概率论与数理统计

第七章 · 参数估计

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

基本概念

问题提出：为什么要进行参数估计？

基本概念

问题提出：为什么要进行参数估计？

在实际问题中，总体分布一般是未知的，我们常常事先假定总体分布的类型，再通过取样的方式估计分布中的未知参数.

基本概念

例 1　考察某随机试验中事件 A 发生的概率．在一次试验中事件 A 发生的次数服从参数为 p 的两点分布．这里 p 需要通过样本进行估计．

基本概念

例 1　考察某随机试验中事件 A 发生的概率. 在一次试验中事件 A 发生的次数服从参数为 p 的两点分布. 这里 p 需要通过样本进行估计.

例 2　一般假定一个城市在单位时间内发生交通事故的次数服从泊松分布 $P(\lambda)$, 这里的参数 λ 需要通过观察取样来给出.

基本概念

例 3　假定某种电子元件的寿命服从参数为 λ 的指数分布，这里 λ 为待定参数.

基本概念

例 3　假定某种电子元件的寿命服从参数为 λ 的指数分布，这里 λ 为待定参数.

例 4　假定某城市居民的收入服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，这里 μ 和 σ^2 的具体值都需要取样估计.

基本概念

例 5　假定中国 20-30 岁人群的身高、体重服从二维正态分布

$$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho),$$

分布中 5 个参数都需要通过抽取样本然后用统计量近似估计.

矩估计

矩估计是基于“替换”的思想给出的一种参数估计方法．最早由英国统计学家皮尔逊 (K. Pearson) 提出.

矩估计

矩估计是基于“替换”的思想给出的一种参数估计方法．最早由英国统计学家皮尔逊 (K. Pearson) 提出.

基本思想：用同类、同阶的样本矩来估计总体矩.

矩估计

对总体 X，其 m 阶原点矩为

$$\alpha_m := E(X^m).$$

矩估计

对总体 X，其 m 阶原点矩为

$$\alpha_m := E(X^m).$$

对样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，其 m 阶样本原点矩为

$$A_m := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^m = \frac{X_1^m + X_2^m + \cdots + X_n^m}{n}.$$

矩估计

矩估计的理论基础：因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的，故 $X_1^m, X_2^m, \cdots, X_n^m$ 也是独立同分布的，且

$$E(X_1^m) = E(X_2^m) = \cdots = E(X_n^m) = \alpha_m.$$

矩估计

矩估计的理论基础：因为 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是独立同分布的，故 $X_1^m, X_2^m, \cdots, X_n^m$ 也是独立同分布的，且

$$E(X_1^m) = E(X_2^m) = \cdots = E(X_n^m) = \alpha_m.$$

由大数定律知，当 n 趋于无穷时，

$$A_m = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^m \xrightarrow{P} \alpha_m.$$

矩估计

矩估计：设总体分布中有 k 个待定参数

$$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k.$$

总体 X 的 m 阶原点矩为 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的函数，记为

$$\alpha_m = \alpha_m(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k).$$

矩估计

矩估计（续）：令总体的前 k 阶原点矩分别与同阶的样本原点矩相等，这样就得到了一个 k 元方程组

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = A_1 \\ \alpha_2(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = A_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_k(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k) = A_k \end{cases}$$

矩估计

矩估计（续）：令总体的前 k 阶原点矩分别与同阶的样本原点矩相等，这样就得到了一个 k 元方程组

$$\begin{cases} \alpha_1(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_1 \\ \alpha_2(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_k(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=A_k \end{cases}$$

记方程组的解为 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k$，用它们作为参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的估计量．这样的估计称为矩估计.

矩估计

例子　当总体中只有一个参数时，矩估计即是用样本均值估计总体期望.

矩估计

例子　当总体中只有一个参数时，矩估计即是用样本均值估计总体期望.

例 1　在对事件 A 进行 n 次独立重复观测中，得到记录 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，其中 X_i 表示第 i 次试验中事件 A 发生的次数．试估计事件 A 发生的概率 p.

矩估计

例 2　设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的随机样本，求 λ 的矩估计.

矩估计

例 2　设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布 $P(\lambda)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的随机样本，求 λ 的矩估计.

例 3　设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布 $EP(\lambda)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的随机样本，求 λ 的矩估计.

矩估计

例子　当总体中有两个或以上的参数时，总体期望与方差的矩估计分别为

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

矩估计

例子　当总体中有两个或以上的参数时，总体期望与方差的矩估计分别为

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

例 4　对正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$，两个参数的矩估计即为上式.

矩估计

例 5　对区间 $[a,b]$ 上的均匀分布总体 X，求 a 和 b 的矩估计.

矩估计

例 6　设总体 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta \in (0,1)$．利用 X 的一组样本值 $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, -1)$，求 θ 的矩估计．

矩估计

例 6　设总体 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta \in (0,1)$．利用 X 的一组样本值 $(x_1,x_2,x_3) = (-1,0,-1)$，求 θ 的矩估计． $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\hat{\theta} = \frac{5}{6}$

矩估计

例 6　设总体 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta \in (0,1)$. 利用 X 的一组样本值 $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, -1)$, 求 θ 的矩估计. ················ $\hat{\theta} = \frac{5}{6}$

即我们估计出来的总体分布为

X	-1	0	1
P	$25/36$	$10/36$	$1/36$

矩估计

练习 1　设总体 X 的分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{\theta}{2}$	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$

其中 $\theta \in (0,1)$. 现抽取 4 个样本观察得

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3.$$

求 θ 的矩估计.

矩估计

矩估计的优点

1. 思路直观，简单易行
2. 不需要事先知道总体是什么分布

矩估计

矩估计的优点

1. 思路直观，简单易行
2. 不需要事先知道总体是什么分布

矩估计的缺点

1. 矩的选取比较随意，在选取不同的组合时，得到的估计量也不同
2. 当总体的分布类型已知时，未充分利用分布所提供的信息.

第一节 点估计之矩估计

第二节 点估计之极大似然估计

第三节 估计量的优良性准则

第四节 单个正态总体的区间估计

第五节 两个正态总体的区间估计

极大似然估计

思路：样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 经具体抽样所得的观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 应当是最可能出现的数值.

极大似然估计

思路：样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 经具体抽样所得的观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 应当是最可能出现的数值.

方法：在已知分布类型的情况下，求参数使得事件

$$\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$

对应的概率（离散型）或者概率密度（连续型）达到最大值.

极大似然估计

定义 1　设 X 为离散型随机变量，称函数

$$f(x) = P\{X = x\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

为 X 的概率函数.

极大似然估计

定义 1　设 X 为离散型随机变量，称函数

$$f(x) = P\{X = x\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

为 X 的概率函数.

若离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots$$

则其概率函数为

$$f(x) = \begin{cases} p_i, & x = x_i, \text{ 对某个 } i, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

极大似然估计

设离散型总体 X 的概率函数为 $f(x)$，则事件

$$\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$

对应的概率为

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n).$$

极大似然估计

设连续型总体 X 的概率密度函数为 $f(x)$，则事件

$$\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$

对应的联合概率密度为

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n).$$

极大似然估计

定义 设连续型（离散型）总体 X 的概率密度函数（概率函数）为

$$f(x;\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k).$$

则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 在观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 处的联合概率密度（概率）为

$$L(x_1, \cdots, x_n;\ \theta_1, \cdots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta_1, \cdots, \theta_k).$$

极大似然估计

定义　设连续型（离散型）总体 X 的概率密度函数（概率函数）为

$$f(x;\ \theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k).$$

则样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 在观测值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 处的联合概率密度（概率）为

$$L(x_1,\cdots,x_n;\ \theta_1,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\ \theta_1,\cdots,\theta_k).$$

将观测值 $x_1,\cdots,x_n$ 看成固定的，将 L 看做 $\theta_1,\cdots,\theta_k$ 的函数，则该函数被称为似然函数.

极大似然估计

参数的选择：哪一组参数值使得现有的样本观测值出现的可能性最大，哪一组参数就与观察结果最匹配的参数.

极大似然估计

参数的选择：哪一组参数值使得现有的样本观测值出现的可能性最大，哪一组参数就与观察结果最匹配的参数.

定义　如果似然函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$

在

$$(\theta_1^*, \theta_2^*, \cdots, \theta_k^*)$$

处达到最大值，则称上述参数为未知参数的极大似然估计.

极大似然估计

求似然函数最大值点的方法：

1. 若函数可微，则其在最大值点处的导数（偏导数）为零；
2. 由于 $\ln L$ 与 L 同时达到最大值，且在实际应用中常常比 L 更方便求导，故一般将问题化为求 $\ln L$ 的最大值点.

极大似然估计

求极大似然估计的一般方法:

1. 写出似然函数 L;
2. 求似然函数的对数 $\ln L$;
3. 对 $\ln L$ 求导（偏导）并令导数等于零，得到似然方程组;
4. 解方程组得到 $\ln L$ 的驻点，判断该驻点是否最大值点.

极大似然估计

例 1　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是抽自总体 $B(1,p)$ 的一个随机样本，求参数 p 的极大似然估计.

极大似然估计

例 1　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是抽自总体 $B(1,p)$ 的一个随机样本，求参数 p 的极大似然估计.

解答　由于 $B(1,p)$ 是二项分布的特殊情形，得到的概率函数为 $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$.

极大似然估计

例 1　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是抽自总体 $B(1,p)$ 的一个随机样本，求参数 p 的极大似然估计.

解答　由于 $B(1,p)$ 是二项分布的特殊情形，得到的概率函数为 $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$.

结论　频率是概率的极大似然估计.

极大似然估计

例 2　设总体 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，求 λ 的极大似然估计.

极大似然估计

例 2　设总体 X 服从泊松分布 $P(\lambda)$，求 λ 的极大似然估计.

结论　样本均值是泊松分布的参数的极大似然估计.

例 3　求正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的参数 μ 和 σ^2 的极大似然估计（注意我们把 σ^2 看作一个参数）.

极大似然估计

例 3　求正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的参数 μ 和 σ^2 的极大似然估计（注意我们把 σ^2 看作一个参数）.

结论　$\mu^* = \overline{X}, \quad {\sigma^2}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$

极大似然估计

例 4　设总体 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta \in (0,1)$. 利用 X 的一组样本值 $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, -1)$, 求 θ 的极大似然估计.

极大似然估计

例 4　设总体 X 的分布律为

X	-1	0	1
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 $\theta \in (0,1)$. 利用 X 的一组样本值 $(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, -1)$, 求 θ 的极大似然估计. $\cdots\cdots\cdots\theta^* = \frac{5}{6}$

极大似然估计

练习 1　设总体 X 的分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{\theta}{2}$	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$

其中 $\theta \in (0,1)$. 现抽取 4 个样本观察得

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3.$$

求 θ 的极大似然估计.

极大似然估计

练习 2　设总体 X 的密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{otherwise}\end{cases}$$

其中 $\theta>0$. 求 θ 的矩估计和极大似然估计.

极大似然估计

如果似然函数不可导，则只能用定义求极大似然估计.

例 5　设总体 X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布，求 a,b 的极大似然估计.

无偏性

假设 θ 为总体分布的参数，设

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

是 θ 的一个估计．如果对 θ 的一切可能取值，都有

$$E(\hat{\theta}) = \theta,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计(unbiased estimator).

无偏性

例 1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为抽自均值为 μ 的总体的样本，以下三个估计量都是 μ 的无偏估计：

$$\hat{\mu}_1 = X_1, \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2},$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_{n-1} + X_n}{4} \quad (\text{当 } n \geq 4 \text{ 时}).$$

无偏性

例 1　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为抽自均值为 μ 的总体的样本，以下三个估计量都是 μ 的无偏估计：

$$\hat{\mu}_1 = X_1, \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2},$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_{n-1} + X_n}{4} \quad (\text{当 } n \geq 4 \text{ 时}).$$

而以下两个估计量都不是 μ 的无偏估计：

$$\hat{\mu}_4 = 2X_1, \qquad \hat{\mu}_5 = \frac{X_1 + X_2}{3}.$$

无偏性

定理 1　设总体 X 的期望和方差分别为

$$E(X)=\mu, \qquad \mathrm{Var}(X)=\sigma^2.$$

从总体取一组样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，则样本均值 $\overline{X}$ 与样本方差 S^2 分别是 μ 和 σ^2 的无偏估计，即

$$E(\overline{X})=\mu, \qquad E(S^2)=\sigma^2.$$

无偏性

作为对比，估计量

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

不是总体方差的无偏估计.

无偏性

说明：如果 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的一个估计，我们通常用 $g(\hat{\theta})$ 去估计 $g(\theta)$．但是，即使 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$g(\hat{\theta})$ 也不一定是 $g(\theta)$ 的无偏估计.

无偏性

说明：如果 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的一个估计，我们通常用 $g(\hat{\theta})$ 去估计 $g(\theta)$．但是，即使 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计，$g(\hat{\theta})$ 也不一定是 $g(\theta)$ 的无偏估计.

例 2　样本标准差 S 不是总体标准差 σ 的无偏估计.

均方误差准则

定义 1　设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的估计量，称

$$MSE(\hat{\theta}) := E[(\hat{\theta} - \theta)^2]$$

为 $\hat{\theta}$ 的均方误差(mean squared error).

均方误差准则

均方误差满足以下等式

$$MSE(\hat{\theta}) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta}) - \theta]^2.$$

当 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量时，有

$$MSE(\hat{\theta}) = \mathrm{Var}(\hat{\theta}).$$

均方误差准则

估计量的比较：在估计量的选取中，

1. 无偏估计量优于有偏估计量；
2. 在无偏估计量中，方差越小的越好.

均方误差准则

例 3　设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为抽自均值为 μ 的总体，考虑 μ 的如下两个估计的优劣：

$$\hat{\mu} = \overline{X},$$

$$\hat{\mu}_{(-i)} = \frac{1}{n-1} \sum_{j \neq i} X_j.$$

这里 $\hat{\mu}_{(-i)}$ 表示去掉第 i 个样本后，对其余 $n-1$ 个样本所求的样本均值.

均方误差准则

结论　在总体期望的所有线性无偏估计中，样本均值是唯一的最小方差估计量.

均方误差准则

结论 在总体期望的所有线性无偏估计中，样本均值是唯一的最小方差估计量.

即若总体期望为 μ，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体中抽取的样本，对估计量

$$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i, \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i = 1\right),$$

总有

$$\mathrm{Var}(\hat{\mu}) \geqslant \mathrm{Var}(\overline{X}),$$

且等号成立当且仅当 $\hat{\mu} = \overline{X}$.

复习与提高

选择　下列各个结论中错误的是 . . . . (　　)

(A) 样本均值是总体期望的无偏估计

(B) 样本方差是总体方差的无偏估计

(C) 样本均值是正态分布的期望的极大似然估计

(D) 样本方差是正态分布的方差的极大似然估计

第一节	点估计之矩估计
第二节	点估计之极大似然估计
第三节	估计量的优良性准则
第四节	**单个正态总体的区间估计**
第五节	两个正态总体的区间估计

区间估计

定义 1　设 θ 为总体的待估参数，常数 $\alpha \in (0,1)$，若有两个统计量 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$，使得

$$P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha.$$

则称 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 为 θ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间.

区间估计

定义 1 设 θ 为总体的待估参数，常数 $\alpha \in (0,1)$，若有两个统计量 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$，使得

$$P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha.$$

则称 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 为 θ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间.

对给定的置信系数 $1-\alpha$，根据样本观测值确定未知参数 θ 的置信区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$，称为对参数 θ 的区间估计.

第四节	单个正态总体的区间估计
A	总体期望的区间估计
B	总体方差的区间估计

总体期望的区间估计 1

情形一：正态总体、方差已知

总体期望的区间估计 1

情形一：正态总体、方差已知

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其中 σ^2 已知．则总体期望 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot Z_{\alpha/2}\right).$$

总体期望的区间估计 1

例 1　某厂生产零件长度 X 服从正态分布 $N(\mu, 0.04)$，现从该厂生产的零件中随机抽取 6 个，其长度的测量值如下（单位：毫米）

$$14.6,\ 15.1,\ 14.9,\ 14.8,\ 15.2,\ 15.1.$$

求参数 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间.

总体期望的区间估计 1

例 1　某厂生产零件长度 X 服从正态分布 $N(\mu, 0.04)$, 现从该厂生产的零件中随机抽取 6 个，其长度的测量值如下（单位：毫米）

$$14.6,\ 15.1,\ 14.9,\ 14.8,\ 15.2,\ 15.1.$$

求参数 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间.

解答　$\overline{X} = 14.95$，置信区间为 $(14.79, 15.11)$.

总体期望的区间估计 2

情形二：正态总体、方差未知

总体期望的区间估计 2

情形二：正态总体、方差未知

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，其中 σ^2 未知．则总体期望 μ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right),\overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}\cdot t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

总体期望的区间估计 2

例 2　设某生产线封装的袋装米重量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 从产品中抽取 10 件，得测量值（单位：千克）如下

$$10.1,\ 10.0,\ 9.8,\ 10.5,\ 9.7,$$
$$10.1,\ 9.9,\ 10.2,\ 10.3,\ 9.9.$$

求参数 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间.

总体期望的区间估计 2

例 2　设某生产线封装的袋装米重量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 从产品中抽取 10 件，得测量值（单位：千克）如下

$$
\begin{array}{ccccc}
10.1, & 10.0, & 9.8, & 10.5, & 9.7, \\
10.1, & 9.9, & 10.2, & 10.3, & 9.9.
\end{array}
$$

求参数 μ 的置信系数为 0.95 的置信区间.

解答　$\alpha = 0.05$，$\overline{X} = 10.05$，$S^2 = 0.0583$，$S = 0.24$，置信区间为 $(9.87, 10.22)$.

总体期望的区间估计

练习 1　设初生男婴体重服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$．随机抽取 16 名男婴测其体重，得样本平均值为 $\overline{X}=3057$（单位：克）．试以 0.98 的置信系数估计初生男婴的平均体重 μ．

(1) 已知男婴体重的标准差 $\sigma=380$．

(2) 已知男婴体重的样本标准差 $S=380$．

第四节	单个正态总体的区间估计
A	总体期望的区间估计
B	总体方差的区间估计

总体方差的区间估计

设 $X_1,\cdots,X_n$ 是取自正态总体的样本，则总体方差 σ^2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}\right).$$

总体方差的区间估计

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是取自正态总体的样本，则总体方差 σ^2 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})} \right).$$

注记　总体标准差 σ 的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}} \right).$$

总体方差的区间估计

例 4 设某生产线封装的袋装米重量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 从产品中抽取 10 件，得测量值（单位：千克）如下

$$
\begin{array}{ccccc}
10.1, & 10.0, & 9.8, & 10.5, & 9.7, \\
10.1, & 9.9, & 10.2, & 10.3, & 9.9.
\end{array}
$$

求 σ^2 的置信系数为 0.95 的置信区间.

总体方差的区间估计

例 4　设某生产线封装的袋装米重量服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 从产品中抽取 10 件，得测量值（单位：千克）如下

$$\begin{array}{ccccc} 10.1, & 10.0, & 9.8, & 10.5, & 9.7, \\ 10.1, & 9.9, & 10.2, & 10.3, & 9.9. \end{array}$$

求 σ^2 的置信系数为 0.95 的置信区间.

解答　$S^2 = 0.0583$，置信区间为 $(0.028, 0.194)$.

总体方差的区间估计

练习 2　假设初一女生的身高服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$，随机抽取 6 名初一女生测其身高如下（单位：厘米）：

$$154,\quad 152,\quad 155,\quad 156,\quad 154,\quad 153.$$

试以 0.9 的置信系数求身高的方差 σ^2 的置信区间：

第一节	点估计之矩估计
第二节	点估计之极大似然估计
第三节	估计量的优良性准则
第四节	单个正态总体的区间估计
第五节	两个正态总体的区间估计

两个正态总体的期望差的区间估计

在实际问题中，经常会遇到两个正态总体的比较问题．如考察新技术对提高产品的某项质量指标的作用，设实施新技术前的产品质量指标服从正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$，实施新技术后产品质量指标服从正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$．为比较前后阶段产品质量指标的差别，需要对 $\mu_1 - \mu_2$ 进行估计.

两个正态总体的期望差的区间估计

在本节中，我们始终假设两样本相互独立，其中

- 样本 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 取自正态总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$
- 样本 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 取自正态总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- 样本均值分别为 $\overline{X}$ 和 $\overline{Y}$
- 样本方差分别为 S_1^2 和 S_2^2

$$S_1^2 := \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2, \quad S_2^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \overline{Y})^2.$$

两个正态总体的期望差的区间估计

在上述假设下，我们有

$$(1)\ Z=\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{m}+\dfrac{\sigma_2^2}{n}}}\sim N(0,1).$$

两个正态总体的期望差的区间估计

在上述假设下，我们有

$$(1)\ Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1).$$

若进一步假设 $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$，则

$$(2)\ T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t_{m+n-2}.$$

两个正态总体的期望差的区间估计

情形一：两个正态总体，方差已知

两个正态总体的期望差的区间估计

情形一：两个正态总体，方差已知

设两个总体的方差 σ_1^2 与 σ_2^2 均已知，则总体期望的差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\cdot Z_{\alpha/2},\ \overline{X}-\overline{Y}+\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\cdot Z_{\alpha/2}\right)$$

两个正态总体的期望差的区间估计

例 1　比较棉花品种优劣．假设用甲、乙两种棉花纺出的棉纱强度分别为

$$X \sim N(\mu_1, 2.18^2), \qquad Y \sim N(\mu_2, 1.76^2)$$

试验者从这两种棉纱中分别抽取 200 个和 100 个样本，其均值分别为

$$\overline{X} = 5.32, \qquad \overline{Y} = 5.76.$$

试给出 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信系数为 95% 的置信区间.

两个正态总体的期望差的区间估计

例 1　比较棉花品种优劣．假设用甲、乙两种棉花纺出的棉纱强度分别为

$$X \sim N(\mu_1, 2.18^2), \qquad Y \sim N(\mu_2, 1.76^2)$$

试验者从这两种棉纱中分别抽取 200 个和 100 个样本，其均值分别为

$$\overline{X} = 5.32, \qquad \overline{Y} = 5.76.$$

试给出 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信系数为 95% 的置信区间.

解答　置信区间为 $(-0.899, 0.019)$.

两个正态总体的期望差的区间估计

情形二：两个正态总体，方差未知，但相等

两个正态总体的期望差的区间估计

情形二：两个正态总体，方差未知，但相等

设两个总体的方差未知，但知道它们相等，则总体期望的差 $\mu_1-\mu_2$ 的置信系数为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}-S\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\cdot t_{m+n-2}(\alpha/2),\right.$$

$$\left.\overline{X}-\overline{Y}+S\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\cdot t_{m+n-2}(\alpha/2)\right),$$

其中 $S=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}.$

两个正态总体的期望差的区间估计

例 2　某公司利用两条自动化流水线灌装矿泉水．设这两条流水线所装矿泉水的体积（单位：毫升）均服从正态分布，且方差相等．现从生产线上分别抽取 12 个和 17 个样本，算得样本均值与样本方差分别为：

$$\overline{X}=501.1,\ S_1^2=2.4,\quad \overline{Y}=499.7,\ S_2^2=4.7.$$

求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信系数为 95% 的置信区间.

两个正态总体的期望差的区间估计

例 2　某公司利用两条自动化流水线灌装矿泉水．设这两条流水线所装矿泉水的体积（单位：毫升）均服从正态分布，且方差相等．现从生产线上分别抽取 12 个和 17 个样本，算得样本均值与样本方差分别为：

$$\overline{X} = 501.1,\ \ S_1^2 = 2.4,\ \ \overline{Y} = 499.7,\ \ S_2^2 = 4.7.$$

求 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信系数为 95% 的置信区间.

解答　$t_{27}(0.025) = 2.0518$，$S^2 = 3.763$，$S = 1.94$，置信区间为 $(-0.101, 2.901)$.