概率论与数理统计

第三章 · 随机向量

2020 年 3 月 9 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

随机向量

很多随机现象只用一个随机变量来描述是不够的，需要用几个随机变量同时来描述．如：

- 平面上一点的位置需要用两个坐标来表示；
- 天气通常由最高、最低气温，相对湿度，风力，降水量等因素决定；
- 钢材的质量有含碳量、含硫量和硬度等基本指标．

随机向量

定义 设 Ω 是某随机试验的样本空间，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是该空间上的随机变量，称

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

为 Ω 上的 n 维随机向量或 n 元随机变量.

二维随机向量的分布函数

定义 1　设 (X,Y) 为二维随机向量，称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

为 (X,Y) 的联合分布函数.

二维随机向量的分布函数

定义 1 设 (X,Y) 为二维随机向量，称二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

为 (X,Y) 的联合分布函数.

注记 联合分布函数 $F(x,y)$ 表示事件 $\{X\leqslant x\}$ 和事件 $\{Y\leqslant y\}$ 同时发生的概率.

二维随机向量的分布函数

分布函数的性质：

1. $F(x,y)$ 对每个自变量都是广义单增的；
2. $0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1$；
3. $F(x,-\infty)=F(-\infty,y)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$；
4. 随机向量 (X,Y) 落在矩形区域 $(x_1,x_2]\times(y_1,y_2]$ 内的概率为

$$P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\}$$

$$=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1).$$

第二节	二维离散型随机向量
A	离散型 · 联合分布
B	离散型 · 边缘分布
C	离散型 · 条件分布
D	离散型 · 独立性

二维离散型随机向量

定义 1　设二维离散型随机向量 (X,Y) 的所有可能取值为

$$(x_i,y_j), i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$$

称

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},$$
$$i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$$

为该随机向量的联合概率分布.

二维离散型随机向量

二维离散型随机向量的联合分布也可以用表格表示：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

二维离散型随机向量

常用性质：

1. $p_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots$
2. $\sum_{i} \sum_{j} p_{ij} = 1$；
3. $F(x, y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij}$

二维离散型随机向量

例 1　设有 10 件产品，其中 7 件正品，3 件次品．现从中任取两次，每次取一件，取后不放回．令:

$X=1$：若第一次取到的产品是次品，

$X=0$：若第一次取到的产品是正品，

$Y=1$：若第二次取到的产品是次品，

$Y=0$：若第二次取到的产品是正品．

求二维随机向量 (X,Y) 的联合概率分布．

二维离散型随机向量

例 2　为进行吸烟与肺癌关系的研究，随机调查了23000 个 40 岁以上的人，其结果如下表

吸烟 \ 肺癌	患	未患
吸	3	4597
不吸	1	18399

引进二维随机向量 (X, Y)，其中

$X = 1$：若被调查者不吸烟，

$X = 0$：若被调查者吸烟，

$Y = 1$：若被调查者未患肺癌，

$Y = 0$：若被调查者患肺癌.

引进二维随机向量 (X, Y)，其中

$X = 1$：若被调查者不吸烟，

$X = 0$：若被调查者吸烟，

$Y = 1$：若被调查者未患肺癌，

$Y = 0$：若被调查者患肺癌.

则 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.00013	0.19987
1	0.00004	0.79996

二维离散型随机向量

练习 1　袋中有标上号码 1、2、2 的三个球，从中任取一个且不再放回，然后再从袋中任取一球，以 X, Y 分别表示第一、二次取到球上的号码数，求 (X, Y) 的联合分布.

第二节	二维离散型随机向量
A	离散型 · 联合分布
B	离散型 · 边缘分布
C	离散型 · 条件分布
D	离散型 · 独立性

边缘分布

二维随机向量 (X, Y) 作为一个整体，有联合分布函数 $F(x, y)$，其分量 X 与 Y 都是随机变量，有各自的分布函数，分别记成 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，称为 X 和 Y 的边缘分布函数.

边缘分布

二维随机向量 (X, Y) 作为一个整体，有联合分布函数 $F(x, y)$，其分量 X 与 Y 都是随机变量，有各自的分布函数，分别记成 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，称为 X 和 Y 的边缘分布函数.

边缘分布由联合分布完全确定：

$$F_X(x) = F(x, +\infty), \qquad F_Y(y) = F(+\infty, y).$$

二维离散型随机向量的边缘分布

设二维离散型随机向量 (X, Y) 的联合分布为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},$$
$$i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots$$

二维离散型随机向量的边缘分布

设二维离散型随机向量 (X,Y) 的联合分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},$$
$$i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$$

则随机变量 X 的边缘概率分布为

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij},\qquad i=1,2,\cdots$$

二维离散型随机向量的边缘分布

设二维离散型随机向量 (X,Y) 的联合分布为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},$$

$$i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$$

则随机变量 X 的边缘概率分布为

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}, \qquad i=1,2,\cdots$$

而随机变量 Y 的边缘概率分布为

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}, \qquad j=1,2,\cdots$$

二维离散型随机向量的边缘分布

设二维离散型随机向量 (X, Y) 的联合分布为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij},$$

$$i = 1, 2, \cdots, j = 1, 2, \cdots$$

则随机变量 X 的边缘概率分布为

$$p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_j p_{ij}, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

而随机变量 Y 的边缘概率分布为

$$p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_i p_{ij}, \qquad j = 1, 2, \cdots$$

通常将这两个分布分别写在联合分布表右边和下边.

二维离散型随机向量的边缘分布

例 3　二维随机向量 (X, Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{30}$
1	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$

求其边缘分布.

二维离散型随机向量的边缘分布

练习 2　袋中有 5 个球，其中三个标数字 0，两个标数字 1. 现依次从袋中取出两个球，分别以 X, Y 表示第一和第二个球上的数字. 对有放回和不放回两种抽取方式，分别写出 (X, Y) 的联合分布与边缘分布.

二维离散型随机向量的边缘分布

练习2　袋中有 5 个球，其中三个标数字 0，两个标数字 1．现依次从袋中取出两个球，分别以 X, Y 表示第一和第二个球上的数字．对有放回和不放回两种抽取方式，分别写出 (X, Y) 的联合分布与边缘分布.

注记　(1) 由联合分布可唯一确定边缘分布.

(2) 仅由边缘分布一般不能得到联合分布.

第二节	二维离散型随机向量
A	离散型 · 联合分布
B	离散型 · 边缘分布
C	离散型 · 条件分布
D	离散型 · 独立性

离散型随机向量的条件分布

设二维离散型随机向量 (X,Y) 的联合分布为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},$$

$$i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$$

则 X 与 Y 的边缘分布分别为

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij},\qquad i=1,2,\cdots$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij},\qquad j=1,2,\cdots$$

离散型随机向量的条件分布

定义 2　当 $p_{\cdot j} > 0$ 时，称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \qquad i = 1, 2, \cdots$$

为 $Y = y_j$ 时 X 的条件概率分布.

离散型随机向量的条件分布

定义 2　当 $p_{\cdot j} > 0$ 时，称

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \qquad i = 1, 2, \cdots$$

为 $Y = y_j$ 时 X 的条件概率分布.

当 $p_{i\cdot} > 0$ 时，称

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \qquad j = 1, 2, \cdots$$

为 $X = x_i$ 时 Y 的条件概率分布.

离散型随机向量的条件分布

例 4　二维随机向量 (X, Y) 的联合分布及边缘分布为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{10}$
1	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	

求 Y 在 X 的各个取值下的条件分布.

离散型随机向量的条件分布

练习 3　二维随机向量 (X, Y) 的联合分布为

$X \backslash Y$	1	2
1	0.1	0.2
2	0.4	0.3

(1) 求 $X = 1$ 条件下 Y 的条件概率分布.

(2) 求 $Y = 2$ 条件下 X 的条件概率分布.

第二节	二维离散型随机向量
A	离散型·联合分布
B	离散型·边缘分布
C	离散型·条件分布
D	离散型·独立性

随机向量的独立性

定义　设随机向量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，若对任意实数 x，y 有

$$F(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

则称 X,Y 相互独立.

随机向量的独立性

定义　设随机向量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，若对任意实数 x，y 有

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y),$$

则称 X,Y 相互独立.

X,Y 相互独立即是指对任意实数 x,y，事件 $\{X\leqslant x\}$ 与 $\{Y\leqslant y\}$ 相互独立.

离散型随机向量的独立性

设二维离散型随机向量 (X,Y) 的分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

则 X 与 Y 的边缘分布分别为

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j p_{ij}, \qquad i=1,2,\cdots$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_i p_{ij}, \qquad j=1,2,\cdots$$

则 X,Y 相互独立的充要条件为

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

离散型随机向量的独立性

例 5　设二维随机向量 (X,Y) 的联合分布及边缘分布如下

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{10}$
1	$\frac{7}{30}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{10}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{3}{10}$	

判断 X,Y 的独立性.

离散型随机向量的独立性

例 6　二维随机向量 (X, Y) 的联合分布为

$X \backslash Y$	1	2
1	0.2	0.2
2	0.3	0.3

判断 X, Y 的独立性.

离散型随机向量的独立性

练习 4　根据下列二维随机向量 (X, Y) 的联合分布，判断 X 和 Y 的独立性.

(1)

$X \backslash Y$	1	2
1	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$
2	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$

;

(2)

$X \backslash Y$	1	2
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

复习与提高

选择　设二维随机向量 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立，则有 . . . . (　　)

(A) $a = 0.2, b = 0.3$　　(B) $a = 0.4, b = 0.1$

(C) $a = 0.3, b = 0.2$　　(D) $a = 0.1, b = 0.4$

复习与提高

复习 1　设随机变量 X 与 Y 各只有 $-1,0,1$ 这三个可能值，且满足条件

$$P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X+Y=0\}=1.$$

试求 (X,Y) 的联合概率分布.

复习与提高

复习 2　二维随机向量 (X, Y) 的服从以下分布律

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$
0	$1/8$	0	$1/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$

判断 X, Y 的独立性.

第三节	二维连续型随机向量
A	连续型 · 联合分布
B	连续型 · 边缘分布
C	连续型 · 条件分布
D	连续型 · 独立性
E	二维正态分布

二维连续型随机向量

定义 1 如果存在一个非负函数 $f(x,y)$，使得二维随机向量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$ 可以写成

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s,$$

则称 (X,Y) 为二维连续型随机向量．函数 $f(x,y)$ 称为 (X,Y) 的联合概率密度．

二维连续型随机向量

联合概率密度函数的基本性质:

1 $f(x,y) \geq 0, \forall x,y$;

2 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$;

3 若函数 f 在点 (x,y) 处连续，则有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y).$$

二维连续型随机向量

联合概率密度函数的基本性质：

4 对任意的平面区域 D,

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

特别地，

$$P\{a<X\leq b, c<Y\leq d\}=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

例 1　设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Cx^2y^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 C 是常数.

(1)　求常数 C;

(2)　计算 $P\left\{X<\frac{1}{3}, Y<\frac{1}{3}\right\}$.

二维连续型随机向量

例 1　设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} Cx^2y^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

其中 C 是常数.

(1) 求常数 C; 9

(2) 计算 $P\left\{X<\dfrac{1}{3}, Y<\dfrac{1}{3}\right\}$. $\dfrac{1}{729}$

二维连续型随机向量

练习 2　设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} C(x+y), & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 C 是常数.

(1) 求常数 C;

(2) 计算 $P\left\{X\leqslant \frac{1}{2}, Y\leqslant \frac{1}{2}\right\}$.

二维连续型随机向量

练习 2　设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} C(x+y), & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

其中 C 是常数.

(1)　求常数 C;

(2)　计算 $P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}, Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

思考　如何计算 $P\{X+Y<1\}$?

均匀分布

定义 2 设 D 是平面上的有界区域，其面积为 d，若二维随机向量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 1/d, & (x,y) \in D; \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

则称 (X, Y) 服从 D 上的均匀分布.

均匀分布

若 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布，则 (X,Y) 落在某一区域 A 内的概率

$$
\begin{aligned}
P\{(X,Y)\in A\} &= \iint_A f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{A\cap D} \frac{1}{d}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{S}{d}
\end{aligned}
$$

其中 S 为 $A\cap D$ 的面积.

均匀分布

例 3 设 (X,Y) 服从

$$D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 4\}$$

上的均匀分布，计算 $P\{(X,Y)\in A\}$，这里 A 是由直线 $x=0,y=0,x+y=1$ 所围成的区域.

第三节	二维连续型随机向量
A	连续型 · 联合分布
B	连续型 · 边缘分布
C	连续型 · 条件分布
D	连续型 · 独立性
E	二维正态分布

边缘分布

二维随机向量 (X,Y) 作为一个整体，有联合分布函数 $F(x,y)$，其分量 X 与 Y 都是随机变量，有各自的分布函数，分别记成 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，称为 X 和 Y 的边缘分布函数.

边缘分布

二维随机向量 (X, Y) 作为一个整体，有联合分布函数 $F(x, y)$，其分量 X 与 Y 都是随机变量，有各自的分布函数，分别记成 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，称为 X 和 Y 的边缘分布函数.

边缘分布由联合分布完全确定：

$$F_X(x) = F(x, +\infty), \qquad F_Y(y) = F(+\infty, y).$$

二维连续型随机向量的边缘分布

设二维连续型随机向量 (X, Y) 的联合概率密度为 $f(x, y)$，则 X，Y 的边缘概率密度分别定义为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y, \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

二维连续型随机向量的边缘分布

设二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，则 X，Y 的边缘概率密度分别定义为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,\quad f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

此时 X，Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(s)\,\mathrm{d}s,\quad F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}f_Y(t)\,\mathrm{d}t.$$

二维连续型随机向量的边缘分布

若 (X,Y) 服从矩形区域

$$D=\{(x,y):a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$$

上的均匀分布，则边缘概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{d-c} & y\in[c,d]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

二维连续型随机向量的边缘分布

若 (X, Y) 服从矩形区域

$$D = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

上的均匀分布，则边缘概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a, b] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{d-c} & y \in [c, d] \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

这表明：X 与 Y 都服从均匀分布．该结论对其他非矩形区域上的均匀分布一般不成立.

二维连续型随机向量的边缘分布

例 4　设 (X,Y) 服从单位圆域

$$D=\{(x,y):x^2+y^2\leqslant 1\}$$

上的均匀分布．求 X 和 Y 的边缘概率密度．

例 5　设 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}9x^2y^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

求 X 与 Y 的边缘概率密度.

二维连续型随机向量的边缘分布

练习 4　设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

求 X 与 Y 的边缘概率密度.

二维连续型随机向量的边缘分布

练习 5　设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0\leqslant x\leqslant y \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

求 X 与 Y 的边缘概率密度.

第三节	二维连续型随机向量
A	连续型 · 联合分布
B	连续型 · 边缘分布
C	连续型 · 条件分布
D	连续型 · 独立性
E	二维正态分布

二维连续型随机向量的条件分布

对于二维连续型随机向量 (X,Y)，其联合概率密度为 $f(x,y)$，X，Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

二维连续型随机向量的条件分布

对于二维连续型随机向量 (X,Y)，其联合概率密度为 $f(x,y)$，X，Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

定义 3 若 $f_Y(y)>0$，在 $Y=y$ 条件下，X 的条件概率密度定义为

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

二维连续型随机向量的条件分布

对于二维连续型随机向量 (X, Y)，其联合概率密度为 $f(x, y)$，X，Y 的边缘概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$.

定义 3　若 $f_Y(y) > 0$，在 $Y = y$ 条件下，X 的条件概率密度定义为

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

同样地，若 $f_X(x) > 0$ 时，在 $X = x$ 条件下，Y 的条件概率密度定义为

$$f_{Y|X}(y|x) := \frac{f(x, y)}{f_X(x)}.$$

二维连续型随机向量的条件分布

定义 4　在 $Y=y$ 条件下，X 的条件分布函数定义为

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\leqslant x|Y=y\}$$

$$=\lim_{h\to 0}P\{X\leqslant x|y\leqslant Y\leqslant y+h\}$$

二维连续型随机向量的条件分布

定义 4　在 $Y=y$ 条件下，X 的条件分布函数定义为

$$
\begin{aligned}
F_{X|Y}(x|y) &= P\{X \leqslant x | Y = y\} \\
&= \lim_{h \to 0} P\{X \leqslant x | y \leqslant Y \leqslant y + h\}
\end{aligned}
$$

定理 1　若 $f(\cdot,\cdot)$ 在点 (x,y) 处连续，$f_Y(\cdot)$ 在点 y 处连续，且 $f_Y(y) > 0$，则

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(s|y)\,\mathrm{d}s.$$

二维连续型随机向量的条件分布

定义　在 $X=x$ 条件下 Y 的条件分布函数定义为

$$
\begin{aligned}
F_{Y|X}(y|x) &= P\{Y \leqslant y|X=x\} \\
&= \lim_{h\to 0} P\{Y \leqslant y|x \leqslant X \leqslant x+h\}
\end{aligned}
$$

二维连续型随机向量的条件分布

定义　在 $X=x$ 条件下 Y 的条件分布函数定义为

$$F_{Y|X}(y|x) = P\{Y \leqslant y|X=x\}$$
$$= \lim_{h\to 0} P\{Y \leqslant y|x \leqslant X \leqslant x+h\}$$

定理　若 $f(\cdot,\cdot)$ 在点 (x,y) 处连续，$f_X(\cdot)$ 在点 x 处连续，且 $f_X(x)>0$，则

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(t|x)\,\mathrm{d}t.$$

二维连续型随机向量的条件分布

例 6　设 (X, Y) 服从单位圆域

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

上的均匀分布．求 X 和 Y 的条件概率密度．

二维连续型随机向量的条件分布

例 7　设店主在每日开门营业时放在柜台上的货物量为 Y，当日销售量为 X，假定一天中不再往柜台上补充货物，于是 $X \leqslant Y$. 根据历史资料，(X, Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{200} & 0\leqslant x\leqslant y, 0\leqslant y\leqslant 20\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

(1) 求给定 $Y=y$ 条件下，X 的条件概率密度；

(2) 分别求 $Y=10, 20$ 时，$X\leqslant 5$ 的概率.

二维连续型随机向量的条件分布

练习 6　设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Y=y$ 时 X 的条件概率密度，及 $P\left\{X\leqslant \frac{1}{2}\middle|Y=\frac{1}{2}\right\}$.

第三节	二维连续型随机向量
A	连续型 · 联合分布
B	连续型 · 边缘分布
C	连续型 · 条件分布
D	连续型 · 独立性
E	二维正态分布

随机向量的独立性

定义 设二维随机向量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$ 边缘分布分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，若对任意实数 x, y 有

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

则称 X, Y 相互独立.

随机向量的独立性

定义　设二维随机向量 (X, Y) 的联合分布函数为 $F(x, y)$，边缘分布分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，若对任意实数 x, y 有

$$F(x, y) = F_X(x) \cdot F_Y(y),$$

则称 X, Y 相互独立.

X, Y 相互独立即是指对任意实数 x, y，事件 $\{X \leqslant x\}$ 与 $\{Y \leqslant y\}$ 相互独立.

连续型随机向量的独立性

若 (X,Y) 是连续型随机向量，则 X,Y 相互独立的充要条件为：对所有实数 x,y，有

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

连续型随机向量的独立性

例 8 设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} 9x^2y^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

判断 X 与 Y 是否相互独立.

连续型随机向量的独立性

练习 8 设 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

判断 X 与 Y 是否相互独立.

连续型随机向量的独立性

练习 9　设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-(x+y)} & x,y>0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

判断 X 与 Y 是否相互独立.

连续型随机向量的独立性

练习 10　设 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0\leqslant x\leqslant y \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

判断 X 与 Y 是否相互独立.

第三节	二维连续型随机向量
A	连续型 · 联合分布
B	连续型 · 边缘分布
C	连续型 · 条件分布
D	连续型 · 独立性
E	二维正态分布

二维正态分布 · 联合分布

定义 5　以下面函数为密度的分布称为二维正态分布，简记为 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\},$$

其中 μ_1,μ_2 为实数，$\sigma_1,\sigma_2>0$，$|\rho|<1$.

例 9　设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求 X 和 Y 的边缘概率密度.

例 9　设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求 X 和 Y 的边缘概率密度.

答案　$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

二维正态分布 · 边缘分布

例 9　设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求 X 和 Y 的边缘概率密度.

答案　$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

注记　(1) 由联合概率密度可唯一确定边缘概率密度.

(2) 仅由边缘概率密度一般不能得到联合概率密度.

二维正态分布 · 条件分布

例 10　设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

二维正态分布 · 条件分布

例 10　设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

结论：

1. 二维正态分布的条件分布是一维正态分布；
2. $X=x$ 时 Y 的条件分布为

$$N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

二维正态分布 · 独立性

例 11 设 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$，则 X 与 Y 相互独立的充要条件为 $\rho = 0$.

第四节	随机向量函数的分布
A	离散型随机向量函数
B	连续型随机向量函数

离散型随机向量的函数的分布

设离散型随机向量 (X,Y) 的联合分布为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots$$

令 $Z=g(X,Y)$，则 Z 也是一个离散型随机变量，其分布可按如下步骤求得

1. 根据函数关系列出 Z 的所有可能值；
2. 对 Z 的每个可能值 z，$P\{Z=z\}$ 等于所有满足 $g(x_i,y_j)=z$ 的 p_{ij} 之和.

离散型随机向量的函数的分布

例 1 二维随机向量 (X, Y) 服从以下分布律

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(1) 求 $Z = X + Y$ 的分布；

离散型随机向量的函数的分布

例 1　二维随机向量 (X,Y) 服从以下分布律

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
0	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

(1)　求 $Z=X+Y$ 的分布;

(2)　求 $U=\max\{X,Y\}, V=\min\{X,Y\}$ 的分布.

离散型随机向量的函数的分布

练习 1　二维随机向量 (X, Y) 服从以下分布律

$X \backslash Y$	-2	0	3
1	0.1	0.3	0.1
2	0.2	0.1	0.2

(1)　求 $Z = X + Y$ 的分布；

离散型随机向量的函数的分布

练习 1　二维随机向量 (X, Y) 服从以下分布律

$X \backslash Y$	-2	0	3
1	0.1	0.3	0.1
2	0.2	0.1	0.2

(1) 求 $Z = X + Y$ 的分布;

(2) 求 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$ 的分布.

第四节	随机向量函数的分布
A	离散型随机向量函数
B	连续型随机向量函数

连续型随机向量的函数的分布

对连续型随机向量 (X, Y)，求 $Z = g(X, Y)$ 的密度函数的基本方法是

1. 根据函数关系先求 Z 的分布函数

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{g(X, Y) \le z\}$$

2. 然后对 $F_Z(z)$ 求导可得 Z 的概率密度.

$Z = X + Y$ 的分布

设连续型随机向量 (X, Y) 的联合密度函数为 $f(x, y)$，则 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y)\,\mathrm{d}y.$$

$Z = X + Y$ 的分布

如果 X 与 Y 相互独立，概率密度分别为 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$，则 $Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y.$$

上述公式称为卷积公式.

$Z = X + Y$ 的分布

例 2　设某种商品在一周内的需要量是一个随机变量，其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

如果各周的需要量相互独立，求两周需要量的概率密度函数.

$Z = X + Y$ 的分布

例 2　设某种商品在一周内的需要量是一个随机变量，其概率密度函数为

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

如果各周的需要量相互独立，求两周需要量的概率密度函数.

解答　$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z^3}{6}e^{-z}, & z > 0 \\ 0, & z \leqslant 0 \end{cases}.$$

正态分布的和

例 3　设 X 与 Y 相互独立，均服从标准正态分布，求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

正态分布的和

例 3　设 X 与 Y 相互独立，均服从标准正态分布，求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

定理 1　若 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 X 与 Y 相互独立，则

$$Z=X+Y\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2).$$

$\max\{X, Y\}$ 和 $\min\{X, Y\}$ 的分布

设随机向量 X 与 Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$.

$\max\{X,Y\}$ 和 $\min\{X,Y\}$ 的分布

设随机向量 X 与 Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$.

设 $Z = \max\{X,Y\}$ 的分布函数为 $F_{\max}(z)$，则有

$$F_{\max}(z) = F_X(z)F_Y(z).$$

$\max\{X,Y\}$ 和 $\min\{X,Y\}$ 的分布

设随机向量 X 与 Y 相互独立，其分布函数分别为 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$.

设 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布函数为 $F_{\max}(z)$，则有

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z).$$

设 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为 $F_{\min}(z)$，则有

$$\begin{aligned}F_{\min}(z)&=F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z)F_Y(z)\\&=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].\end{aligned}$$

$\max\{X, Y\}$ 和 $\min\{X, Y\}$ 的分布

例 4　系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1，L_2 组成，联接方式分别为：(1) 串联；(2) 并联.

设 L_1，L_2 的寿命分别为 X 和 Y，概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \beta e^{-\beta y} & y > 0 \\ 0 & y \leqslant 0 \end{cases}$$

分别对以上两种联接方式写出系统寿命 Z 的概率密度.

复习与提高

选择　设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $P\{X+Y \leqslant 0\} = \frac{1}{2}$　　(B) $P\{X+Y \leqslant 1\} = \frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y \leqslant 0\} = \frac{1}{2}$　　(D) $P\{X-Y \leqslant 1\} = \frac{1}{2}$

n 维随机向量

定义　设 Ω 是某随机试验的样本空间，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是该空间上的随机变量，称

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

为 Ω 上的或 n 维随机向量.

n 维随机向量

定义　设 $\vec{X} = (X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 n 维随机向量，称 n 元函数

$$F(\vec{x}) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

为 $\vec{X}$ 的联合分布函数，其中

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

n 维连续型随机向量

定义 设 $\vec{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为 n 维随机向量，如果存在非负函数 $f(\vec{x})$，使得对任意的 $\vec{x}$ 有

$$F(\vec{x})=\int_{-\infty}^{x_n}\cdots\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_1}f(\vec{u})\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n$$

则称 $\vec{X}$ 为 n 维连续型随机向量，$f(\vec{x})$ 称为 $\vec{X}$ 的概率密度函数.

n 维随机向量

定义　设 $\vec{X}$ 的联合分布函数为 $F(\vec{x})$，边缘分布分别为 $F_{X_i}(x_i), i = 1, 2, \cdots, n$，若对任意实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

$$F(\vec{x}) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n),$$

则称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立.

n 维随机向量

性质 若 $\vec{X}$ 是连续型随机向量，概率密度函数为 $f(\vec{x})$，边缘概率密度分别为 $f_{X_i}(x_i), i = 1, 2, \cdots, n$，则 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立的充要条件为：对所有的实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，有

$$f(\vec{x}) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n).$$

n 元正态分布

定理 1 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

则对不全为零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$