射击, 每人击中目标的概率都是 0.6．求至少需要多少人, 才能以 0.99 以上的概率击中目标?

多个事件的独立性

例 4　三人独立地去破译一份密码, 已知每个人能译出的概率分别为 1/5，1/3，1/4．问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少？

例 5　若干人独立地向一移动目标射击, 每人击中目标的概率都是 0.6．求至少需要多少人, 才能以 0.99 以上的概率击中目标?

解答　$P(A) = 1 - 0.4^n > 0.99$，则有 $n > 5.026$，即至少需要 6 个人.

多个事件的独立性

练习 2　甲、乙、丙三部机床独立工作，在一天内，三台机床的故障概率分别为 0.1、0.2、0.3．求在一天之内，

(1) 有机床发生故障的概率；

(2) 至少两台机床发生故障的概率.

复习与提高

选择　设 A，B 是两个随机事件，且 $0 < P(A) < 1$，$P(B) > 0$，$P(B|A) = P(B|\overline{A})$. 则必有 $\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $P(A|B) = P(\overline{A}|B)$　　(B) $P(A|B) \neq P(\overline{A}|B)$

(C) $P(AB) = P(A)P(B)$　　(D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$