概率论与数理统计

第五章 · 极限定理

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

主要内容

极限定理研究大量随机变量的规律性.

主要内容

极限定理研究大量随机变量的规律性.

1. 大数定律(Law of Large Numbers)：
   大量随机变量的平均结果的稳定性.

主要内容

极限定理研究大量随机变量的规律性.

1. 大数定律(Law of Large Numbers)：
   大量随机变量的平均结果的稳定性.
2. 中心极限定理(Central Limit Theorem)：
   大量随机变量的和的稳定性.

第一节 大数定律

第二节 中心极限定理

平均结果的稳定性

引例　设 X_i 是第 i 次扔硬币的结果（$i=1,2,\cdots,n$）：

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{正面朝上;}\\ 0, & \text{正面朝下.}\end{cases}$$

$X_1,\cdots,X_n$ 相互独立．求 $Y_n=\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ 的分布．

平均结果的稳定性

引例　设 X_i 是第 i 次扔硬币的结果（$i=1,2,\cdots,n$）：

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{正面朝上;}\\ 0, & \text{正面朝下.}\end{cases}$$

$X_1,\cdots,X_n$ 相互独立．求 $Y_n=\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ 的分布．

解答　$X_1+\cdots+X_n\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$,

平均结果的稳定性

引例 设 X_i 是第 i 次扔硬币的结果（$i=1,2,\cdots,n$）：

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{正面朝上;}\\ 0, & \text{正面朝下.}\end{cases}$$

$X_1,\cdots,X_n$ 相互独立．求 $Y_n=\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ 的分布．

解答 $X_1+\cdots+X_n\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，从而

$$P\left\{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}=\frac{k}{n}\right\}=P\left\{X_1+\cdots+X_n=k\right\}$$

$$=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}=C_n^k\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

$n = 1$

Y_1	0	1
P	1/2	1/2

$n = 2$

Y_2	0	1/2	1
P	1/4	2/4	1/4

$n = 3$

Y_3	0	1/3	2/3	1
P	1/8	3/8	3/8	1/8

$n = 4$

Y_4	0	1/4	2/4	3/4	1
P	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16

$n = 5$

Y_5	0	1/5	2/5	3/5	4/5	1
P	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

第一节	大数定律
A	切比雪夫不等式
B	切比雪夫定理
C	伯努利定理

切比雪夫不等式

定理 设随机变量 X 有期望和方差，则对于任给的 $\varepsilon > 0$，有

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2},$$

即

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

切比雪夫不等式

例 1　设随机变量 X 的期望和方差分别为 μ 和 σ^2，估计以下概率

$$P(|X-\mu|<\sigma),$$

$$P(|X-\mu|<2\sigma),$$

$$P(|X-\mu|<3\sigma).$$

切比雪夫不等式

例 2　设面包店每天的面包销量 X 是平均值为 100 个，标准差为 4 个的随机变量.

(1) 估计销量在 80 到 120 个之间的概率.

(2) 进货多少个才能保证 99% 的概率足够销售？

切比雪夫不等式

例 2　设面包店每天的面包销量 X 是平均值为 100 个，标准差为 4 个的随机变量.

(1) 估计销量在 80 到 120 个之间的概率.

(2) 进货多少个才能保证 99% 的概率足够销售？

练习 1　扔硬币 1000 个，估计正面朝上的个数在 450 到 550 之间的概率.

第一节	大数定律
A	切比雪夫不等式
B	切比雪夫定理
C	伯努利定理

大数定律之一

定义　设 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一随机变量序列，如果对任何 $n > 1$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则称 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 相互独立.

大数定律之一

定义 设 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 是一随机变量序列，如果对任何 $n > 1$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则称 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 相互独立.

定理 1 (切比雪夫定理) 设随机变量序列 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 相互独立，且有相同的期望 μ 和方差 σ^2，定义 Y_n 为前 n 个随机变量的算术平均，即

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

则对任意正数 ε，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|Y_n - \mu| < \varepsilon\} = 1$.

第一节	大数定律
A	切比雪夫不等式
B	切比雪夫定理
C	伯努利定理

大数定律之二

定理 2 (伯努利定理) 在独立实验序列中，记事件 A 的概率为 p. 以 $f_n(A)$ 表示前 n 次试验中事件 A 发生的次数，则对任意正数 ε,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{f_n(A)}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

大数定律之二

定理 2 (伯努利定理) 在独立实验序列中，记事件 A 的概率为 p. 以 $f_n(A)$ 表示前 n 次试验中事件 A 发生的次数，则对任意正数 ε,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{f_n(A)}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 1.$$

注记 伯努利定理的实际意义：当重复试验次数充分大时，某事件发生的频率与该事件发生的概率有一定偏差的可能性很小.

第一节 大数定律

第二节 中心极限定理

中心极限定理

中心极限定理的主要思想：如果

1. 一个随机现象由众多的随机因素所引起，
2. 且每一因素在总的变化里所起的作用不显著，

则描述这个随机现象的随机变量近似地服从正态分布.

中心极限定理

中心极限定理的主要思想：如果

1. 一个随机现象由众多的随机因素所引起，
2. 且每一因素在总的变化里所起的作用不显著，

则描述这个随机现象的随机变量近似地服从正态分布.

例如：成年人的身高，城市的用电量.

第二节	中心极限定理
A	林德伯格—莱维定理
B	棣莫弗—拉普拉斯定理

中心极限定理之一

定理 1 (林德伯格—莱维定理) 若 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 独立且同分布，$E(X_i)=\mu$，$\mathrm{Var}(X_i)=\sigma^2>0$，令

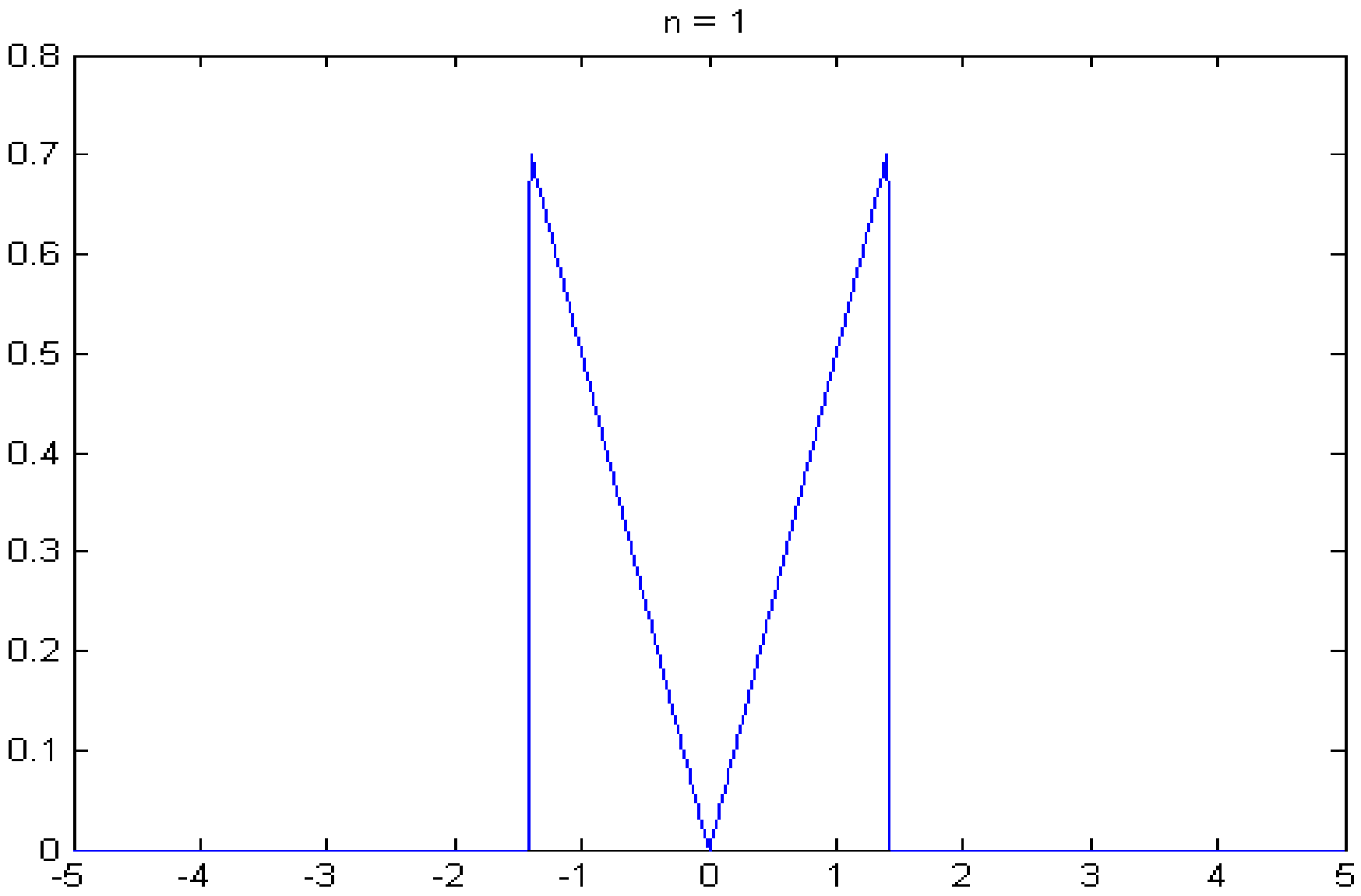
$$Z_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

则其分布函数 $F_n(x)$ 收敛到 $\Phi(x)$，即对任何实数 x，

$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=\lim_{n\to\infty}P\{Z_n\leqslant x\}=\Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的分布函数，

中心极限定理演示



中心极限定理之一

例 1　已知产品的长度服从期望为 14、方差为 4 的分布．求 100 件产品的平均长度超过 14.5 的概率.

中心极限定理之一

例 2　计算机进行加法计算时，把每个加数四舍五入变为整数来计算．设所有的取整误差是相互独立的随机变量，并且都服从区间 $[-0.5, 0.5)$ 上的均匀分布．若独立进行了 300 次实数加法运算，求所有舍入误差的总和的绝对值小于 10 的概率．

中心极限定理之一

练习 1　一个螺丝钉的重量是一个随机变量，期望值是 10 克，标准差是 1 克，求一盒 (100 个) 同型号螺丝钉的重量超过 1020 克的概率.

第二节	中心极限定理
A	林德伯格—莱维定理
B	棣莫弗—拉普拉斯定理

中心极限定理之二

设在某试验中事件 A 发生的概率为 p，将该试验独立地进行 n 次．记 X 为 n 次试验中事件 A 发生的总次数，X_i 为第 i 次试验中事件 A 发生的次数，则

$$X \sim B(n,p),$$

$$X_i \sim B(1,p), i = 1, 2, \cdots, n,$$

且

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

中心极限定理之二

定理 2 (棣莫弗—拉普拉斯定理) 设随机变量 X 服从参数为 n, p 的二项分布，即 $X \sim B(n, p)$，则当 n 充分大时，X 近似服从正态分布，即可以近似认为

$$\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0, 1).$$

中心极限定理之二

例 3　某公司有 200 名员工参加一种资格证书考试. 按往年经验，该考试的通过率为 0.8. 试计算这 200 名员工至少有 150 人考试通过的概率.

中心极限定理之二

例 3　某公司有 200 名员工参加一种资格证书考试. 按往年经验，该考试的通过率为 0.8. 试计算这 200 名员工至少有 150 人考试通过的概率.

解答　$\Phi(1.77) = 0.9616.$

中心极限定理之二

例 4　某市保险公司开办一年人身保险业务，被保人每年需交付保费 160 元．若一年内发生重大人身事故，其本人或家属可获 2 万元赔付．已知该市人员一年内发生重大人身事故的概率为 0.005，现有 5000 人参加此项保险．问保险公司一年内从此项业务所得到的总收益在 20 万元到 40 万元之间的概率是多少？

中心极限定理之二

练习 2　产品为废品的概率为 $p = 0.005$，求 10000 件产品中废品数不大于 70 的概率.

中心极限定理之二

练习 3　设电站供电网有 10000 盏电灯，假设夜晚每一盏灯开灯概率都是 0.7，而且各盏灯的开关时间彼此独立，试估计夜晚同时开着的灯数在 6900 到 7100 之间的概率.

(1) 用切比雪夫不等式估计.

(2) 用中心极限定理估计.

复习与提高

选择 (2002)　设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，则根据林德伯格—莱维中心极限定理，当 n 充分大时，Y_n 近似服从正态分布，只要 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ ……(　　)

(A) 有相同的数学期望　　(B) 有相同的方差

(C) 服从同一指数分布　　(D) 服从同一离散型分布

复习与提高

复习 1　扔硬币 100 个，估计正面朝上的个数在 40 到 60 之间的概率.

(1) 用切比雪夫不等式估计.

(2) 用中心极限定理估计.