概率论与数理统计复习

2020 年 2 月 12 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞(lvjr.bitbucket.io)

随机事件

主要内容：随机事件的关系与运算，概率的加法公式，古典概率模型，条件概率的定义，乘法公式，全概率公式，贝叶斯公式，随机事件的独立性.

第一章	随机事件
A	随机事件的概念
B	事件的概率
C	概率的加法法则
D	概率的乘法法则
E	事件的独立性

随机事件的关系

关系	记号	概率论含义
包含	$A \subset B$	A 发生则 B 一定发生
相等	$A = B$	A 与 B 必定同时发生
互斥	$A \cap B = \varnothing$	A 与 B 不会同时发生
对立	$A = \overline{B}$	A 与 B 有且仅有一个发生

随机事件的运算

运算	记号	概率论含义
并	$A \cup B$	A 与 B 至少一个发生
积	AB	A 与 B 都发生
差	$A - B$	A 发生但 B 不发生
补	$\overline{A}$	A 不发生

第一章	随机事件
A	随机事件的概念
B	事件的概率
C	概率的加法法则
D	概率的乘法法则
E	事件的独立性

古典概率模型

定义：如果一个随机试验具有以下特点：

1 样本空间只含有限多个样本点；

2 各样本点出现的可能性相等，

则称此随机试验是古典型的．此时对每个事件 $A \subset \Omega$，其概率

$$P(A) = \frac{\text{事件 } A \text{ 的样本点数}}{\text{样本点总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

称为事件 A 的古典概率．

第一章	随机事件
A	随机事件的概念
B	事件的概率
C	概率的加法法则
D	概率的乘法法则
E	事件的独立性

概率的可加性

概率可加性的常用公式：

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

特别地，若两个事件 A, B 互斥，则

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

概率的可加性

概率可加性的常用公式:

3 对任意事件 A，有

$$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right).$$

4 若事件 $A\subset B$，则

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

特别地，$A\subset B\Longrightarrow P(A)\leq P(B)$.

5 对任意两个事件 A,B，有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

第一章	随机事件
A	随机事件的概念
B	事件的概率
C	概率的加法法则
D	概率的乘法法则
E	事件的独立性

条件概率

定义：设 $P(B) > 0$，称

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生条件下，事件 A 的条件概率.

在古典概率模型中，

$$P(A|B) = \frac{\text{事件 } AB \text{ 包含的样本点数}}{\text{事件 } B \text{ 包含的样本点数}} = \frac{n(AB)}{n(B)}.$$

乘法公式

由条件概率的定义，如果 $P(B) > 0$，则

$$P(AB) = P(B)P(A|B)$$

类似地，如果 $P(A) > 0$，则有

$$P(AB) = P(A)P(B|A)$$

以上等式称为乘法公式.

全概率公式

定义：设 Ω 为某试验的样本空间，$B_1, B_2, \cdots$ 为一组事件．如果以下条件成立：

1. $B_1, B_2, \cdots$ 两两互斥；
2. $\cup_i B_i = \Omega$，

则称 $B_1, B_2, \cdots$ 为样本空间 Ω 的一个划分（分割），或称 $B_1, B_2, \cdots$ 为一个完备事件组．

对任意满足 $0 < P(B) < 1$ 的事件 B，B 与 $\overline{B}$ 构成一个完备事件组．

全概率公式

全概率公式：如果 $B_1, B_2, \cdots$ 构成一个完备事件组，且都有正概率，则对任意事件 A 有

$$P(A) = \sum_i P(B_i) P(A|B_i).$$

特殊情况：如果事件 B 满足 $0 < P(B) < 1$，则对事件 A，有

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}).$$

贝叶斯公式

贝叶斯定理：如果 $B_1, B_2, \cdots$ 构成一个完备事件组，且都有正概率，则对任意正概率的事件 A 有

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

第一章	随机事件
A	随机事件的概念
B	事件的概率
C	概率的加法法则
D	概率的乘法法则
E	事件的独立性

两个事件的独立性

定义：若两事件 A、B 满足

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称事件 A、B 相互独立.

实际意义：若 $P(B) > 0$，则上式等价于

$$P(A|B) = P(A),$$

即事件 A 的概率不受事件 B 发生与否的影响.

两个事件的独立性

性质：若事件 A 与 B 相互独立，则

$$\overline{A} \text{ 与 } B\text{、}A \text{ 与 } \overline{B}\text{、}\overline{A} \text{ 与 } \overline{B}$$

也是相互独立的.

本章选择题

选择　设随机事件 A, B 满足 $P(B) > 0$, $P(A|B) = 1$, 则必有$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $P(A \cup B) > P(A)$　　(B) $P(A \cup B) > P(B)$

(C) $P(A \cup B) = P(A)$　　(D) $P(A \cup B) = P(B)$

本章选择题

选择　设 A，B 是两个随机事件，且 $0 < P(A) < 1$，$P(B) > 0$，$P(B|A) = P(B|\bar{A})$．则必有 $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $P(A|B) = P(\bar{A}|B)$　　(B) $P(A|B) \neq P(\bar{A}|B)$

(C) $P(AB) = P(A)P(B)$　　(D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$

第二章	随机变量
A	随机变量的分布
B	随机变量函数的分布
C	常用离散型分布
D	常用连续型分布

随机变量的分布函数

定义：对任何随机变量 X，称函数

$$F(x) := P\{X \le x\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

为 X 的分布函数.

随机变量的分布函数

定义：对任何随机变量 X，称函数

$$F(x) := P\{X \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

为 X 的分布函数.

设 $F(x)$ 为某随机变量的分布函数，则其有以下性质：

1. 广义单增：对任意实数 $a < b$，总有 $F(a) \leq F(b)$；
2. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，且 $F(-\infty) = 0, \quad F(+\infty) = 1.$

离散型随机变量 X 的概率分布 $p_k = P\{X = x_k\}$ 满足

1. $p_k \geq 0, \quad k = 1, 2, \cdots$
2. $\sum_k p_k = 1$
3. $F(x) = \sum_{x_k \leqslant x} p_k$

连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足

1. $f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
3. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

连续型随机变量

设 X 为连续性随机变量，则对每个实数 a，总有

$$P\{X = a\} = 0.$$

连续型随机变量

设 X 为连续性随机变量，则对每个实数 a，总有

$$P\{X=a\}=0.$$

任意区间上概率的计算：由概率密度函数的定义可知，

$$P\{X\in(a,b]\}=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

上式中的区间 $(a,b]$ 改为 $(a,b),[a,b)$ 或 $[a,b]$ 后等式仍成立.

第二章	随机变量
A	随机变量的分布
B	随机变量函数的分布
C	常用离散型分布
D	常用连续型分布

离散型随机变量函数的分布

设离散型随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

令 $Y = g(X)$，则 Y 也是一个离散型随机变量，其分布可按如下步骤求得

1. 根据函数关系列出 Y 的所有可能值；
2. 对 Y 的每个可能值 y，$P\{Y = y\}$ 等于所有满足 $g(x_k) = y$ 的 p_k 之和.

连续型随机变量函数的分布

对连续型随机变量 X，求 $Y = g(X)$ 的密度函数的基本方法是

1. 根据函数关系先求 Y 的分布函数

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{g(X) \le y\}$$

2. 然后对 $F_Y(y)$ 求导可得 Y 的概率密度.

第二章	随机变量
A	随机变量的分布
B	随机变量函数的分布
C	常用离散型分布
D	常用连续型分布

离散型 · 两点分布

定义：若随机变量 X 只能取 0 或 1，其概率分布为：

$$P\{X=1\}=p,\ P\{X=0\}=1-p \quad (0<p<1)$$

则称 X 服从参数为 p 的两点分布，记为

$$X \sim B(1,p).$$

离散型 · 二项分布

定义：如果随机变量 X 服从以下分布律

$$P\{X=k\}=b(k;n,p)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

其中 $0<p<1, 0\leqslant k\leqslant n$，则称 X 服从参数为 n,p 的二项分布．记为

$$X\sim B(n,p).$$

离散型 · 泊松分布

定义：如果随机变量 X 服从以下分布律

$$P\{X=m\}=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\quad m=0,1,\cdots$$

其中 $\lambda>0$，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为

$$X\sim P(\lambda).$$

第二章	随机变量
A	随机变量的分布
B	随机变量函数的分布
C	常用离散型分布
D	常用连续型分布

连续型 · 均匀分布

定义：若随机变量 X 有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b] \\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}, \qquad (a<b)$$

则称 X 服从区间 $[a,b]$ 上的均匀分布，记为

$$X\sim U[a,b].$$

连续型 · 指数分布

定义：如果随机变量 X 有以下概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases},$$

其中 $\lambda>0$，则称 X 服从参数为 λ 的指数分布．其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}.$$

连续型 · 正态分布

定义：如果随机变量 X 有以下概率密度

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

其中 μ, σ 为常数且 $\sigma > 0$，则称 X 服从正态分布．简记为

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

称 $N(0,1)$ 为标准正态分布，并简写 $\varphi_{0,1}(x)$ 为 $\varphi(x)$.

连续型 · 正态分布

正态分布的分布函数为

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt,$$

该函数不是初等函数．标准正态分布的分布函数简记为 $\Phi(x)$.

连续型 · 正态分布

标准正态分布的分布函数的性质

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

服从正态分布随机变量的标准化：若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$$\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1).$$

本章选择题

选择　某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 p $(0 < p < 1)$，则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为…………………(　　)

(A) $3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p)^2$

本章选择题

选择　设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是……………………………………(　　)

(A) $f_1(x)f_2(x)$

(B) $2f_2(x)F_1(x)$

(C) $f_1(x)F_2(x)$

(D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

第三章	随机向量
A	随机向量的联合分布
B	随机向量的边缘分布
C	随机向量的条件分布
D	随机变量的独立性
E	随机向量函数的分布
F	常用的随机向量

二维随机向量的联合分布

定义：设 (X, Y) 为二维随机向量，称二元函数

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}$$

为 (X, Y) 的联合分布函数.

二维随机向量的联合分布

定义：设 (X, Y) 为二维随机向量，称二元函数

$$F(x, y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

为 (X, Y) 的联合分布函数.

联合分布函数的性质：

1. $F(x, y)$ 对每个自变量都是广义单增的；
2. $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$；
3. $F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = 0$，$F(+\infty, +\infty) = 1$；

二维离散型随机向量 (X,Y) 的联合概率分布 $p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}$ 满足

1. $p_{ij}\geqslant 0,\quad i=1,2,\cdots,j=1,2,\cdots$
2. $\sum\limits_i\sum\limits_j p_{ij}=1$;

二维连续型随机向量 (X,Y) 的联合概率密度 $f(x,y)$ 满足

1. $f(x,y)\geq 0,\quad \forall x,y\in\mathbb{R}$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1$;

二维连续型随机向量

二维连续型随机向量 (X, Y) 的联合分布函数

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s,$$

二维连续型随机向量

二维连续型随机向量 (X, Y) 的联合分布函数

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s,$$

若联合概率密度 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则有

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

二维连续型随机向量

二维连续型随机向量 (X, Y) 的联合分布函数

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(s,t)\,dt\,ds,$$

若联合概率密度 $f(x,y)$ 在点 (x,y) 处连续，则有

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

对任意的平面区域 D，有

$$P\{(X,Y) \in D\} = \iint_{(x,y)\in D} f(x,y)\,dx\,dy.$$

第三章	随机向量
A	随机向量的联合分布
B	随机向量的边缘分布
C	随机向量的条件分布
D	随机变量的独立性
E	随机向量函数的分布
F	常用的随机向量

边缘分布

二维随机向量 (X,Y) 作为一个整体，有联合分布函数 $F(x,y)$，其分量 X 与 Y 都是随机变量，有各自的分布函数，分别记成 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，称为 X 和 Y 的边缘分布函数.

边缘分布

二维随机向量 (X,Y) 作为一个整体，有联合分布函数 $F(x,y)$，其分量 X 与 Y 都是随机变量，有各自的分布函数，分别记成 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$，称为 X 和 Y 的边缘分布函数.

边缘分布由联合分布完全确定：

$$F_X(x) = F(x, +\infty), \qquad F_Y(y) = F(+\infty, y).$$

二维离散型随机向量 (X, Y) 的边缘概率分布为

$$p_{i\cdot} = \sum_j p_{ij}, \qquad i = 1, 2, \cdots$$

$$p_{\cdot j} = \sum_i p_{ij}, \qquad j = 1, 2, \cdots$$

二维连续型随机向量 (X, Y) 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

第三章	随机向量
A	随机向量的联合分布
B	随机向量的边缘分布
C	随机向量的条件分布
D	随机变量的独立性
E	随机向量函数的分布
F	常用的随机向量

当 $p_{\cdot j} > 0$ 时，$Y = y_j$ 时 X 的条件概率分布为

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

当 $p_{i\cdot} > 0$ 时，$X = x_i$ 时 Y 的条件概率分布为

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}, \quad j = 1, 2, \cdots$$

若 $f_Y(y) > 0$, 在 $Y = y$ 条件下, X 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

若 $f_X(x) > 0$, 在 $X = x$ 条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

二维连续型随机向量的条件分布

定义 在 $Y=y$ 条件下，X 的条件分布函数定义为

$$F_{X|Y}(x|y)=P\{X\leqslant x|Y=y\}$$

$$=\lim_{h\to 0}P\{X\leqslant x|y\leqslant Y\leqslant y+h\}$$

二维连续型随机向量的条件分布

定义　在 $Y = y$ 条件下，X 的条件分布函数定义为

$$F_{X|Y}(x|y) = P\{X \leqslant x | Y = y\}$$
$$= \lim_{h \to 0} P\{X \leqslant x | y \leqslant Y \leqslant y + h\}$$

定理　若 $f(\cdot,\cdot)$ 在点 (x,y) 处连续，$f_Y(\cdot)$ 在点 y 处连续，且 $f_Y(y) > 0$，则

$$F_{X|Y}(x|y) = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(s|y)\,\mathrm{d}s.$$

二维连续型随机向量的条件分布

定义　在 $X=x$ 条件下 Y 的条件分布函数定义为

$$F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\leqslant y|X=x\}$$

$$=\lim_{h\to 0}P\{Y\leqslant y|x\leqslant X\leqslant x+h\}$$

二维连续型随机向量的条件分布

定义 在 $X=x$ 条件下 Y 的**条件分布函数**定义为

$$F_{Y|X}(y|x)=P\{Y\leqslant y|X=x\}$$
$$=\lim_{h\to 0}P\{Y\leqslant y|x\leqslant X\leqslant x+h\}$$

定理 若 $f(\cdot,\cdot)$ 在点 (x,y) 处连续，$f_X(\cdot)$ 在点 x 处连续，且 $f_X(x)>0$，则

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}f_{Y|X}(t|x)\,\mathrm{d}t.$$

第三章	随机向量
A	随机向量的联合分布
B	随机向量的边缘分布
C	随机向量的条件分布
D	随机变量的独立性
E	随机向量函数的分布
F	常用的随机向量

二维随机向量的独立性

二维离散型随机向量 (X, Y) 相互独立的充要条件为

$$p_{ij} = p_{i\cdot} \cdot p_{\cdot j}$$

对所有的 i, j 都成立.

二维连续型随机向量 (X, Y) 相互独立的充要条件为

$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

对几乎所有的实数 x, y 成立.

第三章	随机向量
A	随机向量的联合分布
B	随机向量的边缘分布
C	随机向量的条件分布
D	随机变量的独立性
E	随机向量函数的分布
F	常用的随机向量

二维离散型随机向量函数的分布

设离散型随机变量 (X, Y) 的联合分布为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

令 $Z = g(X, Y)$，则 Z 也是一个离散型随机变量，其分布可按如下步骤求得

1. 根据函数关系列出 Z 的所有可能值；
2. 对 Z 的每个可能值 z，$P\{Z = z\}$ 等于所有满足 $g(x_i, y_j) = z$ 的 p_{ij} 之和.

二维连续型随机向量函数的分布

对连续型随机变量 (X,Y)，求 $Z=g(X,Y)$ 的密度函数的基本方法是

1. 根据函数关系先求 Z 的分布函数

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{g(X,Y)\le z\}$$

2. 然后对 $F_Z(z)$ 求导可得 Z 的概率密度.

第三章	随机向量
A	随机向量的联合分布
B	随机向量的边缘分布
C	随机向量的条件分布
D	随机变量的独立性
E	随机向量函数的分布
F	常用的随机向量

连续型 · 均匀分布

定义：设 D 是平面上的有界区域，其面积为 d，若二维随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{d} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

则称 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布.

连续型 · 均匀分布

若 (X,Y) 服从 D 上的均匀分布，则 (X,Y) 落在某一区域 A 内的概率

$$
\begin{aligned}
P\{(X,Y)\in A\} &= \iint_A f(x,y)dxdy \\
&= \iint_{A\cap D} \frac{1}{d} dxdy \\
&= \frac{S}{d}
\end{aligned}
$$

其中 S 为 $A\cap D$ 的面积.

连续型 · 正态分布

设 $(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则有

1. $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$;
2. $\rho_{XY} = \rho$.

结论：对于二维正态随机变量 (X,Y)，X 与 Y 相互独立的充分必要条件是 $\rho_{XY} = \rho = 0$.

连续型 · 正态分布

定理：若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且

$$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2),\ i = 1, 2, \cdots, n$$

则对不全为零的数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$,

$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right).$$

本章选择题

选择 设二维随机向量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则有…………………………………( )

(A) $a=0.2, b=0.3$ (B) $a=0.4, b=0.1$

(C) $a=0.3, b=0.2$ (D) $a=0.1, b=0.4$

本章选择题

选择　设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $P\{X+Y \leqslant 0\} = \frac{1}{2}$　　(B) $P\{X+Y \leqslant 1\} = \frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y \leqslant 0\} = \frac{1}{2}$　　(D) $P\{X-Y \leqslant 1\} = \frac{1}{2}$

数字特征

主要内容：期望的定义：离散型、连续型，随机变量的函数的期望，期望、方差、协方差的性质，相关系数，常见分布的数字特征，大数定律

第四章	数字特征
A	数学期望
B	方差与标准差
C	协方差与相关系数

离散型随机变量的期望

定义：设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

若级数

$$\sum_k x_k p_k$$

绝对收敛，则称其和为随机变量 X 的数学期望，记为 EX.

连续型随机变量的期望

定义：设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$，若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

绝对收敛，则称此积分为随机变量 X 的数学期望，记为 EX.

随机变量函数的数学期望

定理：设 X 为随机变量，$Y = g(X)$，则

1 若 X 为离散型随机变量，分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

则

$$EY = \sum_k g(x_k) p_k.$$

随机变量函数的数学期望

定理（续）:

2 若 X 为连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$，则

$$EY = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx.$$

数学期望的性质

设 $X, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为随机变量，c, k 为常数，则有

1. $E(c) = c$；
2. $E(kX) = kE(X)$；
3. $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$；

推论：$E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k)$

数学期望的性质

4 若 X_1, X_2 相互独立，则有

$$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2).$$

推论：若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则有

$$E\left(\prod_{k=1}^{n} X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k)$$

注：如果没有相互独立这一条件，上式一般不成立！

第四章	数字特征
A	数学期望
B	方差与标准差
C	协方差与相关系数

方差

在实际问题中，仅靠期望值不能完善地说明随机变量的分布特征．我们常常需要知道分布相对于期望值的离散程度．

定义：若随机变量 X 的期望存在，称

$$X - EX$$

为随机变量 X 的离差．

方差

定义：设 X 是一随机变量，若其离差平方的期望存在，则称该期望为 X 的方差，记为 $D(X)$（或 $\mathrm{Var}(X)$），即

$$\mathrm{Var}(X) := E[X - E(X)]^2.$$

称 $\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ 为 X 的标准差.

方差的常用计算公式：

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - [EX]^2.$$

方差的性质

设 $X, X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为随机变量，c, k 为常数，则有

1. $\mathrm{Var}(c) = 0$， $\mathrm{Var}(X + c) = \mathrm{Var}(X)$；
2. $\mathrm{Var}(X) \geq 0$，且等式成立当且仅当 X 几乎必然为常数；
3. $\mathrm{Var}(kX) = k^2\,\mathrm{Var}(X)$；

注：若事件 A 的概率为 1，则称该事件几乎必然成立.

方差的性质

4 若 X_1, X_2 相互独立，则有

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2).$$

推论：若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，则有

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k)$$

注：如果没有相互独立这一条件，上式一般不成立！

第四章	数字特征
A	数学期望
B	方差与标准差
C	协方差与相关系数

协方差

定义　定义：对于二维随机向量 (X, Y)，称

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := E[(X - EX)(Y - EY)]$$

为 X 与 Y 的协方差(Covariance).

协方差

定义　定义：对于二维随机向量 (X,Y)，称

$$\mathrm{Cov}(X,Y) := E[(X-EX)(Y-EY)]$$

为 X 与 Y 的协方差(Covariance).

由定义直接可得：任意随机变量与其自身的协方差就是该随机变量的方差，即

$$\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{Var}(X).$$

协方差的性质

设 X, Y, Z 为随机变量，a, b, c, d 为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$;

协方差的性质

设 X, Y, Z 为随机变量，a, b, c, d 为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$；
2. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$；

协方差的性质

设 X, Y, Z 为随机变量，a, b, c, d 为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$；
2. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$；
3. $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$；

协方差的性质

设 X, Y, Z 为随机变量，a, b, c, d 为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$;
2. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$;
3. $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$;
4. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$;

协方差的性质

设 X,Y,Z 为随机变量，a,b,c,d 为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$；
2. $\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)$；
3. $\mathrm{Cov}(X,Y+Z)=\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Z)$；
4. $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$；
5. $\mathrm{Var}(X\pm Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)\pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

协方差的性质

设 X, Y, Z 为随机变量，a, b, c, d 为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}(Y, X)$;
2. $\mathrm{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\,\mathrm{Cov}(X, Y)$;
3. $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$;
4. $\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$;
5. $\mathrm{Var}(X \pm Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X, Y)$.

协方差的性质

设 X,Y,Z 为随机变量，a,b,c,d 为常数，则有

1. $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$；
2. $\mathrm{Cov}(aX+b,cY+d)=ac\,\mathrm{Cov}(X,Y)$；
3. $\mathrm{Cov}(X,Y+Z)=\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(X,Z)$；
4. $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$；
5. $\mathrm{Var}(X\pm Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)\pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$.

推论　两随机变量相互独立，则协方差等于零；反之未必成立.

定义　对于二维随机变量 (X, Y)，如果两个变量的方差都不为零，称

$$\rho_{X,Y} := \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}}$$

为 X 与 Y 的相关系数(Correlation)，也可以记为 $\rho(X, Y)$.

定义 对于二维随机变量 (X, Y)，如果两个变量的方差都不为零，称

$$\rho_{X,Y} := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \mathrm{Cov}(X^*, Y^*)$$

为 X 与 Y 的相关系数(Correlation)，也可以记为 $\rho(X,Y)$.

定义 对于二维随机变量 (X,Y)，如果两个变量的方差都不为零，称

$$\rho_{X,Y} := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}} = \mathrm{Cov}(X^*,Y^*)$$

为 X 与 Y 的相关系数(Correlation)，也可以记为 $\rho(X,Y)$.

性质 相关系数表示随机变量之间的线性相关程度：

1. $|\rho_{X,Y}| \leqslant 1$.
2. $\rho_{X,Y} = -1$ 当且仅当 $Y = aX + b$，$a < 0$.
3. $\rho_{X,Y} = 1$ 当且仅当 $Y = aX + b$，$a > 0$.

相关系数

定义　若随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y}=0$，则称 X 与 Y 线性互不相关，简称不相关.

相关系数

定义 若随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y}=0$，则称 X 与 Y 线性互不相关，简称不相关.

完全负相关	负相关	不相关	正相关	完全正相关
$\rho=-1$	$\rho<0$	$\rho=0$	$\rho>0$	$\rho=1$

- $\rho_{X,Y}=-1$ 当且仅当 $Y=aX+b$，$a<0$；
- $\rho_{X,Y}=1$ 当且仅当 $Y=aX+b$，$a>0$.

相关系数

定义　若随机变量 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{X,Y} = 0$，则称 X 与 Y 线性互不相关，简称不相关.

完全负相关	负相关	不相关	正相关	完全正相关
$\rho = -1$	$\rho < 0$	$\rho = 0$	$\rho > 0$	$\rho = 1$

- $\rho_{X,Y} = -1$ 当且仅当 $Y = aX + b$，$a < 0$；
- $\rho_{X,Y} = 1$ 当且仅当 $Y = aX + b$，$a > 0$.

性质　相互独立 $\Longrightarrow$ 不相关；反之未必成立.

本章选择题

选择 (2011)　设随机变量 X 和 Y 相互独立，且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，则 $E(UV)=$ ································· (　　)

(A) $E(U)E(V)$　　(B) $E(X)E(Y)$

(C) $E(U)E(Y)$　　(D) $E(X)E(V)$

本章选择题

选择 (2001) 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于 · ( )

(A) -1 (B) 0 (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

极限定理

主要内容：切比雪夫不等式，大数定律，中心极限定理

第五章	极限定理
A	切比雪夫不等式
B	大数定律
C	中心极限定理

切比雪夫不等式

切比雪夫不等式：设随机变量 X 有期望和方差，则对于任给的 $\varepsilon > 0$，有

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2},$$

即

$$P(|X - E(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

第五章	极限定理
A	切比雪夫不等式
B	大数定律
C	中心极限定理

定理 (切比雪夫定理)　设随机变量序列 $\{X_n\}_{n\geqslant 1}$ 相互独立，且有相同的期望 μ 和方差 σ^2，定义 Y_n 为前 n 个随机变量的算术平均，即

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i,$$

则对任意正数 ε，有 $\lim_{n\to\infty} P\{|Y_n - \mu| < \varepsilon\} = 1$.

第五章	极限定理
A	切比雪夫不等式
B	大数定律
C	中心极限定理

中心极限定理

常用结论：大量的同分布随机变量的和、平均值近似地服从正态分布.

定理 1 (棣莫弗—拉普拉斯定理)　设随机变量 X 服从参数为 n, p 的二项分布，即 $X \sim B(n, p)$，则当 n 充分大时，X 近似服从正态分布，即可以近似认为

$$X \sim N(np, np(1-p)).$$

本章选择题

选择 (2002)　设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，则根据林德伯格－莱维中心极限定理，当 n 充分大时，Y_n 近似服从正态分布，只要 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ . . . . ( )

(A) 有相同的数学期望　(B) 有相同的方差

(C) 服从同一指数分布　(D) 服从同一离散型分布

样本与统计量

主要内容：常用统计量，三大统计分布：χ^2 分布、t 分布、F 分布，正态分布常用统计量的分布

精确定义

定义：称随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 构成一个（简单）随机样本，如果这些随机变量

1. 相互独立；
2. 服从相同的分布.

它们共同服从的分布称为总体分布；样本个数 n 称为样本容量.

常用统计量

定义：对样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，称

$$\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

为样本均值.

常用统计量

定义：对样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，称

$$S^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

为样本方差；称

$$S := \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

为样本标准差.

常用统计量

样本方差的性质：

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right).$$

χ^2 分布

χ^2 分布的性质：

1. 若 X 服从标准正态分布，则 X^2 服从 1 个自由度的 χ^2 分布，即
$$X^2 \sim \chi_1^2.$$
2. 可加性：设 $Y_1 \sim \chi_m^2$，$Y_2 \sim \chi_n^2$，且两者相互独立，则
$$Y_1 + Y_2 \sim \chi_{m+n}^2.$$

χ^2 分布

定理：设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，都服从标准正态分布，则

$$\chi^2 := \sum_{i=1}^{n} X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$$

服从 n 个自由度的 χ^2 分布，即

$$\chi^2 \sim \chi_n^2.$$

t 分布

定理：设两个随机变量 X, Y 相互独立，并且

$$X \sim N(0,1), \qquad Y \sim \chi_n^2.$$

则

$$T := \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

服从具有 n 个自由度的 t 分布.

F 分布

定理：设两个随机变量 Y_1, Y_2 相互独立，并且

$$Y_i \sim \chi^2_{n_i}, \qquad i = 1, 2.$$

则

$$F := \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2} \sim F_{n_1,n_2}.$$

F 分布

F 分布的性质：

1. 若 $F \sim F_{m,n}$，则

$$\frac{1}{F} \sim F_{n,m}.$$

2. $F_{m,n}(1-\alpha) = \dfrac{1}{F_{n,m}(\alpha)}.$

3. 若 $X \sim t_n$，则

$$X^2 \sim F_{1,n}.$$

单个正态总体的统计量的分布

定理 1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本．则 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，且有

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1), \qquad \frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1},$$

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2, \qquad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

两个正态总体的统计量的分布

定理 2 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别是取自两个相互独立的正态总体

$$N(\mu_1, \sigma^2), \qquad N(\mu_2, \sigma^2)$$

的样本．则

$$U := \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1),$$

其中 $\overline{X}, \overline{Y}$ 分别是两个样本各自的均值.

两个正态总体的统计量的分布

定理 3 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 分别是取自两个相互独立的正态总体

$$N(\mu_1, \sigma^2), \qquad N(\mu_2, \sigma^2)$$

的样本．则

$$T := \frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t_{m+n-2},$$

其中 $\overline{X}$, $\overline{Y}$, S_1^2, S_2^2 分别是两个样本各自的均值及方差.

两个正态总体的统计量的分布

定理 5　设 $X_1, \cdots, X_m$ 与 $Y_1, \cdots, Y_n$ 分别是取自两个相互独立的正态总体

$$N(\mu_1, \sigma_1^2), \qquad N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

的样本．则

$$F := \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{m-1,n-1}.$$

本章选择题

选择　设总体 $X \sim B(1,p)$，其中参数 $p \in (0,1)$ 未知．X_1,X_2,X_3 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则下列选项中不是统计量的为 $\cdots\cdots$（　　）

(A) $\min\{X_1,X_2,X_3\}$　　(B) $X_1-(1-p)\overline{X}$

(C) $\max\{X_1,X_2,X_3\}$　　(D) $X_3-3\overline{X}$

本章选择题

选择　设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $R = \dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从分布 $\cdots$ (　　)

(A) $F_{1,1}$　　(B) $F_{2,1}$　　(C) t_1　　(D) t_2

参数估计

主要内容：矩估计，极大似然估计，估计量的无偏性和方差的比较，一个正态总体的区间估计

矩估计

例子　当总体中只有一个参数时，矩估计即是用样本均值估计总体期望.

矩估计

例子　当总体中只有一个参数时，矩估计即是用样本均值估计总体期望.

例子　当总体中有两个或以上的参数时，总体期望与方差的矩估计分别为

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

极大似然估计

定义：设连续型（离散型）总体 X 的概率密度函数（概率质量函数）为

$$f(x;\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k).$$

则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 在观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 处的联合概率密度（概率）为

$$L(x_1, \cdots, x_n;\ \theta_1, \cdots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta_1, \cdots, \theta_k).$$

此时 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 被看做固定但是未知的参数.

极大似然估计

定义（续）：如果将观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 看成固定的，将

$$L(x_1, \cdots, x_n;\ \theta_1, \cdots, \theta_k)$$

看做 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的函数，则该函数被称为似然函数 (likelihood function).

极大似然估计

定义：如果似然函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$

在

$$(\theta_1^*, \theta_2^*, \cdots, \theta_k^*)$$

处达到最大值，则称上述参数为未知参数的极大似然估计 (maximum likelihood estimators).

极大似然估计

求极大似然估计的一般方法：

1. 写出似然函数 L；
2. 求似然函数的对数 $\ln L$；
3. 对 $\ln L$ 求导（偏导）并令导数等于零，得到似然方程组；
4. 解方程组得到 $\ln L$ 的驻点，判断该驻点是否最大值点；
5. 将最大值点表达式中的 x_i 换为 X_i，就得到参数的极大似然估计.

无偏性

假设 θ 为总体分布的参数，设

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

是 θ 的一个估计．如果对 θ 的一切可能取值，都有

$$E(\hat{\theta}) = \theta,$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计 (unbiased estimator).

无偏性

定理：设总体 X 的期望和方差分别为

$$E(X)=\mu, \qquad \mathrm{Var}(X)=\sigma^2.$$

从总体取一组样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，则样本平均数 $\overline{X}$ 与样本方差 S^2 分别是 μ 和 σ^2 的无偏估计，即

$$E(\overline{X})=\mu, \qquad E(S^2)=\sigma^2.$$

总体期望的区间估计

情况一：正态总体、方差已知

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其中 σ^2 已知. 则总体期望 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times Z_{\alpha/2}, \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times Z_{\alpha/2}\right).$$

总体期望的区间估计

情况二：正态总体、方差未知

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是取自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本，其中 σ^2 未知．则总体期望 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \times t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \times t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\right).$$

总体方差的区间估计

设 $X_1, \cdots, X_n$ 是取自正态总体的样本，则总体方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})} \right).$$

本章选择题

选择　下列各个结论中错误的是 . . . .(　　)

(A) 样本均值是总体期望的无偏估计

(B) 样本方差是总体方差的无偏估计

(C) 样本均值是正态分布的期望的极大似然估计

(D) 样本方差是正态分布的方差的极大似然估计

第四章	数字特征
第五章	极限定理
第六章	样本统计
第七章	参数估计
第八章	假设检验

假设检验

主要内容：一个正态总体的假设检验

单正态总体均值的检验

条件	单个正态总体，方差 σ^2 已知		
原假设	$H_0: \mu = \mu_0$		
备择假设	$\mu < \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\mu > \mu_0$
统计量	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$		
拒绝域	$Z \leq -Z_\alpha$	$\lvert Z\rvert \geq Z_{\frac{\alpha}{2}}$	$Z \geq Z_\alpha$

单正态总体均值的检验

条件	单个正态总体，方差未知		
原假设	$H_0 : \mu = \mu_0$		
备择假设	$\mu < \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\mu > \mu_0$
统计量	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$		
拒绝域	$T \leq -t_{n-1}(\alpha)$	$\lvert T \rvert \geq t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$	$T \geq t_{n-1}(\alpha)$

单个正态总体方差的检验

检验目标	单个正态总体的方差		
原假设	$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$		
备择假设	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$
统计量	$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$		
拒绝域	$\chi^2 \leq \chi_{n-1}^2(1-\alpha)$	$\chi^2 \geq \chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})$ 或 $\chi^2 \leq \chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})$	$\chi^2 \geq \chi_{n-1}^2(\alpha)$