一九八七年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 与两直线 $\begin{cases} x=1 \\ y=-1+t \\ z=2+t \end{cases}$ 及 $\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1}$ 都平行，且过原点的平面方程为 ________.

解. 应填 $-x+y-z=0$.

2. 当 $x=$时，函数 $y=x2^x$ 取得极小值 ________.

解. 应填 $-\dfrac{1}{\ln 2}$.

3. 由曲线 $y=\ln x$ 与两直线 $y=(\mathrm{e}+1)-x$ 及 $y=0$ 所围成的平面图形的面积是 ________.

解. 应填 $\dfrac{3}{2}$.

4. 设 L 为取正向的圆周 $x^2+y^2=9$，则曲线积分 $\oint_L (2xy-2y)\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y$ 的值是 ________.

解. 用参数方程或者用格林公式计算，求得 -18π.

5. 已知三维线性空间的一组基底为 $\alpha_1=(1,1,0)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T,\alpha_3=(0,1,1)^T$, 则向量 $\beta=(2,0,0)^T$ 在上述基底下的坐标是 ________.

解. 应填 $(1,1,-1)^T$.

二、（本题满分 8 分）

求正的常数 a 与 b，使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=1$ 成立.

解. 由洛必达法则与等价无穷小量代换，求得 $a=4$, $b=1$.

三、计算题（本题满分 7 分）

1.（本题满分 3 分）

设 f,g 为连续可微函数，$u=f(x,xy)$, $v=g(x+xy)$, 求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

解. $\dfrac{\partial u}{\partial x}=f_1'+yf_2'$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=(1+y)g'$.

2.（本题满分 4 分）

设矩阵 A 和 B 满足关系式 $AB=A+2B$，其中 $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

解. $B=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

四、（本题满分 8 分）

求微分方程 $y'''+6y''+(9+a^2)y'=1$ 的通解（一般解），其中常数 $a>0$.

解. $y=C_1+\mathrm{e}^{-3x}(C_2\cos ax+C_3\sin ax)+\dfrac{1}{9+a^2}x$.

五、选择题（本题满分 12 分，每小题 3 分）

1. 设常数 $k>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{k+n}{n^2}$ ································ (　)

(A) 发散.　　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　　(D) 收敛或发散与 k 的取值有关.

解. 应选 (C).

2. 设 $f(x)$ 为已知连续函数，$I=t\displaystyle\int_0^{s/t}f(tx)\,\mathrm{d}x$，其中 $s>0,t>0$，则 I 的值 (　)

(A) 依赖于 s 和 t.　　(B) 依赖于 s,t,x.

(C) 依赖于 t 和 x，不依赖于 s.　　(D) 依赖于 s，不依赖于 t.

解. 应选 (D).

3. 设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 $x=a$ 处 ································ (　)

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq a$.　　(B) $f(x)$ 取得极大值.

(C) $f(x)$ 取得极小值.　　(D) $f(x)$ 的导数不存在.

解. 应选 (B).

4. 设 A 为 n 阶方阵，且 A 的行列式 $|A|=a\neq0$，而 A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $|A^*|$ 等于 ································ (　)

(A) a.　　(B) $\dfrac{1}{a}$.　　(C) a^{n-1}.　　(D) a.

解. 应选 (C).

六、（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}x^{n+1}$ 的收敛域，并求其和函数.

解. 收敛域为 $[-2,2)$. 和函数 $S(x)=2x\ln\dfrac{2}{2-x}$.

七、（本题满分 10 分）

计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}x(8y+1)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2(1-y^2)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-4yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是由曲线 $\begin{cases}z=\sqrt{y-1}\\x=0\end{cases}$（$1\leqslant y\leqslant 3$）绕 y 轴旋转一周所形成的曲面，它的法向量与 y 轴正向的夹角恒大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

解. Σ 的方程为 $y=x^2+z^2+1$，由高斯公式可求得 $I=34\pi$.

八、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上可微，对于 $[0,1]$ 上的每一个 x，函数 $f(x)$ 的值都在开区间 $(0,1)$ 内，且 $f'(x)\neq 1$，证明在 $(0,1)$ 内有且仅有一个 x，使 $f(x)=x$.

解. (I) 令 $L(t)=f(t)-t$，则 $L(0)>0$，$L(1)<0$. 由零值定理，存在 $x\in(0,1)$. 使得 $L(x)=0$，即 $f(x)=x$.

(II) 假设有两个点 x_1 和 x_2 满足 $f(x_1)=x_1$. $f(x_2)=x_2$. 不妨设 $x_1<x_2$. 则由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=1$，矛盾. 故满足 $f(x)=x$ 的 x 是唯一的.

九、（本题满分 8 分）

问 a,b 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=0,\\x_2+2x_3+2x_4=1,\\-x_2+(a-3)x_3-2x_4=b,\\3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1\end{cases}$ 有唯一解、无解、有无穷多组解？并求出有无穷多组解时的通解.

解. (I) 当 $a\neq 1$ 时，原方程组有唯一解.

(II) 当 $a=1$ 且 $b\neq -1$ 时，原方程组无解.

(III) 当 $a=1$ 且 $b=-1$ 时，原方程组有无穷多解. 此时通解为

$$x=(-1,1,0,0)^T+c_1(1,-2,1,0)^T+c_2(1,-2,0,1)^T,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

十、填空题（本题满分 6 分，每小题 2 分）

1. 设在一次试验中事件 A 发生的概率为 p，现进行 n 次独立试验，则 A 至少发生一次的概率为 ________；而事件 A 至多发生一次的概率为 ________.

解. $1-(1-p)^n$；$[1+(n-1)p](1-p)^{n-1}$.

2. 三个箱子，第一个箱子中有 4 个黑球 1 个白球，第二个箱子中有 3 个黑球 3 个白球，第三个箱子中有 3 个黑球 5 个白球. 现随机地取一个箱子，再从这个箱子中取出 1 个球，这个球为白球的概率等于 ________. 已知取出的球是白球，此球属于第二个箱子的概率为 ________.

解. $\frac{53}{120}$，$\frac{20}{53}$.

3. 已知连续随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}$，则 X 的数学期望为 ________；X 的方差为 ________.

解. $EX=1$，$DX=\frac{1}{2}$.

十一、（本题满分 6 分）

设随机变量 X,Y 相互独立，其概率密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度函数.

解. Z 的概率密度函数 $f_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ \frac{1}{2}(1-e^{-z}), & 0\leqslant z<2;\\ \frac{1}{2}(e^2-1)e^{-z}, & z\geqslant 2.\end{cases}$

一九八七年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷一第一 [4] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

二、计算题（本题满分 14 分）

1.（本题满分 6 分）

计算定积分 $\int_{-2}^{2}(|x|+x)\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$.

解. 由函数的奇偶性，求得 $2-6\mathrm{e}^{-2}$.

2. 同试卷一第二题.

三、（本题满分 7 分）

设 $z=f(u,x,z)$, $u=x e y$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=(f''_{11}x\mathrm{e}^y+f''_{13})\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^y f'_1+f''_{21}x\mathrm{e}^y+f''_{23}$.

四、（本题满分 8 分）

同试卷一第四题.

五、选择题（本题满分 12 分，每小题 3 分）

1. 同试卷一第五 [1] 题.

2. 同试卷一第五 [2] 题.

3. 同试卷一第五 [3] 题.

4. 同试卷一第五 [4] 题.

六、（本题满分 10 分）

同试卷一第六题.

七、（本题满分 10 分）

同试卷一第七题.

八、（本题满分 10 分）

同试卷一第八题.

九、（本题满分 8 分）

同试卷一第九题.

十、（本题满分 6 分）

设 λ_1,λ_2 为 n 阶方阵 A 的特征值，且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，而 x_1,x_2 分别为对应的特征向量，试证明 x_1+x_2 不是 A 的特征向量.

解. 假设 x_1+x_2 是 A 的特征向量. 则有 $A(x_1+x_2)=\lambda(x_1+x_2)$. 又因为 $Ax_1=\lambda_1 x_1$, $Ax_2=\lambda_2 x_2$，我们得到 $(\lambda_1-\lambda)x_1+(\lambda_2-\lambda)x_2=0$. 因为 x_1 和 x_2 是属于不同特征值的特征向量，所以 x_1 和 x_2 线性无关，从而 $\lambda_1=\lambda=\lambda_2$，矛盾.

一九八八年考研数学试卷一解答

一、计算题（本题满分 15 分，每小题 5 分）

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 的收敛域.

解. 收敛域为 $[0,6)$.

2. 已知 $f(x)=\mathrm{e}^{x^2}, f[\phi(x)]=1-x$ 且 $\phi(x)\geqslant 0$，求 $\phi(x)$，并写出它的定义域.

解. $\phi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$，定义域为 $(-\infty,0)$.

3. 设 S 为曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，计算曲面积分

$$I=\oiint_S x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解. 根据高斯公式，并利用球面坐标计算三重积分，得到 $I=\frac{12\pi}{5}$.

二、填空题（本题满分 12 分，每小题 3 分）

1. 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty} t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}$，则 $f'(t)=$ ________.

解. $f'(t)=(2t+1)\mathrm{e}^{2t}$.

2. 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，它在区间 $(-1,1]$ 上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}2, & -1<x\leqslant 0,\\ x^3, & 0<x\leqslant 1,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶（Fourier）级数在 $x=1$ 处收敛于 ________.

解. 由狄利克雷收敛定理，答案为 $\frac{3}{2}$.

3. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\int_0^{x^3-1} f(t)\,\mathrm{d}t=x$，则 $f(7)=$ ________.

解. 在等式两边同时对 x 求导，再令 $x=2$，得到 $f(7)=\frac{1}{12}$.

4. 设 4×4 矩阵 $A=(\alpha,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，$B=(\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4)$，其中 $\alpha,\beta,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 均为 4 维列向量，且已知行列式 $|A|=4$，$|B|=1$，则行列式 $|A+B|=$ ________.

解. $|A+B|=40$.

三、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 若函数 $y=f(x)$ 可导，且有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) 与 Δx 等价的无穷小.　　(B) 与 Δx 同阶的无穷小.

(C) 比 Δx 低阶的无穷小.　　(D) 比 Δx 高阶的无穷小.

解. 由微分的定义，应选 (B).

2. 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) 取得极大值.　　(B) 取得极小值.

(C) 某个邻域内单调增加.　　(D) 某个邻域内单调减少.

解. 由已知条件得 $f''(x_0)=-4f(x_0)<0$，则 $f(x)$ 在驻点 x_0 取得极大值，故选 (A) .

3. 设有空间区域 $\Omega_1: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2, z\geqslant 0$;

及 $\Omega_2: x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，$x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $\iiint_{\Omega_1} x\,\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} x\,\mathrm{d}v$.　　(B) $\iiint_{\Omega_1} y\,\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} y\,\mathrm{d}v$.

(C) $\iiint_{\Omega_1} z\,\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} z\,\mathrm{d}v$.　　(D) $\iiint_{\Omega_1} xyz\,\mathrm{d}v=4\iiint_{\Omega_2} xyz\,\mathrm{d}v$.

解. 因 Ω_1 关于 yOz 平面和 zOx 平面都对称，而 z 关于 x,y 均为偶函数，故选 (C).

4. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则此级数在 $x=2$ 处 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) 条件收敛.　　(B) 绝对收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性不能确定.

解. 应选 (B).

5. n 维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$（$3\leqslant s\leqslant n$）线性无关的充分必要条件是 $\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) 存在一组不全为 0 的数 $k_1,k_2,\ldots,k_s$，使 $\alpha_1k_1+\alpha_2k_2+\cdots+\alpha_sk_s\neq 0$.

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量都线性无关.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中存在一个向量，它不能用其余向量线性表示.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量都不能用其余向量线性表示.

解. 应选 (D).

四、（本题满分 6 分）

设 $u=yf\left(\frac{x}{y}\right)+xg\left(\frac{y}{x}\right)$，其中函数 f,g 具有二阶连续导数，求 $x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解. 0.

五、（本题满分 8 分）

设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^x$，且其图形在点 $(0,1)$ 处的切线与曲线 $y=x^2-x+1$ 在该点的切线重合，求函数 $y=y(x)$.

解. $y=(1-2x)\mathrm{e}^{2x}$.

六、（本题满分 9 分）

设位于点 $(0,1)$ 的质点 A 对质点 M 的引力大小为 $\dfrac{k}{r^2}$（$k>0$ 为常数，r 为质点 A 与 M 之间的距离），质点 M 沿曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 自 $B(2,0)$ 运动到 $O(0,0)$，求在此运动过程中质点 A 对质点 M 的引力所作的功.

解. $W=k\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

七、（本题满分 6 分）

已知 $AP=PB$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$，求 A 及 A^5.

解. $A=PBP^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&0\\6&-1&-1\end{pmatrix}$，$A^5=PB^5P^{-1}=PBP^{-1}=A$.

八、（本题满分 8 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似，

(I) 求 x 与 y；(II) 求一个满足 $P^{-1}AP=B$ 的可逆矩阵 P.

解. (I) 矩阵相似，则特征多项式相等，解得 $x=0$，$y=1$.

(II) $P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$.

九、（本题满分 9 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且在 (a,b) 内有 $f'(x)>0$. 证明：在 (a,b) 内存在唯一的 ξ，使曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$, $x=a$ 所围平面图形 S_1 是曲线 $y=f(x)$ 与两直线 $y=f(\xi)$, $x=b$ 所围平面图形面积 S_2 的 3 倍.

解. 作辅助函数
$$F(t)=\int_a^t[f(t)-f(x)]\mathrm{d}x-3\int_t^b[f(x)-f(t)]\mathrm{d}x.$$
则由 $f'(x)>0$，可得 $F(a)<0, F(b)>0$．由零值定理，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$．又因为
$$F'(t)=f'(t)[x-a+3(b-t)]>0,$$
所以 ξ 是唯一的.

十、填空题（本题满分 6 分，每小题 2 分）

1. 设三次独立试验中，事件 A 出现的概率相等，若已知 A 至少出现一次的概率等于 $\frac{19}{27}$，则事件 A 在一次试验中出现的概率为________.

解. 应填 $\frac{1}{3}$.

2. 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数，则事件“两数之和小于 $\frac{6}{5}$”的概率为 ________.

解. 应填 $\frac{17}{25}$.

3. 设随机变量 X 服从均值为 10，均方差为 0.02 的正态分布．已知
$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u,\qquad \Phi(2.5)=0.9938,$$
则 X 落在区间 $(9.95,10.05)$ 内的概率为 ________.

解. 应填 0.9876.

十一、（本题满分 6 分）

设随机变量 X 的概率密度函数为 $f_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$，求随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度函数 $f_Y(y)$.

解. $f_Y(y)=\frac{3}{\pi}\frac{(1-y)^3}{1+(1-y)^6}$.

一九八八年考研数学试卷二解答

一、计算题（本题满分 15 分，每小题 5 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

二、填空题（本题满分 12 分，每小题 3 分）

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 同试卷一第二 [2] 题.

3. 同试卷一第二 [3] 题.

4. 同试卷一第二 [4] 题.

三、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷一第三 [1] 题.

2. 同试卷一第三 [2] 题.

3. 同试卷一第三 [3] 题.

4. 同试卷一第三 [4] 题.

5. 同试卷一第三 [5] 题.

四、计算题（本题满分 18 分，每小题 6 分）

1. 同试卷一第四题.

2. 计算 $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}y + \int_2^4 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}y$.

解. 交换积分次序，求得 $\frac{4}{\pi^3}(2+\pi)$.

3. 求椭球面 $x^2+xy^2+3z^2=21$ 上某点 M 处的切平面 Π 的方程，使平面 Π 过已知直线 $l: \frac{x-6}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{2z-1}{-2}$.

解. 故所求切平面 Π 的方程为 $x+2z=7$ 和 $x+4y+6z=21$.

五、(本题满分 8 分)

同试卷一第五题.

六、(本题满分 9 分)

同试卷一第六题.

七、(本题满分 6 分)

同试卷一第七题.

八、(本题满分 8 分)

同试卷一第八题.

九、(本题满分 9 分)

同试卷一第九题.

一九八九年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 已知 $f'(3)=2$，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3-h)-f(3)}{2h}=$________.

解. 原式 $=-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(3+t)-f(3)}{t}=-\dfrac{1}{2}f'(3)=-1.$

2. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $f(x)=x+2\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $f(x)=$________.

解. 令 $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t=a$，则有恒等式 $f(x)=x+2a$，两边从 0 到 1 积分得

$$a=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 (x+2a)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+2a.$$

解之得 $a=-\dfrac{1}{2}$，因此 $f(x)=x+2a=x-1.$

3. 设平面曲线 L 为下半圆周 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则曲线积分 $\displaystyle\int_L (x^2+y^2)\,\mathrm{d}s=$________.

解. L 的方程可写成 $x^2+y^2=1(y\leqslant 0)$，于是原积分 $=\displaystyle\int_L 1\,\mathrm{d}s=\pi$（$L$ 的弧长）.

4. 向量场 $\vec{u}(x,y,z)=xy^2\vec{i}+y\mathrm{e}^z\vec{j}+x\ln(1+z^2)\vec{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $\operatorname{div}\vec{u}=$________.

解. 直接用散度公式得

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{u}\Big|_P&=\left(\frac{\partial}{\partial x}(xy^2)+\frac{\partial}{\partial y}(y\mathrm{e}^z)+\frac{\partial}{\partial z}\big(x\ln(1+z^2)\big)\right)\Bigg|_P\\&=\left(y^2+\mathrm{e}^z+x\cdot\frac{2z}{1+z^2}\right)\Bigg|_{(1,1,0)}=1^2+\mathrm{e}^0+0\cdot\frac{2\cdot 0}{1+0^2}=1+1=2.\end{aligned}$$

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&0&0\\1&4&0\\0&0&3\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则逆矩阵 $(A-2E)^{-1}=$________.

解. 因为 $A-2E=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，所以 $(A-2E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 有且仅有水平渐近线.

(B) 有且仅有铅直渐近线.

(C) 既有水平渐近线，也有铅直渐近线.

(D) 既无水平渐近线，也无铅直渐近线.

解. $\lim\limits_{x\to0^+} x\sin\frac{1}{x}=0$，故函数没有铅直渐近线.

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1$$

故 $y=1$ 为函数的水平渐近线. 所以答案为 (A).

2. 已知曲面 $z=4-x^2-y^2$ 上点 P 处的切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则点 P 的坐标是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $(1,-1,2)$. (B) $(-1,1,2)$. (C) $(1,1,2)$. (D) $(-1,-1,2)$.

解. 设 $F(x,y,z)=z+x^2+y^2-4$，则曲面在点 $P(x,y,z)$ 处的法向量

$$\vec{n}=\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}=\{2x,2y,1\}.$$

由于切平面与平面 $2x+2y+z-1=0$ 平行，则有 $x=1,y=1$. 求得 $P(1,1,2)$. 因此应选 (C).

3. 设线性无关的函数 y_1, y_2, y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解，C_1, C_2 是任意常数，则该非齐次方程的通解是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$. (B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$.

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$. (D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

解. 由二阶常系数非齐次微分方程解的结构定理可知，y_1-y_3,y_2-y_3 为方程对应齐次方程的特解，所以方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的通解为 $y=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3$, 即 $y=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$，故应选 (D).

4. 设函数 $f(x)=x^2$, $0\leqslant x<1$，而 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, $-\infty<x<+\infty$，其中 $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$, $n=1,2,3,\cdots$，则 $S\left(-\frac{1}{2}\right)$ 等于$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $-\frac{1}{2}$. (B) $-\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{2}$.

解. $S(x)$ 是 $f(x)$ 先作奇延拓后再作周期延拓后的傅里叶级数的和函数，由于 $S(x)$ 是奇函数，于是 $S\left(-\frac{1}{2}\right)=-S\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$. 应选 (B).

5. 设 A 是 n 阶矩阵，且 A 的行列式 $|A|=0$，则 A 中$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) 必有一列元素全为 0.

(B) 必有两列元素对应成比例.

(C) 必有一列向量是其余列向量的线性组合.

(D) 任一列向量是其余列向量的线性组合.

解. 由 $|A|=0$，知 A 的列向量组线性相关．因此存在一列向量是其余列向量的线性组合．应选 (C).

三、计算题（本题满分 15 分，每小题 5 分）

1. 设 $z=f(2x-y)+g(x,xy)$，其中函数 $f(t)$ 二阶可导，$g(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. 由复合函数求导法，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2f'+g_1'+yg_2'$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2f''+xg_{12}''+g_2'+xyg_{22}''$.

2. 设曲线积分 $\int_C xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$ 的值.

解. 曲线积分 $\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，则有 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$，所以 $y\varphi'(x)=2xy$, 即有 $\varphi'(x)=2x, \varphi(x)=x^2+C$．由 $\varphi(0)$=0，得 $C=0$，即 $\varphi(x)=x^2$，因此

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x+yx^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{(0,0)}^{(1,1)} y^2\,\mathrm{d}(x^2)+x^2\,\mathrm{d}(y^2)$$
$$=\frac{1}{2}\int_{(0,0)}^{(1,1)}\mathrm{d}(x^2y^2)=\frac{1}{2}(x^2y^2)\Big|_{(0,0)}^{(1,1)}=\frac{1}{2}.$$

或沿直线 $y=x$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$，则有

$$I=\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}x+yx^2\,\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^3\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

3. 计算三重积分 $\iiint_\Omega (x+z)\,\mathrm{d}V$, 其中 Ω 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 所围成的区域.

解. 由于 Ω 关于 yz 平面对称，x 对 x 为奇函数，所以 $\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}V=0$，即

$$\iiint_\Omega (x+z)\,\mathrm{d}V=\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}V$$

用球面坐标计算，Ω: $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{4}$, $0\leqslant\rho\leqslant 1$,

$$I=\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}V=\iiint_\Omega \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3\,\mathrm{d}\rho$$
$$=\pi\left[-\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^1=\frac{\pi}{8}.$$

四、（本题满分 6 分）

将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数.

解. 直接展开 $f(x)$ 相对比较麻烦，先作 $f'(x)$ 的展开，

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},(|x|<1).$$

所以

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(u)\mathrm{d}u=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x u^{2n}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad(|x|<1).$$

当 $x=\pm1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 均收敛，而左端 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 在 $x=1$ 处无定义．因此

$$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$x\in[-1,1)$.

五、（本题满分 7 分）

设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 f 为连续函数，求 $f(x)$.

解. 先将原式进行等价变换，得到

$$f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t.$$

两边求导，得

$$f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-xf(x)+xf(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

再求导，得 $f''(x)=-\sin x-f(x)$，即 $f''(x)+f(x)=-\sin x$．这是二阶常系数非齐次线性微分方程，对应的齐次方程的特征方程为 $r^2+1=0$, 此特征方程的根为 $r=\pm i$，因此非齐次方程有特解

$$y^*=xa\sin x+xb\cos x.$$

代入方程并比较系数，得 $a=0,b=\frac{1}{2}$, 故 $y^*=\frac{x}{2}\cos x$，所以

$$f(x)=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{x}{2}\cos x.$$

又因为 $f(0)=0,f'(0)=1$，所以 $c_1=0,c_2=\frac{1}{2}$, 即 $f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x$.

六、（本题满分 7 分）

证明方程 $\ln x=\frac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内有且仅有两个不同实根.

解. 令 $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=k>0$, $f(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k$. 则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}$. 令 $f'(x)=0$, 解得唯一驻点 $x=\mathrm{e}$; 且当 $0<x<\mathrm{e}$ 时 $f'(x)>0$, 当 $\mathrm{e}<x<+\infty$ 时 $f'(x)<0$. 所以 $x=\mathrm{e}$ 是最大值点，最大值为 $f(\mathrm{e})=\ln\mathrm{e}-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}+k=k>0$. 又因为

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k\right)=-\infty,\\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+k\right)=-\infty,\end{cases}$$

由连续函数的零值定理知在 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 各有且仅有一个零点,故方程 $\ln x=\frac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 有且仅有两个不同实根.

七、(本题满分 6 分)

问 λ 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_3=\lambda\\ 4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2\\ 6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$$

有解，并求出解的一般形式.

解. 对方程组的增广矩阵作初等行变换.

$$\begin{pmatrix}1&0&1&\vdots&\lambda\\ 4&1&2&\vdots&\lambda+2\\ 6&1&4&\vdots&2\lambda+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&\vdots&\lambda\\ 0&1&-2&\vdots&-3\lambda+2\\ 0&1&-2&\vdots&-4\lambda+3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&\vdots&\lambda\\ 0&1&-2&\vdots&-3\lambda+2\\ 0&0&0&\vdots&-\lambda+1\end{pmatrix}$$

故仅当 $-\lambda+1=0$, 即 $\lambda=1$ 时，方程组有解. 此时同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_3=1,\\ x_2-2x_3=-1.\end{cases}$$

令 $x_3=t$, 解得原方程组的通解

$$\begin{cases}x_1=-t+1,\\ x_2=2t-1,\quad(\text{其中 } t \text{ 为任意常数}).\\ x_3=t.\end{cases}$$

八、(本题满分 8 分)

假设 λ 为 n 阶可逆矩阵 A 的一个特征值，证明:

(I) $\frac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值; (II) $\frac{|A|}{\lambda}$ 为 A 的伴随矩阵 A^* 的特征值.

解. (I) 由 λ 为 A 的特征值可知，存在非零向量 α 使 $A\alpha=\lambda\alpha$, 两端左乘 A^{-1}, 得 $\alpha=\lambda A^{-1}\alpha$. 因为 $\alpha\neq0$, 故 $\lambda\neq0$, 于是有 $A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$. 由特征值定义知 $\frac{1}{\lambda}$ 是 A^{-1} 的特征值.

(II) 由逆矩阵的定义 $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$，根据 (I) 有 $\frac{A^*}{|A|}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha$ 即 $A^*\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$．由特征值定义，知 $\frac{|A|}{\lambda}$ 为伴随矩阵 A^* 的特征值.

九、（本题满分 9 分）

设半径为 R 的球面 Σ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 上，问当 R 为何值时，球面 Σ 在定球面内部的那部分的面积最大?

解. 不妨设球面 Σ 的球心是 $(0,0,a)$，于是 Σ 的方程是 $x^2+y^2+(z-a)^2=R^2$．Σ 与球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的交线在平面 xOy 的投影曲线为（其中 $b^2=R^2-\frac{R^4}{4a^2}$）

$$\{x^2+y^2=b^2, z=0.$$

设投影曲线在平面 xOy 上围成区域为 D_{xy}，则球面 Σ 在定球面内部的那部分面积等于

$$S(R)=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

利用极坐标变换 $(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant\rho\leqslant b)$ 有

$$S(R)=\iint_{D_{xy}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^b\frac{R\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\mathrm{d}\rho$$

$$=-\frac{R}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^b\frac{1}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d(R^2-\rho^2)=2\pi R\left(-\sqrt{R^2-b^2}+R\right)$$

代入 $b^2=R^2-\frac{R^4}{4a^2}$，化简得 $S(R)=2\pi R^2-\frac{\pi R^3}{a}$ （$0<R<2a$）．令

$$S'(R)=4\pi R-\frac{3\pi R^2}{a}=0,$$

得 $R=\frac{4a}{3}$．且 $0<R<\frac{4}{3}a$ 时 $S'(R)>0$，$\frac{4}{3}a<R<2a$ 时 $S'(R)<0$．故 $R=\frac{4a}{3}$ 时 $S(R)$ 取极大值，也是最大值．因此，当 $R=\frac{4a}{3}$ 时球面 Σ 在定球面内部的那部分面积最大.

十、填空题（本题满分 6 分，每小题 2 分）

1. 已知随机事件 A 的概率 $P(A)=0.5$，随机事件 B 的概率 $P(B)=0.6$，及条件概率 $P(B|A)=0.8$，则和事件 $A\cup B$ 的概率 $P(A\cup B)=$________.

解. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=P(A)+P(B)-P(A)P(B|A)=0.7$.

2. 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5．现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为________.

解. 设事件 $A=$“甲射中”，$B=$“乙射中”．依题意，$P(A)=0.6, P(B)=0.5$．A 与 B 相互独立，因此有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=0.6+0.5-0.6\times 0.5=0.8.$$

因此所求的概率为

$$P(A|A\cup B)=\frac{P(A(A\cup B))}{P(A\cup B)}=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}=0.75$$

3. 若随机变量 ξ 在 $(1,6)$ 上服从均匀分布，则方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的概率是________.

解. 随机变量 ξ 在 $(1,6)$ 上服从均匀分布，所以其分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{x-1}{6-1}, & 1\leqslant x<6,\\ 1, & x\geqslant 6.\end{cases}$$

方程 $x^2+\xi x+1=0$ 有实根的充要条件是其判别式 $\Delta=\xi^2-4\geqslant 0$, 即 $\xi^2\geqslant 4$. 由分布函数的定义

$$P\{\xi\geqslant 2\}=1-P\{\xi<2\}=1-F(2)=1-0.2=0.8.$$

而 $P\{\xi\leqslant -2\}=0$，所以由概率的可加性，有

$$P\{\Delta\geqslant 0\}=P\left\{\xi^2\geqslant 4\right\}=P\{\xi\geqslant 2\}+P\{\xi\leqslant -2\}=0.8+0=0.8.$$

十一、（本题满分 6 分）

设随机变量 X 与 Y 独立，且 X 服从均值为 1、标准差 (均方差) 为 $\sqrt{2}$ 的正态分布，而 Y 服从标准正态分布. 试求随机变量 $Z=2X-Y+3$ 的概率密度函数.

解. 已知 $X\sim N(1,2), Y\sim N(0,1)$，由独立的正态随机变量 X 与 Y 的线性组合仍服从正态分布，且

$$EZ=2EX-EY+3=5,\qquad DZ=4DX+DY=4\times 2+1=9,$$

得 $Z\sim N(5,9)$. 代入正态分布的概率密度公式，有 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=\frac{1}{3\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-5)^2}{18}}.$$

一九八九年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷一第一 [4] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 同试卷一第二 [2] 题.

3. 同试卷一第二 [3] 题.

4. 同试卷一第二 [4] 题.

5. 同试卷一第二 [5] 题.

三、计算题（本题满分 15 分，每小题 5 分）

1. 同试卷一第三 [1] 题.

2. 同试卷一第三 [2] 题.

3. 同试卷一第三 [3] 题.

四、解答题（本题满分 18 分，每小题 6 分）

1. 同试卷一第四 [1] 题.

2. 求八分之一球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$，$x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0$ 的边界曲线的重心，设曲线的线密度 $\rho=1$.

解. 重心为 $\left(\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi},\frac{4R}{3\pi}\right)$.

3. 设空间区域Ω由曲面$z=a^2-x^2-y^2$与平面$z=0$围成，其中a为正的常数，设Ω表面的外侧为S，Ω的体积为V，证明

$$\oiint_S x^2yz^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-xy^2z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z(1+xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=V.$$

解. 由高斯公式及积分的对称性,

$$\text{原式左边}=\iiint_\Omega(1+2xyz)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=V+2\iiint_\Omega xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=V.$$

五、（本题满分 7 分）

同试卷一第五题.

六、（本题满分 7 分）

同试卷一第六题.

七、（本题满分 6 分）

同试卷一第七题.

八、（本题满分 8 分）

同试卷一第八题.

九、（本题满分 9 分）

同试卷一第九题.

一九九〇年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases} x=-t+2, \\ y=3t-4, \\ z=t-1 \end{cases}$ 垂直的平面方程是________.

解. 应填 $x-3y-z+4=0$.

2. 设 a 为非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$________.

解. 应填 e^{2a}.

3. 设函数 $f(x)=\begin{cases} 1, & |x|\leqslant 1, \\ 0, & |x|>1, \end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$________.

解. 应填 1.

4. 积分 $\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}x\int_x^2 \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$ 的值等于________.

解. 交换积分次序得原式 $=\displaystyle\int_0^2 \mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1-\mathrm{e}^{-4}}{2}$.

5. 已知向量组 $\alpha_1=(1,2,3,4)$，$\alpha_2=(2,3,4,5)$，$\alpha_3=(3,4,5,6)$，$\alpha_4=(4,5,6,7)$，则该向量组的秩是________.

解. 应填 2.

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\displaystyle\int_x^{\mathrm{e}^{-x}} f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $F'(x)$ 等于 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$.　　(B) $-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$.

(C) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x)$.　　(D) $\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})+f(x)$.

解. 应选 (A).

2. 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，$f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x)$ 是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $n![f(x)]^{n+1}$.　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$.　　(C) $[f(x)]^{2n}$.　　(D) $n![f(x)]^{2n}$.

解. 应选 (A).

3. 设 α 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 绝对收敛. (B) 条件收敛.

(C) 发散. (D) 收敛性与 α 的取值有关.

解. 应选 (C)．因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin n\alpha}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ 发散.

4. 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 不可导. (B) 可导，且 $f'(0)\neq 0$.

(C) 取得极大值. (D) 取得极小值.

解. 应选 (D)．$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$，故 (A) 和 (B) 均错误．又由极限的局部保号性，在 $x=0$ 的某个去心邻域有 $\frac{f(x)}{1-\cos x}>0$，从而 $f(x)>0=f(0)$，故选 (D).

5. 已知 β_1,β_2 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2 是对应齐次线性方程组 $AX=0$ 的基础解系，k_1,k_2 为任意常数，则方程组 $AX=b$ 的通解（一般解）必是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$. (B) $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$.

(C) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1+\beta_2)+\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$. (D) $k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\frac{\beta_1+\beta_2}{2}$.

解. 应选 (B).

三、计算题（本题满分 15 分，每小题 5 分）

1. 求 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2}\,dx$.

解. 由分部积分法，原式 $=\int_0^1\ln(1+x)d\left(\frac{1}{2-x}\right)=\ln 2-\int_0^1\frac{dx}{(1+x)(2-x)}=\frac{1}{3}\ln 2$.

2. 设 $z=f(2x-y,y\sin x)$，其中 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. $\frac{\partial z}{\partial x}=2\frac{\partial f}{\partial u}+y\cos x\frac{\partial f}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(2\sin x-y\cos x)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y\sin x\cos x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\cos x\frac{\partial f}{\partial v}.$$

3. 求微分方程 $y''+4y'+4y=e^{-2x}$ 的通解（一般解）.

解. $y(x)=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}+\dfrac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-2x}$.

四、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域，并求其和函数.

解. 收敛域为 $(-1,1)$. 和函数 $S(x)=2x\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)'+\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n\right)=\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$.

五、(本题满分 8 分)

求曲面积分 $I=\iint_S yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 外侧在 $z\geqslant 0$ 的部分.

解. 补上 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 4,\\ z=0.\end{cases}$ 由高斯公式

$$I=\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{S_1}yz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x+2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\pi-(-8\pi)=12\pi$$

六、(本题满分 7 分)

设不恒为常数的函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)$. 证明在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)>0$.

解. 由于 $f(x)$ 不恒为常数，存在 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)\neq f(a)=f(b)$. 在 $[a,c]$ 或 $[c,b]$ 上应用拉格朗日中值定理即得结论.

七、(本题满分 6 分)

设四阶矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$, 且矩阵 A 满足关系式 $A(E-C^{-1}B)'C'=E$，其中 E 为四阶单位矩阵，C^{-1} 表示 C 的逆矩阵，C' 表示 C 的转置矩阵，将上述关系式化简并求矩阵 A.

解. $E=A(E-C^{-1}B)^TC^T=A(C-B)^T$，故 $A=[(C-B)^T]^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$.

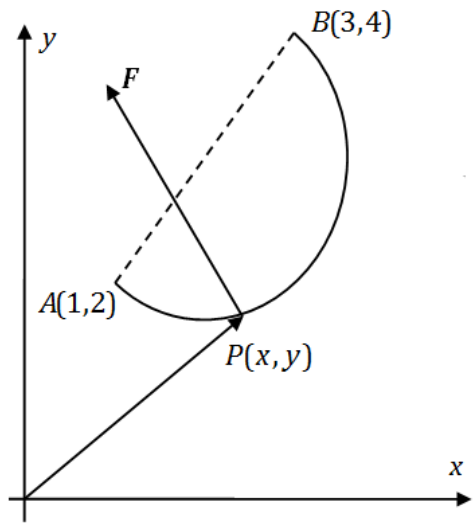
八、（本题满分 8 分）

求一个正交变换化二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 成标准形.

解. 特征值 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$. 正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{4}{3\sqrt{2}}&\frac{1}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{3\sqrt{2}}&-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{3\sqrt{2}}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$.

九、（本题满分 8 分）

质点 P 沿着以 AB 为直径的圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到点 $B(3,4)$ 的过程中受变力 $\vec{F}$ 作用 (见图)，$\vec{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP 且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$. 求变力 $\vec{F}$ 对质点 P 所作的功.



解. $2(\pi-1)$.

十、填空题（本题满分 6 分，每小题 2 分）

1. 已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$，则 X 的概率分布函数 $F(x)=$________.

解. $\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x} & x\geqslant 0\end{cases}$.

2. 设随机事件 A，B 及其和事件 $A\cup B$ 的概率分别是 0.4, 0.3 和 0.6. 若 $\overline{B}$ 表示 B 的对立事件，那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$________.

解. 0.3.

3. 已知离散型随机变量 X 服从参数为 2 的泊松(Poisson)分布,即 $P\{X=k\}=\frac{2^k e^{-2}}{k!}$, $k=0,1,2,\cdots$, 则随机变量 $Z=3X-2$ 的数学期望 $E(Z)=$ ________.

解. 4.

十一、(本题满分 6 分)

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D: 0<x<1, |y|<x$ 内服从均匀分布,求关于 X 的边缘概率密度函数及随机变量 $Z=2X+1$ 的方差 $D(Z)$.

解. 边缘概率密度函数 $f_X(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1 \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 方差 $D(Z)=\frac{2}{9}$.

一九九〇年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷一第一 [4] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 同试卷一第二 [2] 题.

3. 同试卷一第二 [3] 题.

4. 同试卷一第二 [4] 题.

5. 同试卷一第二 [5] 题.

三、计算题（本题满分 15 分，每小题 5 分）

1. 同试卷一第三 [1] 题.

2. 同试卷一第三 [2] 题.

3. 同试卷一第三 [3] 题.

四、计算题（本题满分 18 分，每小题 6 分）

1. 同试卷一第四题.

2. 求微分方程 $x\ln x\,\mathrm{d}y+(y-\ln x)\,\mathrm{d}x=0$ 满足条件 $y\big|_{x=\mathrm{e}}=1$ 的特解.

解. $y=\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{\ln x}\right)$.

3. 过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，该切线与上述抛物线及 x 轴围成一平面图形，求此图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

解. 切线方程为 $y=\frac{1}{2}(x-1)$，旋转体体积 $V=\frac{\pi}{6}$.

五、（本题满分 8 分）

同试卷一第五题.

六、（本题满分 7 分）

同试卷一第六题.

七、（本题满分 6 分）

同试卷一第七题.

八、（本题满分 8 分）

同试卷一第八题.

九、（本题满分 8 分）

同试卷一第九题.

一九九一年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 设 $\begin{cases} x=1+t^2, \\ y=\cos t, \end{cases}$ 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ________.

解. 先求参数方程的一阶导数．得到 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{-\sin t}{2t}$．再求二阶导数，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{-\sin t}{2t}\right)\cdot\frac{1}{2t}=\frac{-2t\cos t+2\sin t}{4t^2}\cdot\frac{1}{2t}=\frac{\sin t-t\cos t}{4t^3}.$$

2. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(1,0,-1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z=$ ________.

解. 对方程两边求全微分，得到

$$\mathrm{d}(xyz)+\frac{\mathrm{d}(x^2+y^2+z^2)}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0.$$

再由全微分的四则运算法则，得到

$$(xy)\mathrm{d}z+(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y)z+\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y+z\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0.$$

令 $x=1,y=0,z=-1$，得 $-\mathrm{d}y+\dfrac{\mathrm{d}x-\mathrm{d}z}{\sqrt{2}}=0$，即 $\mathrm{d}z=\mathrm{d}x-\sqrt{2}\,\mathrm{d}y$.

3. 已知两条直线的方程是 $L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{-1}$；$L_2:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，则过 L_1 且平行于 L_2 的平面方程是 ________.

解. 所求平面 Π 过直线 L_1，因而过 L_1 上的点 $(1,2,3)$；因为 Π 过 L_1 平行于 L_2，于是 Π 平行于 L_1 和 L_2 的方向向量，即 Π 平行于向量 $\vec{l}_1=(1,0,-1)$ 和向量 $\vec{l}_2=(2,1,1)$，且两向量不共线，于是平面 Π 的方程为

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

即 $x-3y+z+2=0$.

4. 已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$ ________.

解. 因为 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}a$，所以 $a=-\dfrac{3}{2}$.

5. 设 4 阶方阵 $A=\begin{pmatrix}5&2&0&0\\2&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}$，则 A 的逆矩阵 $A^{-1}=$________.

解. 由分块矩阵的逆矩阵 $\begin{pmatrix}B&0\\0&C\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1}&0\\0&C^{-1}\end{pmatrix}$，以及二阶矩阵的逆矩阵

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}=\frac{1}{|ad-bc|}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix},$$

可以求得 A 的逆矩阵为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2&0&0\\-2&5&0&0\\0&0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&-\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 曲线 $y=\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$ ································ ( )

(A) 没有渐近线.　　(B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线.　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

解. 应选 (D). 由于函数的定义域为 $x\neq 0$，所以函数的间断点为 $x=0$.

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\frac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=\infty,$$

$$\lim_{x\to \infty}y=\lim_{x\to \infty}\frac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}=\lim_{x\to \infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}+1}{\mathrm{e}^{x^2}-1}=1.$$

所以 $x=0$ 为铅直渐近线，$y=1$ 为水平渐近线.

2. 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\displaystyle\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$，则 $f(x)$ 等于 ······ ( )

(A) $\mathrm{e}^x\ln 2$.　　(B) $\mathrm{e}^{2x}\ln 2$.　　(C) $\mathrm{e}^x+\ln 2$.　　(D) $\mathrm{e}^{2x}+\ln 2$.

解. 应选 (B). 令 $u=\frac{t}{2}$ 即 $t=2u$，得到

$$f(x)=\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2=\int_0^{x}2f(u)\mathrm{d}u+\ln 2,$$

两边对 x 求导，得 $f'(x)=2f(x)$. 解这个可分离变量微分方程，得 $f(x)=C\mathrm{e}^{2x}$，其中 C 是常数. 又因为 $f(0)=\ln 2$，代入得 $C=\ln 2$，即 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\cdot\ln 2$.

3. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 等于$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) 3.　　(B) 7.　　(C) 8.　　(D) 9.

解. 应选 (C)．因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=5-2=3$，所以

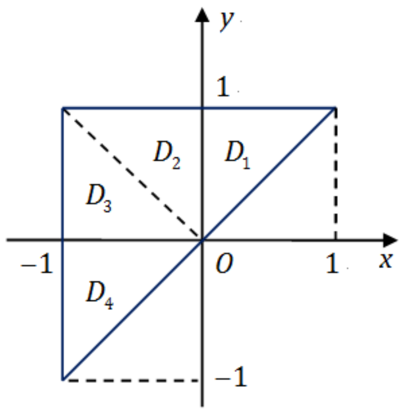
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=5+3=8.$$

4. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1)$，$(-1,1)$ 和 $(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $\iint_D(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 等于$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $2\iint_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.　　(B) $2\iint_{D_1}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(C) $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.　　(D) 0.

解. 应选 (A)．如图，将区域 D 分为 D_1,D_2,D_3,D_4 四个子区域．则 D_1,D_2 关于 y 轴对称，D_3,D_4 关于 x 轴对称．



令 $I_1=\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，$I_2=\iint_D\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$．由于 xy 对 x 及对 y 都是奇函数，所以

$$\iint_{D_1+D_2}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\quad \iint_{D_3+D_4}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

从而 $I_1=0$．而 $\cos x\sin y$ 对 x 是偶函数，对 y 是奇函数，故有

$$\iint_{D_3+D_4}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,\quad \iint_{D_1+D_2}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

所以 $\iint_D(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=I_1+I_2=2\iint_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

5. 设 n 阶方阵 A、B、C 满足关系式 $ABC=E$，其中 E 是 n 阶单位阵，则必有(　　)

(A) $ACB=E$.　　(B) $CBA=E$.　　(C) $BAC=E$.　　(D) $BCA=E$.

解. 应选 (D). $ABC=E$ 知 $BC=A^{-1}$, 从而 $BCA=E$.

三、计算题（本题满分 15 分，每小题 5 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

解. 这是 1^∞ 型未定式求极限. $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\exp\left[\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\pi\ln(\cos\sqrt{x})}{x}\right]$. 而

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\pi\ln(\cos\sqrt{x})}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\pi(\cos\sqrt{x}-1)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\pi\left(\sqrt{x}\right)^2/2}{x}=-\frac{\pi}{2},$$

故 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}=\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}$.

2. 设 $\vec{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量, 求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\vec{n}$ 的方向导数.

解. 曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的法向量为

$$\pm(4x,6y,2z)\big|_P=(4x,6y,2z)\big|_{(1,1,1)}=\pm2(2,3,1).$$

在点 $P(1,1,1)$ 处指向外侧, 取正号, 并单位化得

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2^2+3^2+1}}\{2,3,1\}=\frac{1}{\sqrt{14}}\{2,3,1\}=\left\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right\}.$$

再求函数在点 P 处的偏导数, 如下

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\left.\dfrac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\left.\dfrac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_{(1,1,1)}=\dfrac{6}{\sqrt{14}},\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\left.\dfrac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_P=\left.\dfrac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\right|_{(1,1,1)}=\dfrac{8}{\sqrt{14}},\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_P=-\left.\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_P=-\left.\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\right|_{(1,1,1)}=-\sqrt{14}.\end{cases}$$

所以方向导数

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial n}&=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\\&=\frac{6}{\sqrt{14}}\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+\frac{8}{\sqrt{14}}\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}-\sqrt{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}.\end{aligned}$$

3. 求 $\iiint_\Omega(x^2+y^2+z)\mathrm{d}V$, 其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的曲面与平面 $z=4$ 所围成的立体.

解. 由曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而围成的旋转面方程是 $x^2+y^2=2z$. 于是, Ω 是由旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 与平面 $z=4$ 所围成. 曲面与平面的交线是

$$x^2+y^2=8,z=4.$$

选用柱坐标变换，令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$，于是

$$\Omega: 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi, 0\leqslant z\leqslant 4, 0\leqslant r\leqslant\sqrt{2z}.$$

因此所求体积为

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2+z)\mathrm{d}V=\int_0^4\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(r^2+z)r\,\mathrm{d}r$$
$$=2\pi\int_0^4\left[\left(\frac{r^4}{4}+\frac{r^2z}{2}\right)_{r=0}^{r=\sqrt{2z}}\right]\mathrm{d}z=4\pi\int_0^4 z^2\,\mathrm{d}z=\frac{256}{3}\pi.$$

四、（本题满分 6 分）

在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y=a\sin x(a>0)$ 中，求一条曲线 L，使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $\int_L (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$ 的值最小.

解. 曲线 $y=a\sin x,(x\in[0,\pi])$，则 $\mathrm{d}y=a\cos x\,\mathrm{d}x$，所以

$$I(a)=\int_L (1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^\pi\left(1+a^3\sin^3 x+2ax\cos x+\frac{a^2}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x$$
$$=\pi+a^3\int_0^\pi(\cos^2 x-1)d\cos x+2a\int_0^\pi x\,d\sin x+\frac{a^2}{4}\int_0^\pi\sin 2x\,d2x$$
$$=\pi+a^3\left[\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x\right]_0^\pi+2a\left[x\sin x+\cos x\right]_0^\pi+\frac{a^2}{4}\left[-\cos 2x\right]_0^\pi$$
$$=\pi+\frac{4}{3}a^3-4a.$$

令 $I'(a)=4a^2-4=0$，得 $a=1$. 又因为 $0<a<1$ 时 $I'<0$，$1<a<+\infty$ 时 $I'>0$，故 $a=1$ 为函数 $I(a)$ 的极小值点，也是最小值点. 故所求的曲线为

$$y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

五、（本题满分 8 分）

将函数 $f(x)=2+|x|\,(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅立叶级数，并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解. 先求 $f(x)$ 的傅里叶级数的系数 a_n 和 b_n. 因为 $f(x)$ 为偶函数，所以

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=0(n=1,2,3,\cdots),$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$
$$=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\,\mathrm{d}x=4\int_0^1\cos n\pi x\,\mathrm{d}x+\frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\,d\sin n\pi x$$
$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1\sin n\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\,\mathrm{d}x=5.$$

因 $f(x)=2+|x|$ 在区间 $(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 上满足狄利克雷收敛定理的条件，所以

$$\begin{aligned}f(x)=2+|x|&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)\\&=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\\&=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).\end{aligned}$$

令 $x=0$，有 $2=f(0)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. 又

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

所以 $\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

六、（本题满分 7 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=f(0)$，证明在 $(0,1)$ 内存在一点 c，使 $f'(c)=0$.

解. 由积分中值定理可知，对于 $\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x$，在区间 $\left(\frac{2}{3},1\right)$ 上存在一点 ξ 使得

$$\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}f(\xi),$$

即 $3\int_{\frac{2}{3}}^{1}f(x)\,\mathrm{d}x=f(\xi)=f(0)$. 由罗尔定理可知，存在一点 $c\in(0,\xi)\subset(0,1)$，使得 $f'(c)=0$.

七、（本题满分 8 分）

已知 $\alpha_1=(1,0,2,3)$，$\alpha_2=(1,1,3,5)$，$\alpha_3=(1,-1,a+2,1)$，$\alpha_4=(1,2,4,a+8)$，及 $\beta=(1,1,b+3,5)$.

(I) a,b 为何值时，β 不能表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合?

(II) a,b 为何值时，β 有 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的唯一的线性表示式? 并写出该表示式.

解. 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$，则有

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_2-x_3\alpha_3+2x_4=1\\2x_1+3x_2+(a+2)x_3+4x_4=b+3\\3x_1+5x_2+x_3+(a+8)x_4=5\end{cases}$$

对方程组的增广矩阵作初等行变换，得到

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\2&3&a+2&4&\vdots&b+3\\3&5&1&a+8&\vdots&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&\vdots&1\\0&1&-1&2&\vdots&1\\0&0&a+1&0&\vdots&b\\0&0&0&a+1&\vdots&0\end{pmatrix}$$

(I) 当 $a=-1,\ b\neq 0$ 时，$r(A)<r(\overline{A})$，方程组无解．即不存在 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ 使得 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\beta$ 成立，β 不能表示成 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4$ 的线性组合．

(II) 当 $a\neq-1$ 时，$r(A)=r(\overline{A})$，方程组有唯一解 $\left(-\frac{2b}{a+1},\frac{a+b+1}{a+1},\frac{b}{a+1},0\right)^T$，故 β 有唯一表达式，且 $\beta=-\frac{2b}{a+1}\alpha_1+\frac{a+b+1}{a+1}\alpha_2+\frac{b}{a+1}\alpha_3+0\cdot\alpha_4$．

八、（本题满分 6 分）

设 A 为 n 阶正定阵，E 是 n 阶单位阵，证明 $A+E$ 的行列式大于 1.

解. 方法 1：因为 A 为 n 阶正定阵，故存在正交矩阵 Q，使

$$Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots n)$，$\lambda_i$ 是 A 的特征值．因此

$$Q^T(A+E)Q=Q^TAQ+Q^TQ=\Lambda+E.$$

两端取行列式得

$$|A+E|=|Q^T||A+E||Q|=|Q^T(A+E)Q|=|\Lambda+E|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)>1.$$

方法 2：设 A 的 n 个特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$．由于 A 为 n 阶正定阵，故特征值全大于 0．由 λ 为 A 的特征值可知，存在非零向量 α 使 $A\alpha=\lambda\alpha$，两端同时加上 α，得 $(A+E)\alpha=(\lambda+1)\alpha$．按特征值定义知 $\lambda+1$ 是 $A+E$ 的特征值．因为 $A+E$ 的特征值是 $\lambda_1+1,\lambda_2+1,\cdots,\lambda_n+1$．它们全大于 1，所以 $|A+E|=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+1)>1$.

九、（本题满分 8 分）

在上半平面求一条向上凹的曲线，其上任一点 $P(x,y)$ 处的曲率等于此曲线在该点的法线段 PQ 长度的倒数 (Q 是法线与 x 轴的交点)，且曲线在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴平行.

解. 曲线 $y=y(x)$ 在点 $P(x,y)$ 处的法线方程为 $Y-y=-\frac{1}{y'}(X-x)$（当 $y'\neq 0$ 时），它与 x 轴的交点是 $Q(x+yy',0)$，从而

$$|PQ|=\sqrt{(yy')^2+y^2}=y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}.$$

当 $y'=0$ 时，有 $Q(x,0),|PQ|=y$，上式仍然成立．因此由题意得微分方程

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{y(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}},$$

即 $yy''=1+y'^2$．这是可降阶的高阶微分方程，且当 $x=1$ 时 $y=1,y'=0$．令 $y'=p(y)$，则二阶方程降为一阶方程

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=1+p^2 \qquad\Rightarrow\qquad \frac{p\,\mathrm{d}p}{1+p^2}=\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

解得 $y=C_1\sqrt{1+p^2}$，C_1 为常数．因为当 $x=1$ 时，$y=1,p=y'=0$，所以 $C_1=1$，即 $y=\sqrt{1+p^2}=\sqrt{1+y'^2}$，所以 $y'=\pm\sqrt{y^2-1}$ 即 $\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y^2-1}}=\pm\mathrm{d}x$．两边积分得

$$\ln\left|y+\sqrt{y^2-1}\right|=\pm x+C_2.$$

因曲线在上半平面，所以 $y+\sqrt{y^2-1}>0$，即

$$\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)=\pm x+C_2.$$

当 $x=1$ 时 $y=1$，故 $C_2=\mp 1$，即

$$\ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)=\pm(x-1).$$

当右边取正号时，$y+\sqrt{y^2-1}=\mathrm{e}^{x-1}$，

$$y-\sqrt{y^2-1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{x-1}}=\mathrm{e}^{1-x};$$

当右边取负号时，$y+\sqrt{y^2-1}=\mathrm{e}^{-x+1}$，

$$y-\sqrt{y^2-1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}=\frac{1}{\mathrm{e}^{1-x}}=\mathrm{e}^{x-1};$$

所以始终有 $y=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{x-1}+\mathrm{e}^{1-x}\right]$.

十、填空题（本题满分 6 分，每小题 3 分）

1. 若随机变量 X 服从均值为 2，方差为 σ^2 的正态分布，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$________.

解. 由 $X\sim N(2,\sigma^2)$ 知 $\frac{X-2}{\sigma}\sim N(0,1)$，由标准正态分布函数概率的计算公式有

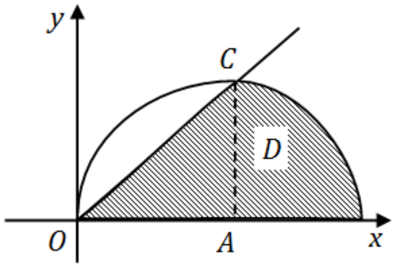
$$0.3=P\{2<x<4\}=\Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right)-0.5,$$

从而 $\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.8$．由正态分布函数的对称性可得到

$$P\{x<0\}=\Phi\left(\frac{0-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(-\frac{2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.2.$$

2. 随机地向半圆 $0<y<\sqrt{2ax-x^2}$（a 为正常数）内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，则原点和该点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$ 的概率为 ________.

解. 设事件 $A=$ “掷的点和原点的连线与 x 轴的夹角小于 $\frac{\pi}{4}$”，



由几何概率公式，得到

$$P(A)=\frac{S_D}{S_{\text{半圆}}}=\frac{S_{\triangle OAC}+S_{\frac{1}{4}\text{圆}}}{S_{\text{半圆}}}=\frac{\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{4}\pi a^2}{\frac{1}{2}\pi a^2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

十一、（本题满分 6 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}, & x>0,y>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=X+2Y$ 的分布函数.

解. 二维连续型随机变量函数的概率等于对应区域的二重积分，所以有

$$F(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+2Y\leqslant z\}=\iint_{x+2y\leqslant z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

当 $z\leqslant 0$ 时，$F(z)=0$. 当 $z>0$ 时，

$$F(z)=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z-x}{2}}2\mathrm{e}^{-(x+2y)}\,\mathrm{d}y=\int_0^z(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-z})\,\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z}.$$

所以 $Z=X+2Y$ 的分布函数为

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<0;\\ 1-\mathrm{e}^{-z}-z\mathrm{e}^{-z}, & z\geqslant 0.\end{cases}$$

一九九一年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷一第一 [4] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 同试卷一第二 [2] 题.

3. 同试卷一第二 [3] 题.

4. 同试卷一第二 [4] 题.

5. 同试卷一第二 [5] 题.

三、计算题（本题满分 15 分，每小题 5 分）

1. 同试卷一第三 [1] 题.

2. 同试卷一第三 [2] 题.

3. 同试卷一第三 [3] 题.

四、计算题（本题满分 18 分，每小题 6 分）

1. 求 $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

解. 令 $x-1=\sec t$，则原式 $=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sec t\tan t}{\sec^4 t\tan t}\,\mathrm{d}t=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

2. 计算 $I=\displaystyle\iint_S -y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=4$ 被平面 $x+z=2$ 和 $z=0$ 所截出部分的外侧.

解. $I=-8\pi$.

3. 同试卷一第四题.

五、（本题满分 8 分）

同试卷一第五题.

六、（本题满分 7 分）

同试卷一第六题.

七、（本题满分 8 分）

同试卷一第七题.

八、（本题满分 6 分）

同试卷一第八题.

九、（本题满分 8 分）

同试卷一第九题.

一九九二年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+y}+\cos(xy)=0$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________.

解. 方程两边对 x 求导，将 y 看做 x 的函数，得到

$$\mathrm{e}^{x+y}(1+y')+\sin(xy)(xy'+y)=0.$$

解出 y'，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=-\frac{\mathrm{e}^{x+y}-y\sin(xy)}{\mathrm{e}^{x+y}-x\sin(xy)}.$$

2. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} u\big|_M=$ ________.

解. 对函数 u 求各个分量的偏导数，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2+z^2};\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

由函数的梯度向量的定义，有

$$\operatorname{grad} u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(2x,2y,2z),$$

所以 $\operatorname{grad} u\big|_M=\dfrac{1}{1^2+2^2+(-2)^2}(2,4,-4)=\dfrac{2}{9}(1,2,-2)$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于 ________.

解. $x=\pi$ 是 $[-\pi,\pi]$ 区间的端点，由收敛性定理—狄利克雷充分条件知，该傅氏级数在 $x=\pi$ 处收敛于

$$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=\frac{1}{2}[-1+1+\pi^2]=\frac{1}{2}\pi^2.$$

4. 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解为 $y=$ ________.

解. 这是一阶线性非齐次方程，由于 $\mathrm{e}^{\int\tan x\,\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{|\cos x|}$，方程两边同乘 $\dfrac{1}{\cos x}$，得

$$\left(\frac{1}{\cos x}y\right)'=1\quad\Rightarrow\quad\frac{1}{\cos x}y=x+C.$$

故通解为 $y=(x+C)\cos x$，C 为任意常数.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}$，其中 $a_i\neq 0,b_i\neq 0(i=1,2\cdots n)$. 则矩阵 A 的秩 $r(A)=$ ________.

解. 因为矩阵 A 中任何两行都成比例，所以 A 的二阶子式全为 0；又由 $a_i\neq 0, b_i\neq 0$ 知道 $a_1 b_1\neq 0$，即 A 中有一阶子式非零，故 $r(A)=1$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　)

(A) 等于 2.　　(B) 等于 0.

(C) 为 ∞.　　(D) 不存在但不为 ∞.

解. 应选 (D). 因为

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^-}(x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=0,\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}(x+1)\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}=\infty,$$

所以当 $x\to 1$ 时函数没有极限，也不是 ∞.

2. 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)$(常数 $\alpha>0$)$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　)

(A) 发散.　　(B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛.　　(D) 收敛性与 α 有关.

解. 应选 (C). 对原级数的通项取绝对值后，利用等价无穷小量得到

$$\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)\right|=1-\cos\frac{\alpha}{n}\sim\frac{\alpha^2}{2n^2}\quad(n\to+\infty).$$

又因为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{n^2}$ 收敛，所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{\alpha}{n}\right)\right|$ 收敛，即原级数绝对收敛.

3. 在曲线 $x=t, y=-t^2, z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　)

(A) 只有 1 条.　　(B) 只有 2 条.　　(C) 至少有 3 条.　　(D) 不存在.

解. 应选 (B). 曲线在任意点处的切向量 $\tau=(x'(t),y'(t),z'(t))=(1,-2t,3t^2)$；又 $n\perp\tau\Leftrightarrow n\cdot\tau=0$，即 $1-4t+3t^3=0$，解得 $t=1$ 或 $t=\frac{1}{3}$. 对应于曲线上的点均不在给定的平面上，因此只有两条这种切线.

4. 设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{n}(0)$ 存在的最高阶数 n 为$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

解. 应选 (C). 因 $3x^3$ 处处任意阶可导，只需考查 $x^2|x|\triangleq\varphi(x)$，它是分段函数，即

$$\varphi(x)=\begin{cases}-x^3, & x<0,\\ x^3, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

对分段函数在对应区间上求导数，得到

$$\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^2, & x<0,\\ 3x^2, & x>0,\end{cases}$$

再考查 $\varphi(x)$ 在连接点 $x=0$ 处的导数:
$$\varphi'_+(0)=(x^3)'_+\big|_{x=0}=0,\quad \varphi'_-(0)=(-x^3)'_-\big|_{x=0}=0 \quad\Rightarrow\quad \varphi'(0)=0.$$
从而有
$$\varphi'(x)=\begin{cases}-3x^2, & x\leqslant 0,\\ 3x^2, & x>0.\end{cases}$$
同理可得 $\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x<0,\\ 6x, & x>0\end{cases}$，$\varphi''(0)=0$，从而有
$$\varphi''(x)=\begin{cases}-6x, & x\leqslant 0\\ 6x, & x>0\end{cases}=6|x|.$$
对于 $y=|x|$ 有 $y'_+(0)=1$, $y'_-(0)=-1$．所以 $y=|x|$ 在 $x=0$ 不可导，即 $\varphi'''(0)$ 不存在.

5. 要使 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ 都是线性方程组 $Ax=0$ 的解，只要系数矩阵 A 为(　)

(A) $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 4 & -2 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

解. 应选 (A)．ξ_1,ξ_2 向量对应的分量不成比例，所以 ξ_1,ξ_2 是 $Ax=0$ 两个线性无关的解，故 $n-r(A)\geqslant 2$．由 $n=3$ 知 $r(A)\leqslant 1$.

三、计算题（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$.

解. 由等价无穷小量代换和洛必达法则，得到
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1-\sin x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\sin x}{1}=\frac{1+0}{1}=1.$$

2. 设 $z=f(\mathrm{e}^x\sin y, x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. 由复合函数求导法则，先对 x 求偏导得
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^x\sin y)+f_2'\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=f_1'\cdot\mathrm{e}^x\sin y+f_2'\cdot 2x.$$
再对 y 求偏导得
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(f_1'\mathrm{e}^x\sin y+f_2'2x)\\&=(f_{11}''\mathrm{e}^x\cos y+f_{12}''2y)\mathrm{e}^x\sin y+f_1'\mathrm{e}^x\cos y+(f_{21}''\mathrm{e}^x\cos y+f_{22}''2y)2x\\&=f_{11}''\cdot\mathrm{e}^{2x}\sin y\cos y+2f_{12}''\cdot\mathrm{e}^x(y\sin y+x\cos y)+4f_{22}''\cdot xy+f_1'\cdot\mathrm{e}^x\cos y.\end{aligned}$$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-x}, & x>0,\end{cases}$ 求 $\int_1^3 f(x-2)\,\mathrm{d}x$.

解. 令 $x-2=t$，则有

$$\int_1^3 f(x-2)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-1}^0\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t+\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^0-\left[\mathrm{e}^{-t}\right]_0^1=\frac{7}{3}-\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

四、（本题满分 6 分）

求微分方程 $y''+2y'-3y=\mathrm{e}^{-3x}$ 的通解.

解. 方程对应的齐次方程的特征方程 $r^2+2r-3=(r-1)(r+3)=0$ 有两个根为 $r_1=1$, $r_2=-3$. 而非齐次项为 $\mathrm{e}^{\alpha x}$，$\alpha=-3=r_2$ 为单特征根，因而非齐次方程有如下形式的特解 $Y=x\cdot a\mathrm{e}^{-3x}$，代入方程可得 $a=-\frac{1}{4}$，故所求通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-3x}-\frac{1}{4}x\mathrm{e}^{-3x},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

五、（本题满分 8 分）

计算曲面积分 $\iint_\Sigma (x^3+az^2)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解. 添加辅助面 $S: z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$ 的下侧，记 S 与 Σ 围成的区域为 Ω，则由高斯公式得到

$$I+\iint\limits_S (x^3+az^2)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y^3+ax^2)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z^3+ay^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=3\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V.$$

用球坐标变换求右端的三重积分得

$$3\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a \rho^2\cdot\rho^2\,\mathrm{d}\rho$$

$$=3\times 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a \rho^4\,\mathrm{d}\rho=3\times 2\pi\times 1\times\frac{1}{5}a^5=\frac{6}{5}\pi a^5.$$

注意 S 垂直于平面 yOz 与平面 xOz，将积分投影到 xOy 平面上，所以左端 S 上的曲面积分为

$$\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0+0+\iint_S R(x,y,0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_S ay^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-a\iint_{D_{xy}} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cdot\sin^2\theta\, r\,\mathrm{d}r$$

$$=-a\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\,d\theta\int_0^a r^3\,dr=-a\times\pi\times\frac{a^4}{4}=-\frac{\pi}{4}a^5.$$

因此 $I=\frac{6}{5}\pi a^5+\frac{\pi}{4}a^5=\frac{29}{20}\pi a^5$.

六、（本题满分 7 分）

设 $f''(x)<0, f(0)=0$，证明对任何 $x_1>0, x_2>0$，有 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

解. **证法一**: 用拉格朗日中值定理来证明．不妨设 $x_2>x_1>0$，要证的不等式是

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0).$$

在 $[0,x_1]$ 上用中值定理，有

$$f(x_1)-f(0)=f'(\xi)x_1,\quad 0<\xi<x_1;$$

在 $[x_2,x_1+x_2]$ 上用中值定理，又有

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)=f'(\eta)x_1,\quad x_2<\eta<x_1+x_2$$

由 $f''(x)<0$，所以 $f'(x)$ 单调减少，而 $\xi<x_1<x_2<\eta$，有 $f'(\xi)>f'(\eta)$，所以

$$f(x_1+x_2)-f(x_2)<f(x_1)-f(0)=f(x_1),$$

即 $f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)$.

证法二：用函数不等式来证明．要证 $f(x_1+x)<f(x_1)+f(x), x>0$．构造辅助函数

$$\varphi(x)=f(x_1)+f(x)-f(x_1+x),$$

则 $\varphi'(x)=f'(x)-f'(x_1+x)$．由 $f''(x)<0, f'(x)$ 单调减少，$\varphi'(x)>0$．因此 $\varphi(x)>\varphi(0)=f(x_1)+f(0)-f(x_1)=0$（$x>0$）．将 x_2 改为 x 即得证.

七、（本题满分 8 分）

在变力 $\vec{F}=yz\vec{i}+zx\vec{j}+xy\vec{k}$ 的作用下，质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 $M(\xi,\eta,\zeta)$．问当 ξ,η,ζ 取何值时，力 $\vec{F}$ 所做的功 W 最大？并求出 W 的最大值.

解. 记点 O 到点 M 的线段为 L，在变力 F 的作用下质点由原点沿 L 运动到点 $M(\xi,\eta,\zeta)$ 时所作的功

$$W=\int_L F\cdot ds=\int_L yz\,dx+zx\,dy+xy\,dz.$$

L 的参数方程是 $x=\xi t, y=\eta t, z=\zeta t$, t 从 0 到 1，因此

$$W=\int_0^1(\eta\zeta t^2\cdot\xi+\xi\zeta t^2\cdot\eta+\xi\eta t^2\cdot\zeta)dt=3\xi\eta\zeta\int_0^1 t^2\,dt=\xi\eta\zeta.$$

问题变成求 $W=\xi\eta\zeta$ 在条件 $\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1$（$\xi\geqslant0,\eta\geqslant0,\zeta\geqslant0$）下的最大值与最大值点．拉格朗日函数为

$$F(\xi,\eta,\zeta,\lambda)=\xi\eta\zeta+\lambda\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\right),$$

则有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \xi}=\eta\zeta+2\lambda\dfrac{\xi}{a^2}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \eta}=\xi\zeta+2\lambda\dfrac{\eta}{b^2}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \gamma}=\xi\eta+2\lambda\dfrac{\zeta}{c^2}=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=\dfrac{\xi^2}{a^2}+\dfrac{\eta^2}{b^2}+\dfrac{\zeta^2}{c^2}-1=0.\end{cases}$$

解此方程组得 $\xi=\frac{1}{\sqrt{3}}a,\eta=\frac{1}{\sqrt{3}}b,\zeta=\frac{1}{\sqrt{3}}c$. 相应的 $W=\frac{1}{3\sqrt{3}}abc=\frac{\sqrt{3}}{9}abc$. 因为实际问题存在最大值，所以当 $(\xi,\eta,\gamma)=(\frac{1}{\sqrt{3}}a,\frac{1}{\sqrt{3}}b,\frac{1}{\sqrt{3}})$ 时 W 取最大值 $\frac{\sqrt{3}}{9}abc$.

八、（本题满分 7 分）

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，问:

(I) α_1 能否由 α_2,α_3 线性表示？证明你的结论.

(II) α_4 能否由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？证明你的结论.

解. (I) α_1 能由 α_2,α_3 线性表示．这是因为已知向量组 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，所以 α_2,α_3 线性无关，又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，故 α_1 能由 α_2,α_3 线性表示.

(II) α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．反证法：若 α_4 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，设

$$\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3.$$

由 (1) 知，α_1 能由 α_2,α_3 线性表示，可设 $\alpha_1=l_1\alpha_2+l_2\alpha_3$，代入上式整理得

$$\alpha_4=(k_1l_1+k_2)\alpha_2+(k_1l_2+k_3)\alpha_3.$$

即 α_4 能由 α_2,α_3 线性表示，从而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，这与已知矛盾．因此 α_4 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

九、（本题满分 7 分）

设 3 阶矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$，对应的特征向量依次为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix},$$

又向量 $\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$. (I) 将 β 用 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性表示．(II) 求 $A^n\beta$（n 为自然数）.

解. (I) 设 $\beta=x_1\xi_1+x_2\xi_2+x_3\xi_3$，即是求此方程组的解．对增广矩阵 $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\beta)$ 作初等行变换有

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&3&1\\1&4&9&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&3&8&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&-2\\0&0&1&1\end{pmatrix}.$$

解出 $x_3=1,x_2=-2,x_1=2$，故 $\beta=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3$.

(II) 由 λ 为 A 的特征值可知，存在非零向量 α 使 $A\alpha=\lambda\alpha$, 从而有 $A^n\alpha=\lambda^n\alpha$. 按特征值定义知 λ^n 是 A^n 的特征值，且 α 为相应的特征向量. 所以 $A\xi_i=\lambda_i\xi_i, A^n\xi_i=\lambda_i^n\xi_i(i=1,2,3)$, 据 (I) 结论 $\beta=2\xi_1-2\xi_2+\xi_3$，于是

$$\begin{aligned}A^n\beta&=A^n(2\xi_1-2\xi_2+\xi_3)\\&=2A^n\xi_1-2A^n\xi_2+A^n\xi_3=2\lambda_1^n\xi_1-2\lambda_2^n\xi_2+\lambda_3^n\xi_3\\&=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-2\cdot2^n\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}+3^n\begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2^{n+1}+3^n\\2-2^{n+2}+3^{n+1}\\2-2^{n+3}+3^{n+2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

十、填空题（本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分）

1. 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=0,P(AC)=P(BC)=\frac{1}{16}$，则事件 A、B、C 全不发生的概率为 ________.

解. 由条件概率和乘法公式：从 $P(AB)=0$，可知 $P(ABC)=P(AB)P(AB|C)=0$. 由加法公式：

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}+0=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

故 $P(\overline{ABC})=P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(A\cup B\cup C)=\frac{3}{8}$.

2. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布，则数学期望 $E(X+\mathrm{e}^{-2X})=$ ________.

解. 依题意，随机变量 X 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，故 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

由连续型随机变量函数的数学期望的公式，有

$$\begin{aligned}E(X+\mathrm{e}^{-2X})&=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+\mathrm{e}^{-2x})f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}(x+\mathrm{e}^{-2x})\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}x=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 与 Y 独立，X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，Y 服从 $[-\pi,\pi]$ 上的均匀分布，试求 $Z=X+Y$ 的概率分布密度（计算结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表

示，其中 $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$）.

解. 因为随机变量 X 与 Y 相互独立，由卷积公式

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(z-y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}y.$$

令 $t=\dfrac{z-y-\mu}{\sigma}$，得到

$$f_Z(z)=\frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}}\int_{(z-\pi-\mu)/\sigma}^{(z+\pi-\mu)/\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\left[\Phi\left(\frac{z+\pi-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{z-\pi-\mu}{\sigma}\right)\right].$$

一九九二年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷一第一 [4] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 同试卷一第二 [2] 题.

3. 同试卷一第二 [3] 题.

4. 同试卷一第二 [4] 题.

5. 同试卷一第二 [5] 题.

三、计算题（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第三 [1] 题.

2. 同试卷一第三 [2] 题.

3. 设 A,B 为 3 阶方阵，E 为 3 阶单位阵，满足 $AB+E=A^2+B$，又知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

解.

$$B=A+I=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}$$

四、计算题（本题共 3 小题，每小题 6 分，满分 18 分）

1. 同试卷一第四题.

2. 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^{x^2}(x^2-t)f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(t)$ 为已知的连续函数.

解. 拆开分别求导，得到 $2x\displaystyle\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t$.

3. 计算 $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y\int_{y}^{\sqrt{y}}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}x$.

解. 交换积分次序，则原式 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}x(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{x})\mathrm{d}x=\frac{3}{8}\mathrm{e}-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}$.

五、（本题满分 8 分）

同试卷一第五题.

六、（本题满分 7 分）

同试卷一第六题.

七、（本题满分 8 分）

同试卷一第七题.

八、（本题满分 7 分）

同试卷一第八题.

九、（本题满分 7 分）

同试卷一第九题.

一九九三年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t$（$x>0$）的单调减少区间为 ________.

解. 若函数 $F(x)$ 严格单调减少，则 $F'(x)=2-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$，即 $\sqrt{x}<\frac{1}{2}$. 所以函数 $F(x)$ 单调减少区间为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

2. 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量为 ________.

解. 旋转面 S 的方程为 $3(x^2+z^2)+2y^2=12$. 令

$$F(x,y,z)=3(x^2+z^2)+2y^2-12.$$

则 S 在点 (x,y,z) 的法向量为

$$\overrightarrow{n}=\pm\left\{\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\}=\pm\{6x,4y,6z\},$$

所以在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的法向量为

$$\overrightarrow{n}=\pm\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\}=\pm2\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}.$$

因指向外侧，故应取正号，单位法向量为

$$\overrightarrow{n_0}=\frac{\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{n}|}=\frac{1}{\sqrt{30}}\{0,2\sqrt{3},3\sqrt{2}\}=\frac{1}{\sqrt{5}}\{0,\sqrt{2},\sqrt{3}\}.$$

3. 设函数 $f(x)=\pi x+x^2$（$-\pi<x<\pi$）的傅里叶级数展开式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

则其中系数 b_3 的值为 ________.

解. 由傅里叶系数的积分表达式得

$$\begin{aligned}b_3&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi x+x^2)\sin 3x\,\mathrm{d}x\\&=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin 3x\,\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin 3x\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin 3x\,\mathrm{d}x+0\\&=2\int_0^{\pi}x\sin 3x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}x d\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)\\&=\left[-\frac{2x}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi}+\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\cos 3x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi.\end{aligned}$$

4. 设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,u)=$ ________.

解. 先计算 u 的梯度，再计算该梯度的散度，得到

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)=\operatorname{div}\left\{\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right\}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

将数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 分别对 x,y,z 求偏导数，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

将 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$ 分别对 x,y,z 求偏导．得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{z^2+x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

因此 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} u)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.

5. 设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零，且 A 的秩为 $n-1$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 ________.

解. 由 A 的各行元素之和均为零，易见 $(1,1,\cdots,1)^T$ 为 $Ax=0$ 的一个非零解．故由 $r(A)=n-1$ 知 $(1,1,\cdots,1)^T$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系，因此 $Ax=0$ 的通解为 $k(1,1,\cdots,1)^T$，其中 k 为任意常数.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,dt$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 · (　　)

(A) 等价无穷小.　　(B) 同阶但非等价无穷小.

(C) 高阶无穷小.　　(D) 低阶无穷小.

解. 应选 (B)．运用洛必达法则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}&=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\,dt}{x^3+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2+4x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin^2 x)}{3x^2+4x^3}\cdot\lim_{x\to0}\cos x=\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin^2 x)}{3x^2+4x^3}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1}{3+4x}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2. 双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 所围成的区域面积可用定积分表示为 · · · · · · · · · (　　)

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta$.　　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,d\theta$.

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\,d\theta$.　　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2\,d\theta$.

解. 应选 (A). 由方程可以看出双纽线关于 x 轴和 y 轴都对称，故只需计算所围图形在第一象限部分的面积. 双纽线的极坐标方程为 $\rho^2=\cos 2\theta$. 显然，在第一象限部分 θ 的变化范围是 $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$. 再由对称性得

$$S=4S_1=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2\,\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

3. 设有直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 $L_2:\begin{cases}x-y=6\\2y+z=3\end{cases}$，则 L_1 与 L_2 的夹角为 $\cdot$ (　　)

(A) $\frac{\pi}{6}$.　　(B) $\frac{\pi}{4}$.　　(C) $\frac{\pi}{3}$.　　(D) $\frac{\pi}{2}$.

解. 应选 (C). L_1 与 L_2 的方向向量分别是

$$\overrightarrow{l_1}=(1,-2,1),\quad \overrightarrow{l_2}=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&-1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=(-1,-1,2).$$

L_1 与 L_2 的夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi=|\cos(\overrightarrow{l}_1,\overrightarrow{l_2})|=\frac{|\overrightarrow{l}_1\cdot\overrightarrow{l_2}|}{|\overrightarrow{l_1}||\overrightarrow{l_2}|}=\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}}=\frac{1}{2},$$

所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

4. 设曲线积分 $\int_L[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y\,\mathrm{d}x-f(x)\cos y\,\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 等于 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^x}{2}$.　　(B) $\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.　　(C) $\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}-1$.　　(D) $1-\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

解. 应选 (B). 在单连通区域上，该曲线积分与路径无关，从而有

$$\frac{\partial}{\partial y}((f(x)-\mathrm{e}^x)\sin y)=\frac{\partial}{\partial x}(-f(x)\cos y)$$
$$\Rightarrow(f(x)-\mathrm{e}^x)\cos y=-f'(x)\cos y.$$

化简得 $f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^x$，即 $\left[\mathrm{e}^x f(x)\right]'=\mathrm{e}^{2x}$. 解之得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C\right).$$

由 $f(0)=0$ 得 $C=-\frac{1}{2}$，因此 $f(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$.

5. 已知 $Q=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&t\\3&6&9\end{pmatrix}$，$P$ 为三阶非零矩阵，且满足 $PQ=O$，则

(A) $t=6$ 时，P 的秩必为 1.　　(B) $t=6$ 时，P 的秩必为 2.

(C) $t\neq6$ 时，P 的秩必为 1.　　(D) $t\neq6$ 时，P 的秩必为 2.

解. 应选 (C). 若 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times s$ 矩阵, $AB=O$, 则 $r(A)+r(B)\leqslant n$.
当 $t=6$ 时, 矩阵的三行元素对应成比例, $r(Q)=1$, 从而 $r(P)\leqslant 2$, 所以 (A) 和 (B) 都不准确.
当 $t\neq 6$ 时, 矩阵的第一行和第三行元素对应成比例, $r(Q)=2$, 从而 $r(P)\leqslant 1$. 又因 $P\neq 0$, 从而 $r(P)=1$ 必成立.

三、计算题（本题共 3 小题, 每小题 5 分, 满分 15 分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

解. $\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\exp\left[x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right]$, 而由等价代换和洛必达法则

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)&=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}\\&=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{1}=2,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^2$.

2. 求 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.

解. 方法一: 由分部积分公式, 得到

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=2\int x\,\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-2\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x.$$

令 $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$, 则 $x=\ln(t^2+1),\mathrm{d}x=\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$, 所以

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x&=\int t\cdot\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1}=2\int\frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t\\&=2t-2\arctan t+C=2\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-2\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.\end{aligned}$$

所以 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C$.

方法二: 令 $\sqrt{\mathrm{e}^x-1}=t$, 则 $\mathrm{e}^x=t^2+1,x=\ln(t^2+1),\mathrm{d}x=\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t^2+1}$, 所以

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x&=2\int\ln(t^2+1)\mathrm{d}t=2t\ln(t^2+1)-2\int t\,\mathrm{d}\ln(t^2+1)\\&=2t\ln(t^2+1)-4\int\frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t=2t\ln(t^2+1)-4(t-\arctan t)+C\\&=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C.\end{aligned}$$

3. 求微分方程 $x^2y'+xy=y^2$, 满足初始条件 $y|_{x=1}=1$ 的特解.

解. 所给方程可写成 $y'=\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{y}{x}$ 的形式, 此方程为齐次方程. 令 $\frac{y}{x}=u$, 则

$$y=xu,y'=u+xu',$$

所以方程可化为

$$u+xu'=u^2-u \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}u}{u(u-2)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

两边积分得到

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-2}{u}\right|=\ln|x|+C_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{u-2}{u}=Cx^2.$$

将 $\frac{y}{x}=u$ 代回上式得 $y-2x=Cx^2y$．代入初始条件 $y|_{x=1}=1$ 得 $C=-1$，故特解为 $y=\frac{2x}{1+x^2}$.

四、（本题满分 6 分）

计算 $\iint_\Sigma 2xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 所围立体的表面外侧.

解. 将积分表成 $I=\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=2z+z-2z=z.$$

记 Σ 围成的区域为 Ω，Σ 取外侧，则由高斯公式得

$$I=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}V.$$

在球坐标下 Ω 为：$0\leqslant\theta\leqslant2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}, 0\leqslant\rho\leqslant\sqrt{2}$，于是

$$\begin{aligned}
I&=\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho\cos\varphi\,\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\\
&=2\pi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\sin\varphi\int_0^{\sqrt{2}}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\\
&=2\pi\cdot\left[\frac{1}{2}\sin^2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^{\sqrt{2}}=2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot1=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

五、（本题满分 7 分）

求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}$ 的和.

解. 先将级数分解：

$$A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

第二个级数是几何级数，它的和可以得到：

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n=\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}.$$

第一个级数的和可用幂级数计算：因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \quad (|x|<1),$$

连续求导两次得到

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right)''=\left(\frac{1}{1+x}\right)''=\frac{2}{(1+x)^3}.$$

当 $x=\frac{1}{2}$ 时得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n n(n-1)}{2^n}=\frac{1}{2^2}S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{4}{27}.$$

因此原级数的和 $A=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}$.

六、证明题（本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分）

1. 设在 $[0,+\infty)$ 上函数 $f(x)$ 有连续导数，且 $f'(x)\geqslant k>0$, $f(0)<0$，证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个零点.

解. 因为 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 为严格单调增函数，故零点至多只有一个．所以只需证明零点的存在性.

证法一：由拉格朗日中值定理可知，在 $(0,x)$ 存在一点 ξ，使得

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0)=xf'(\xi),$$

即 $f(x)=xf'(\xi)+f(0)$．因为 $f'(\xi)\geqslant k>0$，所以当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to+\infty$．又 $f(0)<0$，所以由介值定理可知，必有一点 $\eta\in(0,+\infty)$ 使得 $f(\eta)=0$.

证法二：用牛顿-莱布尼兹公式，由于

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t\geqslant f(0)+\int_0^x k\,\mathrm{d}t=f(0)+kx,$$

以下同方法 1.

2. 设 $b>a>\mathrm{e}$，证明 $a^b>b^a$.

解. 先将不等式做恒等变形：因为 $b>a>\mathrm{e}$，故原不等式等价于

$$b\ln a>a\ln b \quad \text{或} \quad \frac{\ln a}{a}>\frac{\ln b}{b}.$$

证法一：令 $f(x)=x\ln a-a\ln x(x>a>\mathrm{e})$，则

$$f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}.$$

因为 $x>a>\mathrm{e}$，所以 $\ln a>1, \frac{a}{x}<1$，故

$$f'(x)=\ln a-\frac{a}{x}>0.$$

从而 $f(x)$ 在 $x>a>\mathrm{e}$ 时为严格的单调递增函数，故

$$f(x)>f(a)=0,(x>a>\mathrm{e}).$$

由此 $f(b)=b\ln a-a\ln b>0$，即 $a^b>b^a$.

证法二：令 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}(x>\mathrm{e})$，则有

$$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

当 $x\in(\mathrm{e},+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 为单调递减函数，故当 $b>a>\mathrm{e}$ 时有

$$f(b)=\frac{\ln b}{b}<f(a)=\frac{\ln a}{a}$$

成立．即 $a^b>b^a$.

七、（本题满分 8 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$（$a>0$）通过正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求参数 a 及所用的正交变换矩阵.

解. 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$，它的特征方程是

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-a\\0&-a&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0.$$

f 经正交变换化成标准形 $f=y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$, 那么 1,2,5 就是 A 的特征值．把 $\lambda=1$ 代入特征方程得 $a^2-4=0$ 即 $a=\pm 2$. 因 $a>0$ 知 $a=2$. 这时 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$.

对于 $\lambda_1=1$，由 $(E-A)x=0$，$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-2&-2\\0&-2&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $x_1=(0,1-1)^T$.

对于 $\lambda_2=2$，由 $(2E-A)x=0$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&2\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $x_2=(1,0,0)^T$.

对于 $\lambda_3=5$，由 $(5E-A)x=0$，$\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&-2\\0&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$，得 $x_3=(0,1,1)^T$.

将 x_1,x_2,x_3 单位化得

$$\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},\gamma_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

故所用的正交变换矩阵为

$$P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

八、(本题满分 6 分)

设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵，其中 $n<m,E$ 是 n 阶单位矩阵，若 $AB=E$，证明 B 的列向量组线性无关.

解. 因为 B 是 $m\times n$ 矩阵，$n<m$，所以 $r(B)\leqslant n$. 又因 $r(B)\geqslant r(AB)=r(E)=n$，故 $r(B)=n$. 所以 B 的列向量组线性无关.

九、(本题满分 6 分)

设物体 A 从点 $(0,1)$ 出发，以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动. 物体 B 从点 $(-1,0)$ 与 A 同时出发，其速度大小为 $2v$，方向始终指向 A，试建立物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程，并写出初始条件.

解. 设在时刻 t，B 位于点 (x,y) 处，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-(1+vt)}{x},\quad \text{即}\quad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-vt-1.$$

两边对 x 求导得

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-v\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}.$$

又由已知得

$$2v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad \text{即}\quad \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

代入上式得到所求的微分方程为

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

其初始条件为 $y(-1)=0$，$y'(-1)=1$.

十、填空题(本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分)

1. 一批产品共有 10 个正品和 2 个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为________.

解. 由抽签原理 (抽签与先后次序无关)，不放回抽样中第二次抽得次品的概率与第一次抽得次品的概率相同，都是 $\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

2. 设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布，则随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y)=$________.

解. 由已知条件，X 在区间 $(0,2)$ 上服从均匀分布，得 X 的概率密度函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<x<2;\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

先求 F 的分布函数. 当 $0<y<4$ 时,

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\left\{Y\leqslant y\right\}=P\left\{X^2\leqslant y\right\}=P\left\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\right\}\\&=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}F_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{y}}^{0}0\,\mathrm{d}x+\int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{y}}{2}.\end{aligned}$$

故随机变量 $Y=X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率分布密度 $f_Y(y)=F_Y'(y)=\frac{1}{4\sqrt{y}}$.

十一、(本题满分 6 分)

设随机变量 X 的概率分布密度为 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},-\infty<x<+\infty$.

(I) 求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

(II) 求 X 与 $|X|$ 的协方差，并问 X 与 $|X|$ 是否不相关?

(III) 问 X 与 $|X|$ 是否相互独立? 为什么?

解. (I) 由奇偶对称性，随机变量的期望.

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=0.$$

随机变量的方差

$$\begin{aligned}D(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-x^2\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=2(-x\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x)=2(-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty})=2.\end{aligned}$$

(II) 因为 $E(X)=0$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,|X|)&=E(X|X|)-E(X)E(|X|)=E(X|X|)\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2}x|x|\mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x=0.\end{aligned}$$

所以 X 与 $|X|$ 不相关.

(III) 对于任意正实数 a，事件 $\{|X|<a\}$ 包含于事件 $\{X<a\}$，且 $0<P\{X<a\}<1$. 所以

$$P\{X<a,|X|<a\}=P\{|X|<a\},\quad P\{X<a\}P\{|X|<a\}<P\{|X|<a\}.$$

可见 $P\{X<a,|X|<a\}\neq P\{|X|<a\}P\{X<a\}$，因此 X 与 $|X|$ 不独立.

一九九三年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷一第一 [4] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 同试卷一第二 [2] 题.

3. 同试卷一第二 [3] 题.

4. 同试卷一第二 [4] 题.

5. 同试卷一第二 [5] 题.

三、计算题（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第三 [1] 题.

2. 同试卷一第三 [2] 题.

3. 同试卷一第三 [3] 题.

四、计算题（本题共 3 小题，每小题 6 分，满分 18 分）

1. 设 $z=x^3f\left(xy,\dfrac{y}{x}\right)$，$f$ 具有连续二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解.
$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^4f_1'+x^2f_2',$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^5f_{11}''+2x^3f_{12}''+xf_{22}'',$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''.$$

2. 同试卷一第四题.

3. 已知 R^3 的两个基为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\quad 与\quad \beta_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix},$$

求由基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 到基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 的过渡矩阵.

解. 过渡矩阵 $P=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-1&0\\-1&0&-1\end{pmatrix}$.

五、（本题满分 7 分）

同试卷一第五题.

六、（本题满分 10 分）

同试卷一第六题.

七、（本题满分 8 分）

同试卷一第七题.

八、（本题满分 6 分）

同试卷一第八题.

九、（本题满分 6 分）

同试卷一第九题.

一九九四年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ ________.

解. 由洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\cot x\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\cos x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

2. 曲面 $z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程为 ________.

解. 记 $F(x,y,z)=z-\mathrm{e}^z+2xy-3$，则曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 $(1,2,0)$ 的法向量

$$\vec{n}=\left(\frac{\partial F}{\partial x},\frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right)\bigg|_{(1,2,0)}=(2y,2x,1-\mathrm{e}^z)\Big|_{(1,2,0)}=(4,2,0)=2(2,1,0),$$

故切平面方程为 $2(x-1)+(y-2)=0$，即 $2x+y-4=0$.

3. 设 $u=\mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{\pi}\right)$ 处的值为 ________.

解. 混合偏导数在连续条件下与求导次序无关，这里先求 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-x}\cos\frac{x}{y}.$$

再求 $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ 并将该点坐标代入:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\bigg|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\bigg|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\frac{1}{\pi}}\right)\bigg|_{x=2}=\frac{\partial}{\partial x}(-\pi^2 x\mathrm{e}^{-x}\cos\pi x)\Big|_{x=2}$$
$$=(-\pi^2\mathrm{e}^{-x}(1-x)\cos\pi x)\Big|_{x=2}+0=\frac{\pi^2}{\mathrm{e}^2}.$$

4. 设区域 D 为 $x^2+y^2\leqslant R^2$，则 $\displaystyle\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ________.

解. 因 D 关于直线 $y=x$ 对称，故有

$$I=\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

因此，用极坐标计算可得

$$I=\frac{1}{2}\left[\iint_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_D\left(\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\iint_D(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r=\frac{\pi R^4}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

5. 已知 $\alpha=(1,2,3),\beta=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)$, 设 $A=\alpha^T\beta$, 其中 α^T 是 α 的转置, 则 $A^n=$________.

解. 首先我们有

$$\beta\alpha^T=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=3,\quad A=\alpha^T\beta=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.$$

由矩阵乘法的结合律，可以得到

$$\begin{aligned}A^n&=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)\cdots(\alpha^T\beta)=\alpha^T\left(\beta\alpha^T\right)\left(\beta\alpha^T\right)\cdots\left(\beta\alpha^T\right)\beta\\&=3^{n-1}\alpha^T\beta=3^{n-1}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{3}\\2&1&\frac{2}{3}\\3&\frac{3}{2}&1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

二、选择题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,\mathrm{d}x$, $N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\,\mathrm{d}x$,

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\,\mathrm{d}x$，则有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (   )

(A) $N<P<M$. (B) $M<P<N$. (C) $N<M<P$. (D) $P<M<N$.

解. 应选 (D). 由对称区间上定积分的奇偶性质可得

$$M=0,\quad N=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x>0,\quad P=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,\mathrm{d}x<0,$$

因此 $P<M<N$.

2. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)$ 存在是 $f(x,y)$ 在该点连续的 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (   )

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件而非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

解. 应选 (D). $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续不能保证 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$, $f_y'(x_0,y_0)$. 反之, $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在两个偏导数 $f_x'(x_0,y_0)$, $f_y'(x_0,y_0)$ 也不能保证 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续. 二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数存在和在点 (x_0,y_0) 处连续并没有相关性.

3. 设常数 $\lambda>0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (   )

(A) 发散.　　(B) 条件收敛.

(C) 绝对收敛.　　(D) 收敛性与 λ 有关.

解. 应选 (C). 考查取绝对值后的级数. 因

$$\left|\frac{(-1)^n|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|=\left|\frac{a_n}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right)<\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right),$$

又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都收敛，故原级数绝对收敛.

4. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2\neq 0$，则必有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $b=4d$.　　(B) $b=-4d$.　　(C) $a=4c$.　　(D) $a=-4c$.

解. 应选 (D). 这是因为

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2=o(x),\quad\Rightarrow\quad a\tan x+b(1-\cos x)\sim ax\qquad(a\neq 0),$$

$$1-\mathrm{e}^{-x^2}\sim x^2=o(x),\quad\Rightarrow\quad c\ln(1-2x)+d(1-\mathrm{e}^{-x^2})\sim -2cx\qquad(c\neq 0).$$

因此，原式左边 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax}{-2cx}=\frac{a}{-2c}=2=$ 原式右边，从而 $a=-4c$. 当 $a=0,c\neq 0$ 时，极限为 0；当 $a\neq 0,c=0$ 时，极限为 ∞；均与题设矛盾. 此题也可以用洛必达法则计算.

5. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，则向量组 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3+\alpha_4$、$\alpha_4+\alpha_1$ 线性无关.

(B) $\alpha_1-\alpha_2$、$\alpha_2-\alpha_3$、$\alpha_3-\alpha_4$、$\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关.

(C) $\alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3+\alpha_4$、$\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关.

(D) $\alpha_1+\alpha_2$、$\alpha_2+\alpha_3$、$\alpha_3-\alpha_4$、$\alpha_4-\alpha_1$ 线性无关.

解. 应选 (C). 事实上，由 α 的系数构成的行列式，即

$$\begin{vmatrix}1&0&0&-1\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0.$$

因为行列式不为 0，所以 (C) 中向量组线性无关.

(A)：由于 $(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$，所以 (A) 线性相关.

(B)：由于 $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0$，所以 (B) 线性相关.

(D)：由于 $(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_4)+(\alpha_4-\alpha_1)=0$，所以 (D) 线性相关.

三、计算题（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）

1. 设 $\begin{cases}x=\cos(t^2),\\ y=t\cos(t^2)-\displaystyle\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,\mathrm{d}u,\end{cases}$ 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$、$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 在 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 的值.

解. 由参数方程的导数公式可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=t,\qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{(y_x')_t'}{x_t'}=\frac{1}{-2t\sin t^2}.$$

代入参数值 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 得到

$$y_x'\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\qquad y_{xx}''\Big|_{t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

2. 将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数.

解. $f(x)=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x$. 求导得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1\\&=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n}\quad(|x|<1).\end{aligned}$$

由牛顿-莱布尼茨公式得

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{4n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}(|x|<1).$$

3. 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$.

解. 由倍角公式和换元积分法，得到

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x(\cos x+1)}=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2\sin^2x(\cos x+1)}\\&=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1-u)(1+u)^2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{4}\int\frac{(1+u)+(1-u)}{(1-u)(1+u)^2}\mathrm{d}u\\&=-\frac{1}{8}\int\left(\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}+\frac{2}{(1+u)^2}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{8}\left[\ln|1-u|-\ln|1+u|+\frac{2}{(1+u)}\right]+C\\&=\frac{1}{8}\left[\ln(1-\cos x)-\ln(1+\cos x)+\frac{2}{1+\cos x}\right]+C,\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

四、（本题满分 6 分）

计算曲面积分 $\iint_S\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$, 其中 S 是由曲面 $x^2+y^2=R^2$ 及两平面 $z=R$, $z=-R(R>0)$ 所围成立体表面的外侧.

解. S 关于 xy 平面对称，被积函数关于 z 轴对称，所以 $\iint_S\frac{z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=0$，从而

$$I=\iint_S\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint_S\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}.$$

S 是封闭曲面，它围成的区域记为 Ω，记 $I=\iint_S \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$. 用高斯公式得

$$I=\iiint_\Omega \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{R^2+z^2}\right)\mathrm{d}V=\iiint_\Omega \frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}V$$

$$=\int_{-R}^{R}\mathrm{d}z\iint_{D(z)}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{R^2+z^2}=2\pi R^2\int_0^R\frac{1}{R^2+z^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\pi^2R.$$

其中 $D(z)$ 是圆域：$x^2+y^2\leqslant R^2$.

五、（本题满分 9 分）

设 $f(x)$ 具有二阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$，且

$$[xy(x+y)-f(x)y]\mathrm{d}x+[f'(x)+x^2y]\mathrm{d}y=0$$

为一全微分方程，求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

解. 由全微分方程的条件，有

$$\frac{\partial}{\partial y}[xy(x+y)-f(x)y]=\frac{\partial}{\partial x}[f'(x)+x^2y],$$

即 $x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy$，亦即 $f''(x)+f(x)=x^2$. 此方程为常系数二阶线性非齐次方程，解得 $f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2$. 代入原方程，则有

$$[xy^2+2y-(2\cos x+\sin x)y]\mathrm{d}x+[x^2y+2x-2\sin x+\cos x]\mathrm{d}y=0.$$

用凑微分法求左端微分式的原函数:

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)+\mathrm{d}(2xy)+\mathrm{d}\big(y(\cos x-2\sin x)\big)=0.$$

其通解为 $\frac{1}{2}x^2y^2+2xy+y(\cos x-2\sin x)=C$，其中 C 为任意常数.

六、（本题满分 8 分）

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

解. 方法一：由 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0$ 及 $f(x)$ 的连续性得知 $f(0)=0, f'(0)=0$, 再由洛必达法则有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}\frac{\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|.$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

方法二：由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$ 得知 $f(0)=0, f'(0)=0$，在点 $x=0$ 由泰勒公式有：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\theta x)x^2=\frac{1}{2}f''(\theta x)x^2 \quad (0<\theta<1, x\in[-\delta,\delta]).$$

因 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内具有二阶连续导数，则 $\exists\delta>0, f''(x)$ 在 $x\in[-\delta,\delta]$ 有界，即 $\exists M>0$，有 $|f''(x)|\leqslant M, x\in[-\delta,\delta]$．从而

$$\left|f(x)\right|=\frac{1}{2}\left|f''(\theta x)\right|x^2\leqslant\frac{1}{2}Mx^2, \quad x\in[-\delta,\delta].$$

对此 $\delta>0,\exists N, n>N$ 时，

$$0<\frac{1}{n}<\delta\Rightarrow\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}M\frac{1}{n^2}.$$

因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

七、（本题满分 6 分）

已知点 A 与 B 的直角坐标分别为 $(1,0,0)$ 与 $(0,1,1)$．线段 AB 绕 z 轴旋转一周所围成的旋转曲面为 S．求由 S 及两平面 $z=0, z=1$ 所围成的立体体积.

解. 设高度为 z 处的截面 D_z 的面积为 $S(z)$，则所求体积

$$V=\int_0^1 S(z)\,\mathrm{d}z.$$

A,B 所在直线的方向向量为 $(-1,1,1)$，且过 A 点，所以 A,B 所在的直线方程为

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x=1-z, \\ y=z. \end{cases}$$

截面 D_z 是个圆形，其半径的平方 $R^2=x^2+y^2=(1-z)^2+z^2$，则面积

$$S(z)=\pi R^2=\pi[(1-z)^2+z^2],$$

由此得体积

$$\begin{aligned} V&=\int_0^1\pi[(1-z)^2+z^2]\mathrm{d}z=\pi\int_0^1\left(1-2z+2z^2\right)\mathrm{d}z \\ &=\pi\left(z-z^2+\frac{2}{3}z^3\right)\Big|_0^1=\frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

八、（本题满分 8 分）

设四元线性齐次方程组①为 $\begin{cases} x_1+x_2=0, \\ x_2-x_4=0, \end{cases}$ 又已知某线性齐次方程组②的通解为 $k_1(0,1,10)+k_2(-1,2,2,1)$.

(I) 求线性方程组①的基础解系；

(II) 问线性方程组①和②是否有非零公共解？若有，则求出所有的非零公共解. 若没有，则说明理由.

解. (I) 由已知，①的系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&-1\end{pmatrix}$. 由于 $n-r(A)=2$，所以解空间的维数是 2. 取 x_3,x_4 为自由变量，分别令 $(x_3,x_4)=(1,0),(0,1)$, 得①的基础解系可取为 $(0,0,1,0),(-1,1,0,1)$.

(II) 方程组①和②有非零公共解. 将②的通解

$$x_1=-k_2,\quad x_2=k_1+2k_2,\quad x_3=k_1+2k_2,\quad x_4=k_2$$

代入方程组①，则有

$$\begin{cases}-k_2+k_1+2k_2=0\\k_1+2k_2-k_2=0\end{cases}\Rightarrow k_1=-k_2.$$

那么当 $k_1=-k_2\neq 0$ 时，向量

$$k_1(0,1,1,0)+k_2(-1,2,2,1)=k_1(1,-1,-1,-1)$$

是①与②的非零公共解.

九、(本题满分 6 分)

设 A 为 n 阶非零方阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵，当 $A^*=A^T$ 时，证明 $|A|\neq 0$.

解. 证法一：由于 $A^*=A^T$，根据 A^* 的定义有

$$A_{ij}=a_{ij}\quad(\forall i,j=1,2,\cdots,n),$$

其中 A_{ij} 是行列式 $|A|$ 中 a_{ij} 的代数余子式. 由于 $A\neq 0$，不妨设 $a_{ij}\neq 0$，那么

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2\geqslant a_{ij}^2>0,$$

故 $|A|\neq 0$.

证法二：(反证法) 若 $|A|=0$，则

$$AA^*=AA^T=|A|E=0.$$

设 A 的行向量为 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\alpha_i\alpha_i^T=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

于是 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=0\ (i=1,2,\cdots,n)$. 进而有 $A=0$, 这与 A 是非零矩阵相矛盾. 故 $|A|\neq 0$.

十、**填空题**(本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分)

1. 已知 A,B 两个事件满足条件 $P(AB)=P(\overline{AB})$，且 $P(A)=p$，则 $P(B)=$________.

解. 由随机事件的概率运算性质有

$$P(\overline{AB})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$$

$$=1-[P(A)+P(B)-P(AB)]$$

$$=1-P(A)-P(B)+P(AB).$$

因题目已知 $P(AB)=P(\overline{AB})$，故有

$$P(A)+P(B)=1 \quad \Rightarrow \quad P(B)=1-P(A)=1-p.$$

2. 设相互独立的两个随机变量 X、Y 具有同一分布律，且 X 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为 ________.

解. 由于 X、Y 相互独立且同分布，只能取 0、1 两个数值，易见随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 只取 0 与 1 两个可能的值，且

$$P\{Z=0\}=P\{\max\{X,Y\}=0\}$$

$$=P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}\cdot P\{Y=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=1\}=1-P\{Z=0\}=\frac{3}{4}.$$

所以随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为:

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

十一、（本题满分 6 分）

已知随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(1,3^2)$ 和 $N(0,4^2)$, X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$，设 $Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$.

(I) 求 Z 的数学期望 $E(Z)$ 和方差 $D(Z)$;

(II) 求 X 与 Z 的相关系数 ρ_{XZ};

(III) 问 X 与 Z 是否相互独立？为什么？

解. (I) 由 $X\sim N(1,3^2), Y\sim N(0,4^2)$，知

$$E(X)=1, D(X)=9, E(Y)=0, D(Y)=16.$$

由数学期望和方差的性质得

$$EZ=\frac{1}{3}EX+\frac{1}{2}EY=\frac{1}{3},$$

$$DZ=\frac{1}{9}DX+\frac{1}{4}DY+\frac{1}{3}\operatorname{Cov}(X,Y)$$

$$=\frac{1}{9}\times 9+\frac{1}{4}\times 16+\frac{1}{3}\rho_{XY}\cdot\sqrt{D(X)}\cdot\sqrt{D(Y)}$$

$$=5+\frac{1}{3}\times(-\frac{1}{2})\times 3\times 4=3.$$

(II) 由协方差的性质得

$$\operatorname{Cov}(X,Z)=\operatorname{Cov}(X,\frac{1}{3}X+\frac{1}{2}Y)$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{Cov}(X,X) + \frac{1}{2}\operatorname{Cov}(X,Y)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 3^2 + \frac{1}{2}(-6) = 0,$$

所以 $\rho_{XZ} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}} = 0.$

(III) 由于 (X,Y) 服从二维正态分布，则其线性组合构成的随机变量也服从二维正态分布，而 $Z = \frac{X}{3} + \frac{Y}{2}, X = X + 0Y$，故 X 和 Z 都是其线性组合，则 (X,Z) 服从二维正态分布，根据 $\rho_{XZ} = \frac{\operatorname{Cov}(X,Z)}{\sqrt{DX}\sqrt{DZ}} = 0$，所以 X 与 Z 是相互独立的.

一九九四年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷一第一 [4] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 同试卷一第二 [2] 题.

3. 同试卷一第二 [3] 题.

4. 同试卷一第二 [4] 题.

5. 同试卷一第二 [5] 题.

三、计算题（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第三 [1] 题.

2. 同试卷一第三 [2] 题.

3. 同试卷一第三 [3] 题.

四、计算题（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分）

1. 在椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

解. 由拉格朗日乘数法，求得 $\left(\frac{8}{5},\frac{3}{5}\right)$ 为所求的点.

2. 同试卷一第四 [1] 题.

五、（本题满分 9 分）

同试卷一第五题.

六、（本题满分 8 分）

同试卷一第六题.

七、（本题满分 6 分）

同试卷一第七题.

八、解答题（本题共 2 小题，满分 14 分）

1.（本题满分 6 分）设 A 是 n 阶方阵，$2, 4, 6, \cdots, 2n$ 是 A 的 n 个特征值，E 是 n 阶单位阵，计算行列式 $|A-3E|$ 的值.

解. 因 A 的 n 个特征值为 $2, 4, 6, \cdots, 2n$，故 $A-3E$ 的 n 个特征值为 $-1, 1, 3, \cdots, 2n-3$，所以 $|A-3E| = (-1)\times 1\times 3\times(2n-3) = -[(2n-3)!!]$.

2. 同试卷一第八题.

九、（本题满分 6 分）

同试卷一第九题.

一九九五年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________.

解. $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim\limits_{x\to0}\left[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^6.$

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{0}x\cos t^2\,\mathrm{d}t=$ ________.

解. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{x^2}^{0}x\cos t^2\,\mathrm{d}t=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x\int_{x^2}^{0}\cos t^2\,\mathrm{d}t\right)=\int_{x^2}^{0}\cos t^2\,\mathrm{d}t-2x^2\cos x^4.$

3. 设 $(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=2$, 则 $[(\vec a+\vec b)\times(\vec b+\vec c)]\cdot(\vec c+\vec a)=$ ________.

解. 利用向量运算律有

$$\begin{aligned}\left[(\vec a+\vec b)\times(\vec b+\vec c)\right]\cdot(\vec c+\vec a)&=[(\vec a+\vec b)\times\vec b]\cdot(\vec c+\vec a)+[(\vec a+\vec b)\times\vec c]\cdot(\vec c+\vec a)\\&=(\vec a\times\vec b+\vec b\times\vec b)\cdot(\vec c+\vec a)+(\vec a\times\vec c+\vec b\times\vec c)\cdot(\vec c+\vec a)\\&=(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c+(\vec a\times\vec b)\cdot\vec a+(\vec a\times\vec c)\cdot\vec c+(\vec b\times\vec c)\cdot\vec a\\&=(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c+(\vec b\times\vec c)\cdot\vec a=(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c+(\vec a\times\vec b)\cdot\vec c=4\end{aligned}$$

4. 幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$ 的收敛半径 $R=$ ________.

解. 令 $a_n=\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}$，则当 $n\to\infty$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\dfrac{n+1}{2^{n+1}+(-3)^{n+1}}x^{2(n+1)-1}\right|}{\left|\dfrac{n}{2^n+(-3)^n}x^{2n-1}\right|}$$

$$=\lim_{n\to\infty}x^2\cdot\left|\frac{n+1}{n}\right|\cdot\left|\frac{3^n\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+(-1)^n\right]}{3^{n+1}\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}+(-1)^{n+1}\right]}\right|=\frac13x^2,$$

而当 $\frac13x^2<1$ 时，幂级数收敛，即 $|x|<\sqrt3$ 时，此幂级数收敛，当 $\frac13x^2>1$ 时，即 $|x|>\sqrt3$ 时，此幂级数发散，因此收敛半径为 $R=\sqrt3$.

5. 设三阶方阵 A、B 满足关系式：$A^{-1}BA=6A+BA$，且 $A=\begin{pmatrix}\frac13&0&0\\0&\frac14&0\\0&0&\frac17\end{pmatrix}$，则 $B=$ ________.

解. 在已知等式 $A^{-1}BA=6A+BA$ 两边右乘以 A^{-1}, 得 $A^{-1}B=6E+B$, 即 $(A^{-1}-E)B=6E$．因为

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&4&0\\0&0&7\end{pmatrix},$$

所以

$$B=6(A^{-1}-E)^{-1}=6\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&0\\0&0&6\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设有直线 $L:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0\end{cases}$ 及平面 $\Pi:4x-2y+z-3=0$，则直线 L (　　)

(A) 平行于 Π.　　(B) 在 Π 上.　　(C) 垂直于 Π.　　(D) 与 Π 斜交.

解. 应选 (C)．直线 L 的方向向量

$$l=\begin{vmatrix}i&j&k\\1&3&2\\2&-1&-10\end{vmatrix}=-28i+14j-7k=-7(4i-2j+k),$$

平面 Π 的法向量 $n=4i-2j+k, l\parallel n$，即 $L\perp\Pi$.

2. 设在 $[0,1]$ 上 $f''(x)>0$，则 $f'(0),f'(1),f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是(　　)

(A) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$.　　(B) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$.

(C) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$.　　(D) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$.

解. 应选 (B)．由 $f''(x)>0$ 可知 $f'(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上为严格单调递增函数，故

$$f'(1)>f'(x)>f'(0),\quad (0<x<1).$$

由微分中值定理，$f(1)-f(0)=f'(\xi),\quad (0<\xi<1)$．所以

$$f'(1)>f(1)-f(0)=f'(\xi)>f'(0).$$

3. 设 $f(x)$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导的(　　)

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分条件但非必要条件.

(C) 必要条件但非充分条件.　　(D) 既非充分条件又非必要条件.

解. 应选 (A)．充分性：因为 $f(0)=0$，所以

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0),$$

由此可得 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

必要性：设 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则 $f(x)\cdot|\sin x|$ 在 $x=0$ 处可导，由可导的充要条件知

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)\cdot|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)\cdot|\sin x|}{x}.$$

根据重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，可得

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\sin x|}{x}=-\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=-1,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{|\sin x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

因此我们有 $f(0)=-f(0)$，故 $f(0)=0$.

4. 设 $u_n=(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数……………………………………( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都收敛.

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 都发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散.

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 收敛.

解. 应选 (C). $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 是交错级数，显然 $\ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 单调下降趋于零，由莱布尼兹判别法知，该级数收敛. 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 中，

$$u_n^2=\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2=\frac{1}{n}$$

根据正项级数的比较判别法以及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散，得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 发散.

5. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{31}+a_{11}&a_{32}+a_{12}&a_{33}+a_{13}\end{pmatrix}$$

$P_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，则必有……………………………( )

(A) $AP_1P_2=B$. (B) $AP_2P_1=B$. (C) $P_1P_2A=B$. (D) $P_2P_1A=B$.

解. 应选 (C). P_1 是交换单位矩阵的第一、二行所得初等矩阵，P_2 是将单位矩阵的第一行加到第三行所得初等矩阵；而 B 是由 A 先将第一行加到第三行，然后再交换第一、二行两次初等交换得到的，因此 $P_1P_2A=B$.

三、计算题（本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分）

1. 设 $u=f(x,y,z)$, $\varphi(x^2,e^y,z)=0$, $y=\sin x$，其中 f,φ 都具有一阶连续偏导数，且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求 $\dfrac{du}{dx}$.

解. 方程 $\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 两边对 x 求导，其中 $y=\sin x$，可得

$$\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\cdot e^y\cos x+\varphi_3'\cdot\frac{dz}{dx}=0.$$

解得

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{\varphi_3'}\left(\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\cdot e^y\cos x\right).$$

再将 $u=f(x,y,z)$ 对 x 求导，其中 $y=\sin x$, $z=z(x)$，可得

$$\frac{du}{dx}=f_1'+f_2'\cdot\cos x+f_3'\cdot\frac{dz}{dx}.$$

将前面式子代入得

$$\frac{du}{dx}=f_1'+f_2'\cdot\cos x-f_3'\cdot\frac{1}{\varphi_3'}\left(\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\cdot e^y\cos x\right).$$

2. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，并设 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=A$，求 $\displaystyle\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

解. **方法一：** 交换积分次序，并注意定积分与积分变量无关，得到

$$I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 dy\int_0^y f(x)f(y)dx=\int_0^1 dx\int_0^x f(y)f(x)dy.$$

从而得到

$$\begin{aligned}2I&=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy+\int_0^1 dx\int_0^x f(x)f(y)dy\\&=\int_0^1 dx\int_0^1 f(x)f(y)dy=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1 f(y)dy=A^2.\end{aligned}$$

所以 $I=\frac{1}{2}A^2$.

方法二： 用分部积分法. 注意 $d\left(\displaystyle\int_x^1 f(y)dy\right)=-f(x)dx$，将累次积分 I 写成

$$\begin{aligned}I=\int_0^1\left(f(x)\int_x^1 f(y)dy\right)dx&=-\int_0^1\int_x^1 f(y)dy\,d\left(\int_x^1 f(y)dy\right)\\&=-\frac{1}{2}\left[\left(\int_x^1 f(y)dy\right)^2\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{2}A^2.\end{aligned}$$

四、计算题（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分）

1. 计算曲面积分 $\displaystyle\iint_\Sigma z\,dS$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 内的部分.

解. 将曲面积分 I 化为二重积分 $I=\iint_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 首先确定被积函数:

$$f(x,y)=z\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

其次确定积分区域即 Σ 在 xOy 平面的投影区域 D_{xy}: $x^2+y^2\leqslant 2x$, 即 $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$. 因此

$$I=\iint_{D_{xy}}\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

作极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 则

$$D_{xy}:0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},$$

因此

$$I=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r\cdot r\,\mathrm{d}r=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{32}{9}\sqrt{2}.$$

2. 将函数 $f(x)=x-1$（$0\leqslant x\leqslant 2$）展开成周期为 4 的余弦级数.

解. 这是将 $f(x)$ 作偶延拓后再作周期为 4 的周期延拓. 于是得 $f(x)$ 的傅氏系数:

$$b_n=0\qquad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$a_0=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_0^2=0,$$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x=\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)\mathrm{d}\left(\sin\frac{n\pi}{2}x\right)$$

$$=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi}{2}x\,\mathrm{d}x=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2=\frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}\qquad k=1,2,3,\cdots$$

于是 $f(x)$ 有展开式

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x,\quad x\in[0,2].$$

五、（本题满分 7 分）

设曲线 L 位于 xOy 平面的第一象限内, L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交, 交点记为 A. 已知 $|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$, 且 L 过点 $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$, 求 L 的方程.

解. 设点 M 的坐标为 (x,y), 则 M 处的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x).$$

令 $X=0$, 得 $Y=y-xy'$, 切线与 y 轴的交点为 $A(0,y-xy')$. 由 $|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$, 可得

$$\sqrt{x^2+(xy')^2}=\left|y-xy'\right|.$$

化简后得伯努利方程

$$2yy'-\frac{1}{x}y^2=-x, \quad \Rightarrow \quad \left(y^2\right)'-\frac{1}{x}y^2=-x.$$

令 $z=y^2$，方程化为一阶线性方程

$$(z)'-\frac{1}{x}z=-x.$$

解得 $z=x(c-x)$，即 $y^2=cx-x^2$，亦即 $y=\sqrt{cx-x^2}$. 又由 $y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$，得 $c=3$,L 的方程为 $y=\sqrt{3x-x^2}(0<x<3)$.

六、（本题满分 8 分）

设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续偏导数，曲线积分 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，并且对任意 t 恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

求 $Q(x,y)$.

解. 在平面上 $\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关 (其中 P,Q 有连续偏导数)，则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=2x.$$

对 x 积分得 $Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$，其中 $\varphi(y)$ 待定. 代入另一等式得对 $\forall t$，

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\,\mathrm{d}x+\left(x^2+\varphi(y)\right)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\,\mathrm{d}x+\left(x^2+\varphi(y)\right)\mathrm{d}y.$$

下面由此等式求 $\varphi(y)$.

方法一：易求得原函数

$$\begin{aligned}2xy\,\mathrm{d}x+\left(x^2+\varphi(y)\right)\mathrm{d}y&=y\,\mathrm{d}(x^2)+x^2\mathrm{d}y+\varphi(y)\mathrm{d}y\\&=\mathrm{d}(x^2y)+\mathrm{d}\left(\int_0^y\varphi(s)\mathrm{d}s\right)=\mathrm{d}\left(x^2y+\int_0^y\varphi(s)\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

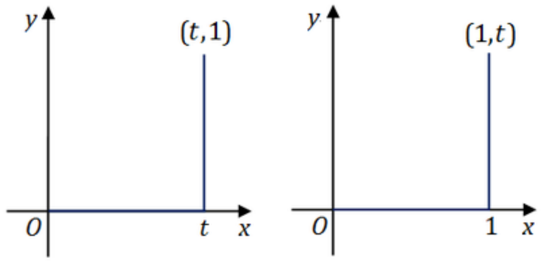
于是由前面曲线积分等式得

$$\left(x^2y+\int_0^y\varphi(s)\mathrm{d}s\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(t,1)}=\left(x^2y+\int_0^y\varphi(s)\mathrm{d}s\right)\Bigg|_{(0,0)}^{(1,t)}$$

$$\Rightarrow \quad t^2+\int_0^1\varphi(s)\mathrm{d}s=t+\int_0^t\varphi(s)\mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad t^2=t+\int_1^t\varphi(s)\mathrm{d}s.$$

求导得 $2t=1+\varphi(t)$，即 $\varphi(t)=2t-1$. 因此 $Q(x,y)=x^2+2y-1$.

方法二：取特殊的积分路径：对前面曲线积分等式左端与右端分别取积分路径如下图所示.



于是得

$$\int_0^1 \left(t^2+\varphi(y)\right)\mathrm{d}y=\int_0^t \left(1+\varphi(y)\right)\mathrm{d}y$$

$$\Rightarrow\quad t^2+\int_0^1 \varphi(s)\mathrm{d}s=t+\int_0^t \varphi(s)\mathrm{d}s\quad\Rightarrow\quad t^2=t+\int_1^t \varphi(s)\mathrm{d}s.$$

其余与方法一相同.

七、（本题满分 8 分）

假设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且

$$g''(x)\neq 0,\quad f(a)=f(b)=g(a)=g(b).$$

试证:

(I) 在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$;

(II) 在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

解. (I) 反证法: 假设 $\exists c\in(a,b)$, 使 $g(c)=0$. 则由罗尔定理, $\exists \xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$, 使 $g'(\xi_1)=g'(\xi_2)=0$；从而由罗尔定理，$\exists \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,b)$，使得 $g''(\xi)=0$. 这与 $g''(x)\neq 0$ 矛盾.

(II) 令 $\varphi(x)=f(x)g'(x)-f'(x)g(x)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，$\varphi(a)=\varphi(b)=0$. 由罗尔定理，$\exists\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$. 即有

$$f(\xi)g''(\xi)-f''(\xi)g(\xi)=0\quad\Rightarrow\quad \frac{f(\xi)}{g(\xi)}=\frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

八、（本题满分 7 分）

设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于 λ_1 的特征向量为 $\xi_1=(0,1,1)^T$，求 A.

解. 设对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为 $\xi=(x_1,x_2,x_3)^T$，因为 A 为实对称矩阵，且实对称矩阵的不同特征值所对应的特征向量相互正交，故 $\xi^T\xi_1=0,x_2+x_3=0$. 解之得 $\xi_2=(1,0,0)^T,\xi_3=(0,1,-1)^T$. 于是有 $A(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,\lambda_3\xi_3)$，所以

$$A=(\lambda_1\xi_1,\lambda_2\xi_2,\lambda_3\xi_3)(\xi_1,\xi_2,\xi_3)^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}.$$

九、（本题满分 6 分）

设 A 是 n 阶矩阵，满足 $AA^T=E$(E 是 n 阶单位阵，A^T 是 A 的转置矩阵),$|A|<0$，求 $|A+E|$.

解. 方法一：根据 $AA^T=E$ 有

$$|A+E|=|A+AA^T|=|A(E+A^T)|=|A||E+A|=|A||A+E|.$$

移项得 $(1-|A|)|A+E|=0$. 因为 $|A|<0$，故 $1-|A|>0$. 所以 $|A+E|=0$.

方法二：因为

$$\left|(A+E)A^T\right|=\left|AA^T+A^T\right|=\left|E+A^T\right|=|E+A|,$$

所以 $|A+E||A|=|E+A|$, 即 $(1-|A|)|A+E|=0$. 因为 $|A|<0$，故 $1-|A|>0$. 所以 $|A+E|=0$.

十、**填空题**（本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分）

1. 设 X 表示 10 次独立重复射击命中目标的次数，每次射中目标的概率为 0.4，则 X^2 的数学期望 $E(X^2)=$ ________.

解. 由题设，因为是独立重复实验，所以 X 服从 $n=10,p=0.4$ 的二项分布. 由二项分布的数学期望和方差计算公式，有

$$E(X)=np=4,D(X)=np(1-p)=2.4,$$

根据方差性质有

$$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=18.4.$$

2. 设 X 和 Y 为两个随机变量，且

$$P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{3}{7},\qquad P(X\geqslant 0)=P(Y\geqslant 0)=\frac{4}{7},$$

则 $P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=$ ________.

解. 令 $A=\{X<0\},B=\{Y<0\}$，则

$$P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=1-P\{\max(X,Y)<0\}=1-P\{X<0,Y<0\}.$$

由概率的广义加法公式 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，有

$$\begin{aligned}P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}&=1-[1-P(\overline{AB})]=P(\overline{A}+\overline{B})\\&=P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{AB})=\frac{4}{7}+\frac{4}{7}-\frac{3}{7}=\frac{5}{7}.\end{aligned}$$

十一、（本题满分 6 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 求随机变量 $Y=e^X$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解. **方法 1**：先求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$. 当 $y\leqslant 1$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y>1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P(e^X\leqslant y)=P\left\{X\leqslant \ln y\right\}$$
$$=\int_0^{\ln y} e^{-x}\,dx=-e^{-x}\Big|_0^{\ln y}=1-\frac{1}{y}.$$

对分布函数求导，可得

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y>1,\\ 0, & y\leqslant 1.\end{cases}$$

方法 2：用单调函数公式直接求 Y 的概率密度. 由于 $y=e^x$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调，其反函数 $x=h(y)=\ln y$ 在 $(1,+\infty)$ 内可导且其导数为 $x_y'=\dfrac{1}{y}\neq 0$, 则所求概率密度函数为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\left|h'(y)\right|\cdot f_X\left(h(y)\right), & y>1,\\ 0, & y\leqslant 1.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}\cdot e^{-\ln y}, & y>1,\\ 0, & y\leqslant 1.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{y^2}, & y>1,\\ 0, & y\leqslant 1.\end{cases}$$

一九九五年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷一第一 [4] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 同试卷一第二 [2] 题.

3. 同试卷一第二 [3] 题.

4. 同试卷一第二 [4] 题.

5. 同试卷一第二 [5] 题.

三、计算题（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第三 [1] 题.

2. 求曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 平行于平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程.

解. $2x+2y-z-3=0$.

3. 计算二重积分 $\displaystyle\int_D x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由双曲线 $x^2-y^2=1$ 及直线 $y=0,y=1$ 所围成的平面区域.

解. $\dfrac{2}{15}(4\sqrt{2}-1)$.

四、计算题（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分）

1. 同试卷一第四 [1] 题.

2. 同试卷一第四 [2] 题.

五、（本题满分 8 分）

同试卷一第五题.

六、（本题满分 7 分）

同试卷一第六题.

七、（本题满分 8 分）

同试卷一第七题.

八、解答题（本题共 2 小题，每小题 7 分，满分 14 分）

1. 设 $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3+x_4=1, \\ x_2+ax_3-ax_4=-1, \\ x_1+2x_2+3x_4=3, \end{cases}$ 问 a 为何值时方程组有解，并在有解时求出方程组的通解.

解. 当 $a\neq 2$ 时，方程组有解，其通解为

$$x=k\left(-3,0,1,1\right)^T+\left(\frac{7a-10}{a-2},\frac{2-2a}{a-2},\frac{1}{a-2},0\right)^T,$$

其中 k 为任意常数.

2. 同试卷一第八题.

九、（本题满分 7 分）

同试卷一第九题.

一九九六年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$ ________.

解. 由等价无穷小量代换，可得

$$8=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^x$$
$$=\exp\left[\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)\right]=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{3ax}{x-a}\right)=e^{3a},$$

因此 $a=\frac{1}{3}\ln 8=\ln 2$.

2. 设一平面经过原点及点 $(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直，则此平面方程为 ________.

解. 所求平面过原点 O 与 $M_0(6,-3,2)$，其法向量 $\vec{n}\perp\overrightarrow{OM_0}=(6,-3,2)$；平面垂直于已知平面 $4x-y+2z=8$，它们的法向量也互相垂直：$\vec{n}\perp\vec{n}_0=(4,-1,2)$；由此

$$\vec{n}//\overrightarrow{OM_0}\times\vec{n}_0=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 6 & -3 & 2\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=-4\vec{i}-4\vec{j}+6\vec{k}.$$

取 $\vec{n}=2\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$，则所求的平面方程为 $2x+2y-3z=0$.

3. 微分方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 的通解为 ________.

解. 微分方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 所对应齐次微分方程的特征方程为 $r^2-2r+2=0$，解之得 $r_{1,2}=1\pm i$. 故对应齐次微分方程的解为

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

由于非齐次项为 $e^{\alpha x},\alpha=1$ 不是特征根,设所给非齐次方程的特解为 $y^*(x)=ae^x$，代入 $y''-2y'+2y=e^x$ 得 $a=1$，故所求通解为

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^x=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x+1),$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

4. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在 $A(1,0,1)$ 点处沿 A 点指向 $B(3,-2,2)$ 点方向的方向导数为 ________.

解. 将 $\overrightarrow{AB}=\{3-1,-2-0,2-1\}=\{2,-2,1\}$ 单位化，即得

$$\overrightarrow{l}=\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{1}{3}\{2,-2,1\}=\left\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right\}.$$

将函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 分别对 x,y,z 求偏导数得

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{y}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\left.\frac{z}{(x+\sqrt{y^2+z^2})\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{(1,0,1)}=\frac{1}{2}.$$

所以方向导数

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_A&=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A\cos\gamma\\&=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+0\times(-\frac{2}{3})+\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

5. 设 A 是 4×3 矩阵，且 A 的秩 $r(A)=2$，而 $B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$，则 $r(AB)=$________.

解. 因为 $|B|=\begin{vmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{vmatrix}=10\neq0$，所以矩阵 B 可逆，故 $r(AB)=r(A)=2$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 已知 $\frac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$ 为某函数的全微分，则 a 等于$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) 1.　　(D) 2.

解. 应选 (D). 设有函数 $u(x,y)$ 使得 $\mathrm{d}u=\frac{(x+ay)\mathrm{d}x}{(x+y)^2}+\frac{y\,\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x+ay}{(x+y)^2},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{(x+y)^2}.$$

分别对 y 和 x 求偏导数得

$$\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}=\frac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3},\quad\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=\frac{-2y}{(x+y)^3}.$$

由于 $\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}$ 与 $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$ 连续，所以 $\frac{\partial^2u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$，即

$$\frac{(a-2)x-ay}{(x+y)^3}=\frac{-2y}{(x+y)^3}\quad\Rightarrow\quad a=2.$$

2. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f'(0)=0,\lim\limits_{x\to0}=\frac{f''(x)}{|x|}=1$，则$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(C) $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解. 应选 (B). 因为 $f(x)$ 有二阶连续导数, 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{|x|}=1>0,$$

所以由函数极限的局部保号性可知, 在 $x=0$ 的空心邻域内有

$$\frac{f''(x)}{|x|}>0,$$

即 $f''(x)>0$, 所以 $f'(x)$ 为单调递增. 又由 $f'(0)=0, f'(x)$ 在 $x=0$ 由负变正, 由极值的第一充分条件, $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 即 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

3. 设 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,常数 $\lambda\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ (　　)

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性与 λ 有关.

解. 应选 (A). 若正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 也收敛, 且当 $n\to+\infty$ 时, 有

$$\lim_{n\to+\infty}n\tan\frac{\lambda}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\tan\frac{\lambda}{n}}{\frac{\lambda}{n}}\cdot\lambda=\lambda.$$

用比较判别法的极限形式, 有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\tan\frac{\lambda}{n}a_{2n}}{a_{2n}}=\lambda>0.$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛, 所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}n\tan\frac{\lambda}{n}a_{2n}$ 也收敛, 所以原级数绝对收敛.

4. 设 $f(x)$ 有连续的导数, $f(0)=0, f'(0)\neq 0, F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$, 且当 $x\to 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k 等于$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

解. 应选 (C). 对 $F(x)=x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t$ 求导得

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

由洛必达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}&=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^{k-1}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}.\end{aligned}$$

因为 $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 且 $f'(0)\neq 0$, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}$$

为常数，即 $k=3$ 时有

$$\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}}=f'(0)\neq0.$$

5. 四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于……………………………( )

(A) $a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$.　　(B) $a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$.

(C) $(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$.　　(D) $(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$.

解. 应选 (D). 可直接展开计算:

$$D=a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}-b_1b_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}=(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4).$$

也可通过交换行和列变成分块对角行列式，再用公式.

三、解答题（本题共 2 小题，每小题 5 分，满分 10 分）

1. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的全长，其中 $a>0$ 是常数.

解. 由极坐标系下的弧微分公式得

$$\mathrm{d}s=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta=a\cdot\sqrt{(1+\cos\theta)^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$=a\cdot\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,\mathrm{d}\theta=2a\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\mathrm{d}\theta.$$

由于 $r=r(\theta)=a(1+\cos\theta)$ 以 2π 为周期，因而 θ 的范围是 $\theta\in[0,2\pi]$. 又由于 $r(\theta)=r(-\theta)$，心形线关于极轴对称. 由对称性,

$$s=2\int_0^\pi\mathrm{d}s=4a\int_0^\pi\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta=8a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi=8a.$$

2. 设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$（$n=1,2,\cdots$），试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

解. 由题设显然有 $x_n>0$，即数列 $\{x_n\}$ 有下界. 用归纳法证明 x_n 单调减少：首先

$$x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{6+10}=4<x_1;$$

其次，若 $x_n<x_{n-1}$，则有

$$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}<\sqrt{6+x_{n-1}}=x_n;$$

因此数列单调减少．由单调有界准则，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在．设 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a, (a \geqslant 0)$，在恒等式 $x_{n+1} = \sqrt{6+x_n}$ 两边取极限，即

$$\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt{6+x_n} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{6+a}.$$

解之得 $a = -2$（舍去）或 $a = 3$，即函数极限为 3.

四、计算题（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分）

1. 计算曲面积分 $\iint_S (2x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 S 为有向曲面 $z = x^2+y^2$（$0 \leqslant z \leqslant 1$），其法向量与 z 轴正向的夹角为锐角.

解. 方法一：投影到平面 xOy 上计算，则有

$$I = \iint_S (2x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} [(2x+z)(-\frac{\partial z}{\partial x}) + (x^2+y^2)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 $z = x^2+y^2, D_{xy}: x^2+y^2 \leqslant 1$．把 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x$ 代入得

$$I = \iint_{D_{xy}} -4x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_{D_{xy}} 2x(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

由对称性得

$$\iint_{D_{xy}} 2x(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0, \quad \iint_{D_{xy}} 4x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

所以由极坐标变换有

$$I = -\iint_{D_{xy}} (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r = -2\pi\left[\frac{1}{4}r^4\right]_0^1 = -\frac{\pi}{2}.$$

方法二：添加辅助面 $S_1: z = 1 (x^2+y^2 \leqslant 1)$，法方向朝下，则

$$\iint_{S_1} (2x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{S_1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_D 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\pi,$$

其中 D 是 S_1 在平面 xy 的投影区域：$x^2+y^2 \leqslant 1$．由高斯公式有

$$\begin{aligned}\iint_{S\cup S_1} (2x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= -3\iiint_\Omega dV \\ &= -3\int_0^1 \mathrm{d}z \iint_{D(z)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -3\int_0^1 \pi z\,\mathrm{d}z = -\frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

其中 $D(z)$ 是圆域：$x^2+y^2 \leqslant z$，面积为 πz．因此

$$I = -\frac{3}{2}\pi - \iint_{S_1} (2x+z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\frac{3}{2}\pi - (-\pi) = -\frac{\pi}{2}.$$

2. 设变换 $\begin{cases} u = x-2y, \\ v = x+ay \end{cases}$ 可把方程

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a，其中 $z = z(x,y)$ 有二阶连续的偏导数.

解. 由多元复合函数求导法则，得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v}.$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial u})+\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial v})\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\\\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial u})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial v})\\&=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}\\&=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\\\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}&=-2\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial u})+a\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial v})\\&=-2(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y})+a(\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y})\\&=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

代入 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，并整理得

$$6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0.$$

于是，令 $6+a-a^2=0$ 得 $a=3$ 或 $a=-2$. $a=-2$ 时，$10+5a=0$，故舍去，$a=3$ 时，$10+5a\neq 0$，因此仅当 $a=3$ 时化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$.

五、（本题满分 7 分）

求级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

解. 先将级数分解,

$$\begin{aligned}A&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})\\&=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}\cdot n}-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}.\end{aligned}$$

令 $A_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}\cdot n}, A_2=\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}$, 则 $A=A_1-A_2$. 由 $\ln(1+x)$ 幂级数展开式得

$$A_1=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}\cdot n}=-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}\ln 2,$$

$$A_2=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\ln 2-\frac{5}{8}.$$

因此 $A=A_1-A_2=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$.

六、(本题满分 7 分)

设对任意 $x>0$, 曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 求 $f(x)$ 的一般表达式.

解. 曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x).$$

令 $X=0$ 得 y 轴上的截距 $Y=f(x)-f'(x)x$. 由题意,

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=f(x)-f'(x)x.$$

两边乘以 x 得

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=xf(x)-f'(x)x^2.$$

将恒等式两边对 x 求导, 得

$$f(x)=f(x)+xf'(x)-2xf'(x)-x^2f''(x),$$

即 $xf''(x)+f'(x)=0$. 在前面积分等式中令 $x=0$ 得 $0=0$ 自然成立. 故不必再加初始条件. 即 $f(x)$ 是微分方程 $xy''+y'=0$ 的通解. 下面求解微分方程:

$$xy''+y'=0\Rightarrow\left(xy'\right)'=0\Rightarrow xy'=C_1,$$

因为 $x>0$, 所以 $y'=\frac{C_1}{x}$. 两边积分得

$$y=f(x)=C_1\ln x+C_2.$$

七、(本题满分 8 分)

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶导数, 且满足条件 $|f(x)|\leqslant a,|f''(x)|\leqslant b$, 其中 a,b 都是非负常数, c 是 $(0,1)$ 内任一点, 证明 $|f'(c)|\leqslant 2a+\frac{b}{2}$.

解. 利用泰勒公式, 在点 c 展开:

$$f(x)=f(c)+f'(x)(x-c)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-c)^2.$$

分别取 $x=0$ 和 $x=1$ 得

$$f(0)=f(c)+f'(c)(0-c)+\frac{f''(\xi_0)}{2!}(0-c)^2,$$
$$f(1)=f(c)+f'(c)(1-c)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(1-c)^2.$$

两式相减得

$$f'(c)=f(1)-f(0)-\frac{1}{2!}[f''(\xi_1)(1-c)^2-f''(\xi_0)c^2].$$

由此

$$\begin{aligned}\left|f'(c)\right| &\leqslant \left|f(1)\right|+\left|f(0)\right|+\frac{1}{2!}\left|f''(\xi_1)\right|(1-c)^2+\frac{1}{2!}\left|f''(\xi_0)\right|c^2\\ &\leqslant 2a+\frac{1}{2}b[(1-c)^2+c^2]<2a+\frac{b}{2}.\end{aligned}$$

八、(本题满分 6 分)

设 $A=E-\xi\xi^T$，其中 E 是 n 阶单位矩阵，ξ 是 n 维非零列向量，ξ^T 是 ξ 的转置，证明：

(I) $A^2=A$ 的充要条件是 $\xi^T\xi=1$； (II) 当 $\xi^T\xi=1$ 时，A 是不可逆矩阵.

解. (I) 因为 $A=E-\xi\xi^T,\xi^T\xi$ 为数，$\xi\xi^T$ 为 n 阶矩阵，所以

$$A^2=(E-\xi\xi^T)(E-\xi\xi^T)=E-2\xi\xi^T+\xi(\xi^T\xi)\xi^T=E-(2-\xi^T\xi)\xi\xi^T.$$

因此

$$A^2=A\Leftrightarrow E-(2-\xi^T\xi)\xi\xi^T=E-\xi\xi^T\Leftrightarrow(\xi^T\xi-1)\xi\xi^T=0.$$

因为 ξ 是非零列向量，所以 $\xi\xi^T\neq0$, 故 $A^2=A\Leftrightarrow\xi\xi^T-1=0$，即 $\xi\xi^T=1$.

(II) 反证法. 当 $\xi\xi^T=1$ 时，由 (1) 知 $A^2=A$，若 A 可逆，则 $A=A^{-1}A^2=A^{-1}A=E$.

与已知 $A=E-\xi\xi^T\neq E$ 矛盾，故 A 是不可逆矩阵.

九、(本题满分 8 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+cx_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$ 的秩为 2.

(I) 求参数 c 及此二次型对应矩阵的特征值；

(II) 指出方程 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示何种二次曲面.

解. (I) 此二次型对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}.$$

因为二次型秩 $r(f)=r(A)=2$，由

$$A=\begin{pmatrix}5&-1&3\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&4&0\\-1&5&-3\\3&-3&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}4&0&0\\-1&6&-3\\3&-6&c\end{pmatrix}$$

可得 $c=3$. 再由 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5&1&-3\\1&\lambda-5&3\\-3&3&\lambda-3\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$$

求得二次型矩阵的特征值为 $0,4,9$.

(II) 因为 $f(x_1,x_2,x_3)$ 经正交变换可化为 $4y_2^2+9y_3^2$，所以 $f(x_1,x_2,x_3)=1$，即 $4y_2^2+9y_3^2=1$，它表示椭圆柱面.

十、填空题（本题共 2 小题，每小题 3 分，满分 6 分）

1. 设工厂 A 和工厂 B 的产品的次品率分别为 1% 和 2%，现从由 A 和 B 的产品分别占 60% 和 40% 的一批产品中随机抽取一件，发现是次品，则该次品属 A 生产的概率是________.

解. 设事件 $C=$“抽取的产品是次品”，事件 $D=$“抽取的产品是工厂 A 生产的”，则事件 $\overline{D}$ 表示“抽取的产品是工厂 B 生产的”，依题意有

$$P(D)=0.60, P(\overline{D})=0.40, P(C|D)=0.01, P(C|\overline{D})=0.02.$$

用贝叶斯公式可求得条件概率

$$P(D|C)=\frac{P(D)P(C|D)}{P(D)P(C|D)+P(\overline{D})P(C|\overline{D})}=\frac{0.6\times 0.01}{0.6\times 0.01+0.4\times 0.02}=\frac{3}{7}.$$

2. 设 ξ,η 是两个相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$ 的随机变量，则随机变量 $|\xi-\eta|$ 的数学期望 $E(|\xi-\eta|)=$________.

解. 由于 ξ 与 η 相互独立且均服从正态分布 $N\left(0,\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)$, 因此它们的线性函数 $U=\xi-\eta$ 服从正态分布，且

$$EU=E(\xi-\eta)=E\xi-E\eta=0,$$

$$DU=D\left(\xi-\eta\right)=D\xi+D\eta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

所以有 $U\sim N(0,1)$. 代入正态分布的概率密度公式，有

$$f(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

应用随机变量函数的期望公式有

$$E(|\xi-\eta|)=E(|U|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|u|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du=2\int_0^{+\infty}u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

$$=-2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,d\left(-\frac{u^2}{2}\right)=-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

十一、（本题满分 6 分）

设 ξ,η 是相互独立且服从同一分布的两个随机变量，已知 ξ 的分布律为

$$P\{\xi=i\}=\frac{1}{3},\quad i=1,2,3.$$

又设 $X=\max(\xi,\eta)$, $Y=\min(\xi,\eta)$.

(I) 写出二维随机变量 (X,Y) 的分布律:

$X \backslash Y$	1	2	3
1			
2			
3			

(II) 求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$.

解. (I) (X,Y) 的可能取值为 $(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)$. 依题意 $\{X<Y\}=\emptyset$, 故 $P\{X<Y\}=0$. 而

$$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1,Y=3\}=P\{X=2,Y=3\}=0,$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\left\{\max(\xi,\eta)=1,\min(\xi,\eta)=1\right\}$$

$$=P\left\{\xi=1,\eta=1\right\}=P\{\xi=1\}P\left\{\eta=1\right\}=\frac{1}{9},$$

类似可算出所有 p_{ij} 的值列于下表中，得到随机变量 (X,Y) 的联合分布律:

$X \backslash Y$	1	2	3
1	1/9	0	0
2	2/9	1/9	0
3	2/9	2/9	1/9

(II) 将表中各行元素相加求出 X 的边缘分布

X	1	2	3
P	1/9	3/9	5/9

.

由离散型随机变量数学期望计算公式可得

$$EX=\frac{1}{9}\cdot 1+\frac{3}{9}\cdot 2+\frac{5}{9}\cdot 3=\frac{22}{9}.$$

一九九六年考研数学试卷二解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷一第一 [4] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 同试卷一第二 [2] 题.

3. 同试卷一第二 [3] 题.

4. 同试卷一第二 [4] 题.

5. 同试卷一第二 [5] 题.

三、解答题（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）

1. 计算积分 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant y\leqslant x, x^2+y^2\leqslant 2x\}$.

解. 利用极坐标，求得积分等于 $\frac{10}{9}\sqrt{2}$.

2. 同试卷一第三 [1] 题.

3. 同试卷一第三 [2] 题.

四、计算题（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分）

1. 同试卷一第四 [1] 题.

2. 同试卷一第四 [2] 题.

五、（本题满分 7 分）

同试卷一第五题.

六、（本题满分 7 分）

同试卷一第六题.

七、（本题满分 8 分）

同试卷一第七题.

八、解答题（本题共 2 小题，每小题 6 分，满分 12 分）

1. 求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ x_3+x_4+x_5=0 \end{cases}$ 的基础解系.

解. 基础解系为 $\xi_1=(-1,0,-1,0,1)^T$, $\xi_2=(1,-1,0,0,0)^T$.

2. 同试卷一第八题.

九、（本题满分 9 分）

同试卷一第九题.

一九九七年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 5 分，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

解. 应填 $\frac{3}{2}$. 本题不能直接用洛必达法则，因为求导后分子的极限不存在. 正确做法是对原式的分子、分母同时除以 x，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\frac{\ln(1+x)}{x}}=\frac{3}{2},$$

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 3, 则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 ________.

解. 应填 $(-2,4)$. 令 $t=x-1$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n+1}=t^2\sum_{n=1}^{\infty}na_nt^{n-1}=t^2\sum_{n=1}^{\infty}(a_nt^n)'.$$

由于逐项求导后的幂级数与原幂级数有相同的收敛半径，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nt^n$ 的收敛半径为 3，可知 $t^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_nt^n)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nt^{n+1}$ 的收敛半径也为 3，收敛区间为 $(-3,3)$. 从而原幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为 $(-2,4)$.

3. 对数螺线 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 在点 $(\rho,\theta)=\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线的直角坐标方程为 ________.

解. 应填 $x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$. 由 $\rho=\mathrm{e}^{\theta}$ 的参数方程

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta=\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta,\\ y=\rho\sin\theta=\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta,\end{cases}$$

求得切线斜率

$$y'_x=\frac{y'_\theta}{x'_\theta}=\frac{\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta+\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta}{\mathrm{e}^{\theta}\cos\theta-\mathrm{e}^{\theta}\sin\theta}=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta-\sin\theta}\quad\Rightarrow\quad y'_x\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1.$$

所以切线的方程为 $y-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}=-(x-0)$，即 $x+y=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}$.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$,$B$ 为三阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 $t=$ ________.

解. 应填 -3. 由 $AB=O$，对 B 按列分块，设 $B=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]$，则 β_1,β_2,β_3 是齐次方程组 $Ax=0$ 的解. 又因 $B\neq O$，故 $Ax=0$ 有非零解，那么

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&-2\\4&t+3&3\\3&0&1\end{vmatrix}=7(t+3)=0,$$

由此可得 $t=-3$.

5. 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个是白球. 今有两人依次随机地从袋中各取一球，取后不放回，则第二个人取得黄球的概率是________.

解. 应填 $\frac{2}{5}$. 由抽签的公平性，第二个人取得黄球的概率为 $\frac{20}{50}=\frac{2}{5}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (   )

(A) 连续，偏导数存在.　　(B) 连续，偏导数不存在.

(C) 不连续，偏导数存在.　　(D) 不连续，偏导数不存在.

解. 应选 (C). 先看连续性：由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}\neq f(0,0),$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续. 再看偏导数：按定义

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,0)\Big|_{x=0},\qquad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(0,y)\Big|_{y=0};$$

由于对任何 x 有 $f(x,0)=0$，对任何 y 有 $f(0,y)=0$，所以

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0.$$

即在点 $(0,0)$ 处的两个偏导数都存在.

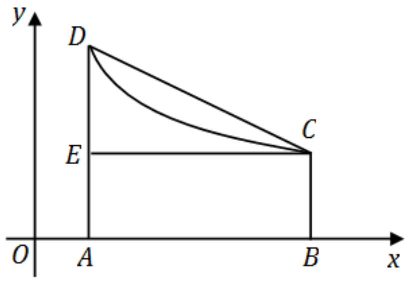
2. 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$，令

$$S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad S_2=f(b)(b-a),\quad S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a),$$

则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (   )

(A) $S_1<S_2<S_3$.　　(B) $S_2<S_1<S_3$.　　(C) $S_3<S_1<S_2$.　　(D) $S_2<S_3<S_1$.

解. 应选 (B). 由 $f(x)>0,f'(x)<0,f''(x)>0$ 可知，曲线 $y=f(x)$ 是上半平面的一段下降的凹弧，$y=f(x)$ 的图形大致如下图：



$S_1=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是曲边梯形 $ABCD$ 的面积;

$S_2=f(b)(b-a)$ 是矩形 $ABCE$ 的面积;

$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$ 是梯形 $ABCD$ 的面积.

由图可见 $S_2<S_1<S_3$.

3. 设$F(x)=\int_x^{x+2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$，则 $F(x)$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) 为正常数.　　(B) 为负常数.　　(C) 恒为零.　　(D) 不为常数.

解. 应选 (A). 由于函数 $\mathrm{e}^{\sin t}\sin t$ 是以 2π 为周期的函数，所以

$$F(x)=\int_x^{x+2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t.$$

下面估计它的值:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_\pi^{2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t+\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-\sin u}(-\sin u)\,\mathrm{d}u\\&=\int_0^{\pi} (\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t})\sin t\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

当 $0<t<\pi$ 时，$\sin t>0$，$\mathrm{e}^{\sin t}-\mathrm{e}^{-\sin t}>0$，所以 $F(x)>0$.

4. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}$，则三条直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0,\quad a_2x+b_2y+c_2=0,\quad a_3x+b_3y+c_3=0$$

（其中 $a_i^2+b_i^2\neq 0, i=1,2,3$）交于一点的充要条件是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关.

(C) 秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=$ 秩 $r(\alpha_1,\alpha_2)$.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关，α_1,α_2 线性无关.

解. 应选 (D). 三条直线交于一点的充要条件是方程组

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \\ a_3x+b_3y+c_3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1x+b_1y=-c_1 \\ a_2x+b_2y=-c_2 \\ a_3x+b_3y=-c_3 \end{cases}$$

有唯一解. 将上述方程组写成矩阵形式 $AX=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{pmatrix}, \quad b=\begin{pmatrix} -c_1 \\ -c_2 \\ -c_3 \end{pmatrix}.$$

则 $AX=b$ 有唯一解等价于 $r(A)=r[A\vdots b]=2$，即 α_1,α_2 线性无关，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

5. 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 的方差分别为 4 和 2，则随机变量 $3X-2Y$ 的方差是…………………………………………………………( )

(A) 8. (B) 16. (C) 28. (D) 44.

解. 应选 (D). 因 X 与 Y 独立，故 $3X$ 和 $2Y$ 也相互独立. 由方差的性质有

$$D(3X-2Y)=D(3X)+D(-2Y)=9D(X)+4D(Y)=44.$$

三、计算题（本题共 3 小题，每小题 5 分，满分 15 分）

1. 计算 $I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}V$，其中 Ω 为平面曲线 $\begin{cases} y^2=2z, \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围成的区域.

解. 采用柱面坐标，$D_z=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2z\}$，

$$I=\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,\mathrm{d}v=\int_0^8 \mathrm{d}z\iint_{D_z} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^8 \mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2z}} r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1024\pi}{3}.$$

2. 计算曲线积分 $\oint_C (z-y)\,\mathrm{d}x+(x-z)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$, 其中 C 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2, \end{cases}$ 从 z 轴正向往 z 轴负向看，C 的方向是顺时针的.

解. 用斯托克斯公式来计算：记 S 为平面 $x-y+z=2$ 上 C 所围有限部分，由 L 的定向，按右手法则 S 取下侧. 原积分

$$I=\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z-y & x-z & x-y \end{vmatrix}=\iint_S 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

S 在 xy 平面上的投影区域 D_{xy} 为 $x^2+y^2\leqslant 1$. 从而得

$$I=-\iint_{D_{xy}} 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-2\pi.$$

3. 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行的. 设该人群的总人数为 N, 在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0, 在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$ (将 $x(t)$ 视为连续可微变量), 其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比, 比例常数 $k>0$, 求 $x(t)$.

解. 由题意可得初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(N-x),\\ x(0)=x_0.\end{cases}$$

将微分方程分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)}=k\,\mathrm{d}t \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{N}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{N-x}\right)\mathrm{d}x=k\,\mathrm{d}t.$$

积分可得

$$\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N-x}=kt+C_0, \quad\Rightarrow\quad x=\frac{CN\mathrm{e}^{kNt}}{1+C\mathrm{e}^{kNt}}.$$

以 $x(0)=x_0$ 代入可得 $C=\dfrac{x_0}{N-x_0}$, 故所求函数为

$$x=\frac{Nx_0\mathrm{e}^{kNt}}{N-x_0+x_0\mathrm{e}^{kNt}}.$$

四、计算题（本题共 2 小题, 第 (1) 小题 6 分, 第 (2) 小题 7 分, 满分 13 分）

1. 设直线 $L:\begin{cases}x+y+b=0,\\ x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 Π 上, 且平面 Π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$, 求 a,b 之值.

解. 曲面 S 在点 M_0 的法向量

$$n=\{2x,2y,-1\}\big|_{M_0}=\{2,-4,-1\}.$$

切平面 Π 的方程是

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0,$$

即 $2x-4y-z-5=0$. 将直线 L 的方程改写成参数方程

$$\begin{cases}y=-x-b,\\ z=(1-a)x-ab-3.\end{cases}$$

将它代入平面 Π 方程得

$$2x-4(-x-b)-(1-a)x+ab+3-5=0,$$

即 $(5+a)x+4b+ab-2=0$. 解得 $a=-5, b=-2$.

2. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=e^{2x}z$，求 $f(u)$.

解. 由复合函数求导法则得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}=f'(u)e^x\sin y,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}=f'(u)e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f'(u)e^x\sin y+f''(u)e^{2x}\sin^2 y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y-f'(u)e^x\sin y.$$

将后两式代入题设方程得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}=e^{2x}f(u)\quad\Rightarrow\quad f''(u)-f(u)=0.$$

这是二阶线性常系数齐次方程，解得

$$f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u},$$

其中 C_1,C_2 为任意常数.

五、（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 连续，$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解. 由题设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$ 知，$f(0)=0,f'(0)=A$，且有 $\varphi(0)=0$. 当 $x\neq 0$ 时有

$$\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\,dt=\frac{\int_0^x f(u)\,du}{x}\quad\Rightarrow\quad \varphi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\,du}{x^2},$$

当 $x=0$ 时有

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}.$$

从而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\varphi'(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\,du}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\,du}{x^2}\\&=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=\varphi'(0),\end{aligned}$$

即 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

六、（本题满分 8 分）

设 $a_1=2,a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right),n=1,2,\cdots$，证明：

(I) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；(II) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

解. (I) 显然 $a_n>0$，由均值不等式易知

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2=1\quad\Rightarrow\quad\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a_n^2}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right)=1.$$

因此，a_n 单调下降且有下界．所以极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 存在.

(II) 由递推公式得 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$．令 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1$，则有

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{a_n^2+1}{a_{n+1}^2+1}\cdot\frac{a_n^2-1}{a_n^2}=0<1.$$

由比值判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

七、解答题（本题共 2 小题，第 1 小题 5 分，第 2 小题 6 分，满分 11 分）

1. 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵,

$$\alpha_1=(1,1,2,3)^T,\alpha_2=(-1,1,4,-1)^T,\alpha_3=(5,-1,-8,9)^T$$

是齐次线性方程组 $Bx=0$ 的解向量，求 $Bx=0$ 的解空间的一个标准正交基.

解. 因秩 $r(B)=2$，故解空间的维数 $n-r(B)=4-2=2$．又因 α_1,α_2 线性无关，且是方程组 $Bx=0$ 的解，故 α_1,α_2 是解空间的基．先将其正交化得

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,2,3)^T,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(-1,1,4,-1)^T-\frac{5}{15}(1,1,2,3)^T=\frac{2}{3}(-2,1,5,-3)^T.$$

再将其单位化得

$$\eta_1=\frac{\beta_1}{|\beta_1|}=\frac{1}{\sqrt{15}}(1,1,2,3)^T,\quad \eta_2=\frac{\beta_2}{|\beta_2|}=\frac{1}{\sqrt{39}}(-2,1,5,-3)^T,$$

即为所求的一个标准正交基.

2. 已知 $\xi=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}$ 的一个特征向量.

(I) 试确定参数 a,b 及特征向量 ξ 所对应的特征值;

(II) 问 A 能否相似于对角阵？说明理由.

解. (I) 设 ξ 是矩阵 A 的属于特征值 λ_0 的特征向量，即 $A\xi=\lambda_0\xi$,

$$\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&a&3\\-1&b&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\lambda_0\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}2-1-2=\lambda_0,\\5+a-3=\lambda_0,\\-1+b+2=-\lambda_0.\end{cases}$$

解得 $\lambda_0=-1,a=-3,b=0$.

(II) 将 (I) 解得的 $a=-3, b=0$ 代入矩阵 A，得

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

其特征方程为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda+1)^3=0,$$

知矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$．由于

$$r(-E-A)=r\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=2,$$

从而 $\lambda=-1$ 只有一个线性无关的特征向量，故 A 不能相似对角化.

八、（本题满分 5 分）

设 A 是 n 阶可逆方阵，将 A 的第 i 行和第 j 行对换后得到的矩阵记为 B.

(I) 证明 B 可逆；(II) 求 AB^{-1}.

解. 由于 $B=E_{ij}A$，其中 E_{ij} 是初等矩阵

$$E_{ij}=\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

(I) 因为 A 可逆，$|A|\neq 0$, 故 $|B|=\left|E_{ij}A\right|=\left|E_{ij}\right|\cdot|A|=-|A|\neq 0$，所以 B 可逆.

(II) 由 $B=E_{ij}A$，知 $AB^{-1}=A(E_{ij}A)^{-1}=AA^{-1}E_{ij}^{-1}=E_{ij}^{-1}=E_{ij}$.

九、（本题满分 7 分）

从学校乘汽车到火车站的途中有 3 个交通岗，假设在各个交通岗遇到红灯的事件是相互独立的，并且概率都是 $\frac{2}{5}$. 设 X 为途中遇到红灯的次数，求随机变量 X 的分布律、分布函数和数学期望.

解. (I) 由题意知 $X\sim B\left(3,\frac{2}{5}\right)$，从而

$$P\{X=k\}=C_3^k p^k(1-p)^{3-k}, \quad k=0,1,2,3.$$

求得 X 的分布律为

$$P\{X=0\}=\frac{27}{125},\qquad P\{X=1\}=\frac{54}{125},$$
$$P\{X=2\}=\frac{36}{125},\qquad P\{X=3\}=\frac{8}{125}.$$

(II) X 的分布函数为

$$F(x)=\sum_{k\leqslant x}P\{X=k\}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{27}{125}, & 0\leqslant x<1,\\ \frac{81}{125}, & 1\leqslant x<2,\\ \frac{117}{125}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

(III) X 的数学期望为 $EX=np=3\cdot\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$.

十、（本题满分 5 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数. $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本，分别用矩估计法和最大似然估计法求 θ 的估计量.

解. (I) 由期望的定义:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x(\theta+1)x^{\theta}\,\mathrm{d}x=\int_0^1(\theta+1)x^{\theta+1}\,\mathrm{d}x$$
$$=(\theta+1)\int_0^1 x^{\theta+1}\,\mathrm{d}x=(\theta+1)\left.\frac{x^{\theta+2}}{\theta+2}\right|_0^1=\frac{\theta+1}{\theta+2}.$$

而样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, 用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$，即 $\frac{\theta+1}{\theta+2}=\overline{X}$, 解得未知参数 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\frac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

(II) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的样本值，则样本的似然函数为

$$L=\begin{cases}(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}, & 0<x_i<1\,(i=1,2,\cdots,n);\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $0<x_i<1$ 时，$\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}>0$，又 $\theta>-1$, 故 $\theta+1>0$，即 $(\theta+1)^n>0$. 所以 $L(\theta)>0$.

$$\ln L=\ln\left[(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}\right]=n\ln(\theta+1)+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i^{\theta}=n\ln(\theta+1)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

令导数等于零，即

$$\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{\theta+1}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解得 θ 的最大似然估计值为

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i},$$

从而得 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=-1-\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}.$$

一九九八年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=$ ________.

解. 应填 $-\frac{1}{4}$. 用四则运算将分子化简，再用等价无穷小替换:

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2\right)\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\right)^2-4}{x^2\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{2x^2}=-\frac{1}{4}.$$

2. 设 $z=\frac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，$f,\varphi$ 具有二阶连续导数，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

解. 应填 $yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$. 对两项分别用不同的求导顺序较简单:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}f(xy)\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(y\varphi(x+y)\right)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x}f'(xy)x\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[y\varphi'(x+y)\right]\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left[f'(xy)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[y\varphi'(x+y)\right]\\&=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

3. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则 $\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ ________.

解. 应填 $12a$. L 关于 x 轴（y 轴）对称, $2xy$ 关于 y（x）为奇函数, 所以 $\int_L 2xy\,\mathrm{d}s=0$. 又在 L 上,

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\Rightarrow 3x^2+4y^2=12\Rightarrow\int_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=\int_L 12\,\mathrm{d}s=12a.$$

因此原式 $=\int_L 2xy\,\mathrm{d}s+\int_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=12a.$

4. 设 A 为 n 阶矩阵，$|A|\neq 0$，A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 若 A 有特征值 λ，则 $(A^*)^2+E$ 必有特征值 ________.

解. 应填 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$. 由 $|A|\neq 0$，A 的特征值 $\lambda\neq 0$（0 是 A 的特征值等价于 $|A|=0$），则 A^{-1} 有特征值 $\frac{1}{\lambda}$. 从而 $A^*=|A|A^{-1}$ 有特征值 $\frac{|A|}{\lambda}$，$(A^*)^2+E$ 有特征值 $\left(\frac{|A|}{\lambda}\right)^2+1$.

5. 设平面区域 D 由曲线 $y=\frac{1}{x}$ 及直线 $y=0,x=1,x=\mathrm{e}^2$ 所围成，二维随机变量 (X,Y) 在区域 D 上服从均匀分布，则 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度在 $x=2$ 处的值为 ________.

解. 应填 $\frac{1}{4}$. 因为平面区域

$$D=\left\{(x,y)\middle|1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^2,0\leqslant y\leqslant \frac{1}{x}\right\},$$

所以区域 D 的面积为

$$S_D=\int_1^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x|_1^{\mathrm{e}^2}=2.$$

从而 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x<1$ 或 $x>\mathrm{e}^2$ 时，$f_X(x)=0$；当 $1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}^2$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y=\frac{1}{2x}.$$

故 $f_X(2)=\frac{1}{4}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f(x)$ 连续，则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$ ·························( )

(A) $xf(x^2)$. (B) $-xf(x^2)$. (C) $2xf(x^2)$. (D) $-2xf(x^2)$.

解. 应选 (A). 作变量代换 $u=x^2-t^2$，则有

$$\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\int_{x^2}^0-\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u,$$

从而导函数为

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{d}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}f(x^2)\cdot\left(x^2\right)'=xf(x^2).$$

2. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是······················( )

(A) 3. (B) 2. (C) 1. (D) 0.

解. 应选 (B). 当 $x\neq 0,\pm1$ 时 $f(x)$ 可导，因而只需在 $x=0,\pm1$ 处考察 $f(x)$ 是否可导. 我们有一般的结论：设函数 $f(x)=\varphi(x)|x-a|$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $\varphi(a)=0$. 这是因为

$$f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\frac{\varphi(x)|x-a|}{x-a}=-\varphi(a),$$

$$f'_{+}(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{\varphi(x)|x-a|}{x-a}=\varphi(a).$$

所以 $f'(a)$ 存在当且仅当 $f'_{-}(a)=f'_{+}(a)$，即 $\varphi(a)=0$．在这个题目中，$f(x)=(x^2-x-2)|x||x-1||x+1|$，记

$$\varphi_1(x)=f(x)/|x|=(x^2-x-2)|x-1||x+1|$$

$$\varphi_2(x)=f(x)/|x-1|=(x^2-x-2)|x||x+1|$$

$$\varphi_3(x)=f(x)/|x+1|=(x^2-x-2)|x||x-1|$$

则 $\varphi_1(0)\neq 0, \varphi_2(-1)=0, \varphi_3(1)\neq 0$．由上面结论知，$f(x)$ 在 $x=-1$ 处可导，在 $x=0$ 和 $x=1$ 处不可导．因此 $f(x)$ 只有 2 个不可导点，故应选 (B)．

3. 已知函数 $y=y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\frac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$，且当 $\Delta x\to 0$ 时，α 是 Δx 的高阶无穷小，$y(0)=\pi$，则 $y(1)$ 等于$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　)

(A) 2π.　　(B) π.　　(C) $e^{\frac{\pi}{4}}$.　　(D) $\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

解. 应选 (D)．由题设可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{y}{1+x^2}+\frac{\alpha}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{y}{1+x^2}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{\Delta x}=\frac{y}{1+x^2}.$$

分离变量并对两边积分得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\Rightarrow \ln|y|=\arctan x+C\Rightarrow y=C_1e^{\arctan x}.$$

代入初始条件 $y(0)=\pi$ 得 $C_1=\pi$．所以 $y=\pi e^{\arctan x}$，从而 $y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

4. 设矩阵 $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$ 是满秩的，则直线 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与直线 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　)

(A) 相交于一点.　　(B) 重合.　　(C) 平行但不重合.　　(D) 异面.

解. 应选 (A)．设 $L_1:\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$, $L_2:\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$．由题设矩阵 $\begin{pmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{pmatrix}$ 是满秩的，则由行列式的性质可知

$$\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1-a_2&b_1-b_2&c_1-c_2\\a_2-a_3&b_2-b_3&c_2-c_3\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}\neq 0$$

故向量组 $(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$ 与 $(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$ 线性无关，从而 L_1 和 L_2 不平行．又由 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 得 $\frac{x-a_3}{a_1-a_2}-1=\frac{y-b_3}{b_1-b_2}-1=\frac{z-c_3}{c_1-c_2}-1$，即

$$\frac{x-a_3-(a_1-a_2)}{a_1-a_2}=\frac{y-b_3-(b_1-b_2)}{b_1-b_2}=\frac{z-c_3-(c_1-c_2)}{c_1-c_2}.$$

同样由 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3}=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 得 $\frac{x-a_1}{a_2-a_3}+1=\frac{y-b_1}{b_2-b_3}+1=\frac{z-c_1}{c_2-c_3}+1$，即

$$\frac{x-a_1+(a_2-a_3)}{a_2-a_3}=\frac{y-b_3+(b_2-b_3)}{b_2-b_3}=\frac{z-c_3+(c_2-c_3)}{c_2-c_3}.$$

可见 L_1 和 L_2 均过点 $(a_2-a_1-a_3,b_2-b_1-b_3,c_2-c_1-c_3)$，故两直线相交于一点.

5. 设 A,B 是两个随机事件，且 $0<P(A)<1,P(B)>0,P(B|A)=P(B|\overline{A})$，则必有( )

(A) $P(A|B)=P(\overline{A}|B)$.　　(B) $P(A|B)\neq P(\overline{A}|B)$.

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$.　　(D) $P(AB)\neq P(A)P(B)$.

解. 应选 (C). 由条件概率公式及条件 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，知

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

整理得 $P(AB)=P(A)P(B)$，应选 (C).

三、（本题满分 5 分）

求直线 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 $\Pi: x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 L_0 的方程，并求 L_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

解. 设过 L 且垂直于平面 Π 的平面为 Π_0，则平面 Π_0 过直线 L 上的点 $(1,0,1)$ 且与不共线的向量 $l=(1,1,-1)$（直线 L 的方向向量）及 $n=(1,-1,2)$（平面 Π 的法向量）平行，于是 Π_0 的方程是

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad x-3y-2z+1=0.$$

从而投影直线 L_0 的方程为 $\begin{cases} x-y+2z-1=0, \\ x-3y-2z+1=0. \end{cases}$ 将 L_0 写成参数 y 的方程:

$$\begin{cases} x=2y, \\ z=-\frac{1}{2}(y-1). \end{cases}$$

则绕 y 轴旋转一周所成曲面 S 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{(2y)^2+\left(\frac{1}{2}(1-y)\right)^2}\cos\theta, \\ y=y, \\ z=\sqrt{(2y)^2+\left(\frac{1}{2}(1-y)\right)^2}\sin\theta. \end{cases}$$

消去 θ 得 S 的一般方程为

$$x^2+z^2=(2y)^2+\left[-\frac{1}{2}(y-1)\right]^2,$$

即 $4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0$.

四、（本题满分 6 分）

确定常数 λ，使在右半平面 $x>0$ 上的向量

$$A(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}i-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}j$$

为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$.

解. 令 $P(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}, Q(x,y)=-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}$，则有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x(x^4+y^2)^{\lambda}-\lambda x^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 4x^3,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=2x(x^4+y^2)^{\lambda}+2\lambda xy(x^4+y^2)^{\lambda-1}\cdot 2y.$$

$A(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度等价于 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，从而

$$4x(x^4+y^2)^{\lambda}(\lambda+1)=0\Leftrightarrow\lambda=-1.$$

可见，当 $\lambda=-1$ 时，所给向量场为某二元函数的梯度场．为求 $u(x,y)$，采用折线法，在右半平面内任取一点，比如点 $(1,0)$ 作为积分路径的起点，则有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\,\mathrm{d}x-x^2\,\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+C=\int_1^x\frac{2x\cdot 0}{x^4+0}\,\mathrm{d}x+\int_0^y\frac{-x^2}{x^4+y^2}\,\mathrm{d}y+C\\&=\int_0^y\frac{-x^2}{x^4+y^2}\,\mathrm{d}y+C=-x^2\left[\frac{1}{x^2}\arctan\frac{y}{x^2}\right]_0^y+C\\&=-\arctan\frac{y}{x^2}+C\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

五、（本题满分 6 分）

从船上向海中沉放某种探测仪器，按探测要求，需确定仪器的下沉深度 y（从海平面算起）与下沉速度 v 之间的函数关系．设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用．设仪器的质量为 m，体积为 B，海水比重为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 k ($k>0$)．试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y=y(v)$.

解. 取沉放点为原点 O，铅直向下作为 Oy 轴正向，则由牛顿第二定律得

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=mg-B\rho g-kv,\quad y\big|_{t=0}=0,\ v\big|_{t=0}=0.$$

利用 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v$ 可得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=v\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}\right)^{-1}.$$

代入上面微分方程消去 t，得到 y 与 v 之间的微分方程

$$mv\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}\right)^{-1}=mg-B\rho-kv,\quad v|_{y=0}=0.$$

分离变量得 $\mathrm{d}y=\frac{mv}{mg-B\rho-kv}\mathrm{d}v$，两边积分得

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho-kv)+C.$$

再根据初始条件 $v|_{y=0}=0$，即

$$C=\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln(mg-B\rho),$$

故所求 y 与 v 函数关系为

$$y=-\frac{m}{k}v-\frac{m(mg-B\rho)}{k^2}\ln\left(\frac{mg-B\rho-kv}{mg-B\rho}\right).$$

六、（本题满分 7 分）

计算 $\iint_\Sigma \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，a 为大于零的常数.

解. 由于被积函数分母中包含 $(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$，因此不能立即添加辅助面，需先将曲面方程代入被积表达式先化简：

$$I=\iint_\Sigma \frac{ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a}\iint_\Sigma ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

添加辅助面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2\\ z=0\end{cases}$，其侧向下，则由高斯公式有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{a}\oiint_{\Sigma+\Sigma_1} ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\frac{1}{a}\iint_{\Sigma_1} ax\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+a)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{a}\left(-\iiint_\Omega\left(\frac{\partial(ax)}{\partial x}+\frac{\partial\left[(z+a)^2\right]}{\partial z}\right)\mathrm{d}V-\left(-\iint_D a^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\right)\\
&=\frac{1}{a}\left(-\iiint_\Omega(a+2(z+a))\mathrm{d}V+\iint_D a^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right),\end{aligned}$$

其中 Ω 为 Σ 与 Σ_1 所围成的有界闭区域，$D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant a^2\}$ 为 Σ_1 在 xOy 面上的投影. 从而

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{a}\left(-3a\iiint_\Omega \mathrm{d}v-2\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v+a^2\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\\
&=\frac{1}{a}\left(-3a\cdot\frac{2}{3}\pi a^3-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\,\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z\,\mathrm{d}z+a^2\cdot\pi a^2\right)\\
&=\frac{1}{a}\left(-\pi a^4+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a(a^2r-r^3)\mathrm{d}r\right)=\frac{1}{a}\left(-\pi a^4+2\pi\cdot\frac{a^4}{4}\right)=-\frac{\pi}{2}a^3.\end{aligned}$$

七、（本题满分 6 分）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

解. 先对数列的通项作放缩：

$$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}.$$

由定积分的定义有:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n} = \int_0^1 \sin\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}.$$

根据夹逼定理知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}} = \frac{2}{\pi}.$$

八、(本题满分 5 分)

设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由.

解. 因正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少有下界 0，知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，记为 a，则 $a_n \geqslant a$ 且 $a \geqslant 0$. 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，根据莱布尼茨判别法知，必有 $a>0$（否则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛）. 又正项级数 $\{a_n\}$ 单调减少，有 $\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{a+1}\right)^n$，而 $0<\frac{1}{a+1}<1$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$ 收敛. 根据正项级数的比较判别法，知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 也收敛.

九、(本题满分 6 分)

设 $y=f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上的任一非负连续函数.

(I) 试证存在 $x_0\in(0,1)$，使得在区间 $[0,x_0]$ 上以 $f(x_0)$ 为高的矩形面积，等于在区间 $[x_0,1]$ 上以 $y=f(x)$ 为曲边的梯形面积.

(II) 又设 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f'(x)>-\frac{2f(x)}{x}$，证明 (I) 中的 x_0 是唯一的.

解. (I) 令 $\varphi(x)=xf(x)-\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t$，则要证 $\exists x_0\in(0,1)$，使 $\varphi(x_0)=0$. 因为 $\varphi(0)\leqslant 0$ 且 $\varphi(1)\geqslant 0$，若使用零点定理则无法排除端点. 这里我们改为对 $\varphi(x)$ 的原

函数 $\Phi(x)=\int_0^x \varphi(t)\mathrm{d}t$ 使用罗尔定理：$\Phi(0)=0$，由分部积分公式有

$$\Phi(1)=\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x-\left(\left[x\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right]_{x=0}^{x=1}+\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\right)=0.$$

又由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续得 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，从而 $\Phi(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 可导．根据罗尔定理，$\exists x_0\in(0,1)$，使 $\Phi'(x_0)=\varphi(x_0)=0$.

(II) 由 $\varphi'(x)=xf'(x)+f(x)+f(x)=xf'(x)+2f(x)>0$，知 $\varphi(x)$ 在 $(0,1)$ 内单调增加，故 (1) 中的 x_0 是唯一的.

十、（本题满分 6 分）

已知二次曲面方程 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$，可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\xi\\\eta\\\zeta\end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$，求 a,b 的值和正交矩阵 P.

解. 经正交变换将二次型化为标准形，则有

$$P^{-1}AP=P^{-1}\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}=B,$$

即 A 与 B 相似．由相似矩阵的性质有

$$\begin{cases}\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B)\\|A|=|B|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1+a+1=0+1+4\\-(b-1)^2=0\end{cases}\Rightarrow a=3,b=1.$$

从而 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$．它的特征值也是 $\lambda_1=0,\lambda_2=1,\lambda_3=4$．当 $\lambda_1=0$ 时，求得特征向量 $\alpha_1=(1,0,-1)^T$；当 $\lambda_2=1$ 时，求得特征向量 $\alpha_2=(1,-1,1)^T$；当 $\lambda_3=4$ 时，求得特征向量 $\alpha_3=(1,2,1)^T$．由实对称矩阵不同特征值对应的特征向量相互正交，可知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 相互正交．将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化，得所求的正交矩阵

$$P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\left(\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|},\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|},\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&-\frac{1}{\sqrt3}&\frac{2}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{1}{\sqrt6}\end{pmatrix}.$$

十一、（本题满分 4 分）

设 A 是 n 阶矩阵，若存在正整数 k，使线性方程组 $A^k x=0$ 有解向量 α，且 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，证明：向量组 $\alpha, A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的.

解. 设有常数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{k-1}$，使得

$$\lambda_0\alpha+\lambda_1 A\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha=0.$$

两边左乘 A^{k-1}，则有

$$A^{k-1}\left(\lambda_0\alpha+\lambda_1 A\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha\right)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_0 A^{k-1}\alpha+\lambda_1 A^k\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{2(k-1)}\alpha=0.$$

因 $A^k\alpha=0$，从而有 $\lambda_0 A^{k-1}\alpha=0$. 由题设 $A^{k-1}\alpha\neq 0$，所以 $\lambda_0=0$. 于是

$$\lambda_1 A\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha=0.$$

两边左乘 A^{k-2}，则有

$$A^{k-2}\left(\lambda_1 A\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha\right)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 A^{k-1}\alpha+\cdots+\lambda_{k-1}A^{2k-3}\alpha=0.$$

同样由 $A^k\alpha=0$ 和 $A^{k-1}\alpha\neq 0$ 得 $\lambda_1=0$. 类似地可证明 $\lambda_2=\cdots=\lambda_{k-1}=0$. 因此向量组 $\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$ 是线性无关的.

十二、（本题满分 5 分）

已知线性方程组

$$① \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$$

的一个基础解系为 $(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^T,(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^T,\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^T$，试写出线性方程组

$$② \begin{cases} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0, \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}$$

的通解，并说明理由.

解. 方程组②的通解为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_n\xi_n$，其中 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为任意常数，

$$\xi_1=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,2n})^T,\xi_2=(a_{21},a_{22},\cdots,a_{2,2n})^T,\cdots,\xi_n=(a_{n1},a_{n2},\cdots,a_{n,2n})^T.$$

理由：分别记方程组①和②的系数矩阵为 A 和 B，则由①的已知基础解系可知 $AB^T=0$，于是 $BA^T=\left(AB^T\right)^T=0$，因此可知 A 的 n 个行向量的转置向量为②的 n 个解向量. 由于 B 的秩为 n，故②的解空间维数为 $2n-n=n$. 又 A 的秩

为 $2n$ 与①的解空间维数之差，即为 n，故 A 的 n 个行向量线性无关，从而它们的转置向量构成②的一个基础解系，于是得到②的上述通解.

十三、（本题满分 6 分）

设两个随机变量 X,Y 相互独立，且都服从均值为 0、方差为 $\frac{1}{2}$ 的正态分布，求随机变量 $|X-Y|$ 的方差.

解. 令 $Z=X-Y$，由于 X,Y 相互独立，而且都服从正态分布，因此 Z 也服从正态分布，且

$$E(Z)=E(X)-E(Y)=0,\quad D(Z)=D(X)+D(Y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

于是，$Z=X-Y\sim N(0,1)$. 因为 $|X-Y|$ 的期望

$$\begin{aligned}E|Z|&=\int_{-\infty}^{+\infty}|z|\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}z\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\,\mathrm{d}z\\&=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}d\left(\frac{z^2}{2}\right)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left[-\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2}}\right]_0^{+\infty}=\sqrt{\frac{2}{\pi}},\end{aligned}$$

所以 $|X-Y|$ 的方差

$$\begin{aligned}D|X-Y|&=D(|Z|)=E\left(|Z|^2\right)-(E|Z|)^2\\&=D(Z)+(E(Z))^2-(E|Z|)^2=1-(E|Z|)^2=1-\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

十四、（本题满分 4 分）

从正态总体 $N\left(3.4,6^2\right)$ 中抽取容量为 n 的样本，如果要求其样本均值位于区间 $(1.4,5.4)$ 内的概率不小于 0.95，问样本容量 n 至少应取多大?

附表：标准正态分布表 $\Phi(z)=\int_{-\infty}^{z}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$

z	1.28	1.645	1.96	2.33
$\Phi(z)$	0.900	0.950	0.975	0.990

解. 由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n\sim N(3.4,6^2),\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则 $U=\frac{\overline{X}_n-3.4}{6/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$. 从而

$$\begin{aligned}P\left\{1.4<\overline{X}<5.4\right\}&=P\left\{-2<\overline{X}-3.4<2\right\}=P\left\{\left|\overline{X}-3.4\right|<2\right\}\\&=P\left\{\frac{\left|\overline{X}-3.4\right|}{6}\sqrt{n}<\frac{2\sqrt{n}}{6}\right\}=2\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)-1\geqslant 0.95,\end{aligned}$$

故 $\Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{3}\right)\geqslant 0.975$，查表得到 $\frac{\sqrt{n}}{3}\geqslant 1.96$，即 $n\geqslant(1.96\times 3)^2\approx 34.57$. 所以 n 至少应取 35.

十五、（本题满分 4 分）

设某次考试的学生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分. 问在显著性水平 0.05 下，是否可以认

为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？并给出检验过程.

附表：t 分布表 $P\{t(n)\leqslant t_p(n)\}=p$

$t_p(n)$ \ p ; n	0.95	0.975
35	1.6896	2.0301
36	1.6883	2.0281

解. 设该次考试的考生成绩为 X，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从总体 X 抽取的容量为 n 的样本，记 $\overline{X}$ 为样本均值，S 为样本标准差. 则在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下建立检验假设:

(1) $H_0:\mu=\mu_0=70\longleftrightarrow H_1:\mu\neq 70$.

(2) 选取检验统计量 $T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\dfrac{\overline{X}-70}{S/\sqrt{36}}\sim t(n-1)=t(35)$.

(3) 拒绝域为 $|T|\geqslant t_{1-\alpha/2}(n-1)=t_{0.975}(35)$.

(4) 由 $\overline{x}=66.5, s=15$ 可算得 $|t|=\dfrac{|66.5-70|}{15/\sqrt{36}}=1.4<2.0301=t_{0.975}(35)$.

所以接受假设 $H_0:\mu=70$，即在显著性水平 0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分.

一九九九年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 5 个小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=$________.

解. 应填 $\frac{1}{3}$. 利用等价无穷小量代换和洛必达法则可得.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x\tan x}\right)&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_0^x \sin\left((x-t)^2\right)\mathrm{d}t=$________.

解. 应填 $\sin(x^2)$. 令 $u=x-t$，则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，所以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin\left((x-t)^2\right)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^0\left(-\sin\left(u^2\right)\right)\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sin\left(u^2\right)\mathrm{d}u=\sin(x^2).$$

3. 微分方程 $y''-4y=\mathrm{e}^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

解. 应填 $y=C_1\mathrm{e}^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)\mathrm{e}^{2x}$，其中 C_1,C_2 为任意常数. 原方程对应的齐次方程 $y''-4y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-4=0$，解得 $\lambda_1=2,\lambda_2=-2$，故 $y''-4y=0$ 的通解为 $y_1=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{2x}$. 由于非齐次项为 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$，因此原方程的特解可设为 $y^*=Ax\mathrm{e}^{2x}$，代入原方程可求得 $A=\frac{1}{4}$，故所求通解为

$$y=y_1+y^*=C_1\mathrm{e}^{-2x}+\left(C_2+\frac{1}{4}x\right)\mathrm{e}^{2x}.$$

4. 设 n 阶矩阵 A 的元素全为 1，则 A 的 n 个特征值是________.

解. 应填 n 和 0（$n-1$ 重）. 因为

$$\begin{aligned}|\lambda E-A|&=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&\cdots&-1\\-1&\lambda-1&\cdots&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-n&-1&\cdots&-1\\\lambda-n&\lambda-1&\cdots&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\lambda-n&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}\\&=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1&-1&\cdots&-1\\1&\lambda-1&\cdots&-1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&-1&\cdots&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-n)\begin{vmatrix}1&-1&\cdots&-1\\0&\lambda&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^{n-1}(\lambda-n).\end{aligned}$$

令 $|\lambda E-A|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)=0$，得到矩阵 A 的 n 个特征值：$\lambda_1=n$（1 重），$\lambda_2=0$（$n-1$ 重）.

5. 设两两相互独立的三事件 A,B 和 C 满足条件:

$$ABC=\emptyset,\quad P(A)=P(B)=P(C)<\frac{1}{2},\quad P(A\cup B\cup C)=\frac{9}{16},$$

则 $P(A)=$ ________.

解. 应填 1/4. 因为 $P(A)=P(B)=P(C)$, 设 $P(A)=P(B)=P(C)=p$, 由于 A,B,C 两两相互独立, 所以有

$$P(AB)=P(A)P(B)=p\times p=p^2,$$

$$P(AC)=P(A)P(C)=p\times p=p^2,$$

$$P(BC)=P(B)P(C)=p\times p=p^2.$$

又由于 $ABC=\emptyset$, 因此有 $P(ABC)=P(\emptyset)=0$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{9}{16}&=P(A\cup B\cup C)\\&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AC)-P(AB)-P(BC)+P(ABC)\\&=p+p+p-p^2-p^2-p^2+0=3p-3p^2.\end{aligned}$$

解得 $p=\frac{3}{4}$ 或 $p=\frac{1}{4}$. 因 $P(A)=P(B)=P(C)=p<\frac{1}{2}$, 故 $p=\frac{1}{4}$, 即 $P(A)=\frac{1}{4}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数.

解. 应选 (A). $f(x)$ 的原函数 $F(x)$ 可以表示为 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$, 于是

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)\mathrm{d}t+C=\int_0^x f(-u)d(-u)+C.$$

当 $f(x)$ 为奇函数时, $f(-u)=-f(u)$, 从而有

$$F(-x)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C=F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数. 故 (A) 为正确选项. (B)、(C)、(D) 可分别举反例如下:

$f(x)=x^2$ 是偶函数, 但其原函数 $F(x)=\frac{1}{3}x^3+1$ 不是奇函数, 可排除 (B);

$f(x)=\cos^2 x$ 是周期函数, 但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x$ 不是周期函数, 可排除 (C);

$f(x)=x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增函数, 但其原函数 $F(x)=\frac{1}{2}x^2$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内非单调增函数, 可排除 (D).

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处 $\cdots$ (　　)

(A) 极限不存在.　　(B) 极限存在，但不连续.

(C) 连续，但不可导.　　(D) 可导.

解. 应选 (D). 因为

$$f'_+(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0,$$
$$f'_-(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=\lim_{x\to0^-}xg(x)=0,$$

从而，$f'(0)$ 存在，且 $f'(0)=0$，故正确选项为 (D).

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$，$S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty$，其中 $a_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx$ （$n=0,1,2,\cdots$），则 $S\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ 等于 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\frac{1}{2}$.　　(B) $-\frac{1}{2}$.　　(C) $\frac{3}{4}$.　　(D) $-\frac{3}{4}$.

解. 应选 (C). 由题设知，应先将 $f(x)$ 从 $[0,1)$ 作偶延拓，使之成为区间 $[-1,1]$ 上的偶函数，然后再作周期为 2 的周期延拓，再展开为傅里叶级数. 因此

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-2-\frac{1}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right).$$

而 $x=\frac{1}{2}$ 是 $f(x)$ 的间断点，按狄利克雷定理有

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2}^-\right)+f\left(\frac{1}{2}^+\right)}{2}=\frac{\frac{1}{2}+1}{2}=\frac{3}{4}.$$

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|\neq0$.

(B) 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$.

(C) 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|\neq0$.

(D) 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|=0$.

解. 应选 (B). A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则 AB 是 m 阶方阵，因

$$r(AB)\leqslant\min[r(A),r(B)]\leqslant\min(m,n),$$

当 $m>n$ 时，有 $r(AB)\leqslant\min[r(A),r(B)]\leqslant n<m$，即 $(AB)x=0$ 的系数矩阵的秩小于未知数的个数，故有行列式 $|AB|=0$，故应选 (B).

5. 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$, 则(　　)

(A) $P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(B) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

(C) $P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.　　(D) $P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$.

解. 应选 (B). 根据正态分布的性质：服从正态分布的独立随机变量的线性组合仍服从正态分布. 因 X和Y 相互独立，且 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(1,1)$, 所以

$$X+Y\sim N(1,2),\quad X-Y\sim N(-1,2).$$

将它们标准化得到

$$\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1),\quad \frac{X-Y+1}{\sqrt{2}}\sim N(0,1).$$

则根据标准正态分布的对称性有

$$\begin{aligned}
P\{X+Y\leqslant 0\}&=P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}}\leqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}<\frac{1}{2},\\
P\{X+Y\leqslant 1\}&=P\left\{\frac{X+Y-1}{\sqrt{2}}\leqslant 0\right\}=\frac{1}{2},\\
P\{X-Y\leqslant 0\}&=P\left\{\frac{X-Y+1}{\sqrt{2}}\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}>\frac{1}{2},\\
P\{X-Y\leqslant 1\}&=P\left\{\frac{X-Y+1}{\sqrt{2}}\leqslant \frac{2}{\sqrt{2}}\right\}>\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

三、(本题满分 5 分)

设 $y=y(x)$, $z=z(x)$ 是由方程 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 所确定的函数, 其中 f 和 F 分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数, 求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解. 分别在 $z=xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z)=0$ 的两端对 x 求导数, 得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(x,y)+x\left(1+\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)f'(x,y)\\ F'_x+F'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\end{cases}$$

整理后得

$$\begin{cases}-xf'(x,y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f(x,y)+xf'(x,y)\\ F'_y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+F'_z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-F'_x\end{cases}$$

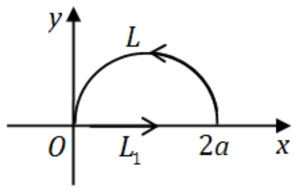
解此方程组得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\begin{vmatrix}-xf' & f+xf'\\ F'_y & -F'_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-xf' & 1\\ F'_y & F'_z\end{vmatrix}}=\frac{(f+xf')F'_y-xf'F'_z}{F'_y+xf'F'_z}\quad (F'_y+xf'F'_z\neq 0).$$

四、（本题满分 5 分）

求 $I=\int_L \left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$，其中 a,b 为正常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

解. 如图，添加从点 $O(0,0)$ 沿 $y=0$ 到点 $A(2a,0)$ 的有向直线段 L_1，则有



$$I=\int_{L+L_1}\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy$$
$$-\int_{L_1}\left(e^x\sin y-b(x+y)\right)dx+\left(e^x\cos y-ax\right)dy.$$

利用格林公式，前一积分

$$I_1=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy=\iint_D(b-a)\,dx\,dy=\frac{\pi}{2}a^2(b-a).$$

其中 D 为 L_1+L 所围成的半圆域，后一积分选择 x 为参数，得

$$I_2=\int_0^{2a}(-bx)\,dx=-2a^2b.$$

从而 $I=I_1-I_2=\left(\frac{\pi}{2}+2\right)a^2b-\frac{\pi}{2}a^3$.

五、（本题满分 6 分）

设函数 $y(x)$（$x\geqslant 0$）二阶可导，且 $y'(x)>0$，$y(0)=1$. 过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线，上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1，区间 $[0,x]$ 上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2，并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1，求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

解. 曲线 $y=y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为 $Y-y(x)=y'(x)(X-x)$，所以切线与 x 轴的交点为 $\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$. 由于 $y'(x)>0,\ y(0)=1$，因此 $y(x)>0$（$x>0$）. 于是有

$$S_1=\frac{1}{2}y\left|x-\left(x-\frac{y}{y'}\right)\right|=\frac{y^2}{2y'}\quad S_2=\int_0^x y(t)\,dt.$$

根据题设 $2S_1-S_2=1$，即

$$2\cdot\frac{y^2}{2y'}-\int_0^x y(t)\,dt=1.$$

两边对 x 求导并化简得. 这是可降阶得二阶常微分方程，令 $p=y'$，则上述方程可化为 $yp\frac{dp}{dy}=p^2$，分离变量得 $\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y}$，解得 $p=C_1y$，即 $\frac{dy}{dx}=C_1y$, 从而有 $y=C_1e^x+C_2$，根据 $y(0)=1,y'(0)=1$，可得 $C_1=1,C_2=0$，故所求曲线得方程为 $y=e^x$.

六、（本题满分 6 分）

试证：当 $x>0$ 时，$\left(x^2-1\right)\ln x \geqslant (x-1)^2$.

解. 当 $x=1$ 时，原不等式显然成立；当 $0<x<1$ 时，原不等式等价于 $\ln x \leqslant \frac{x-1}{x+1}$；当 $1<x<+\infty$ 时，原不等式等价于 $\ln x \geqslant \frac{x-1}{x+1}$. 令 $f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$，则

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}>0 \quad (x>0).$$

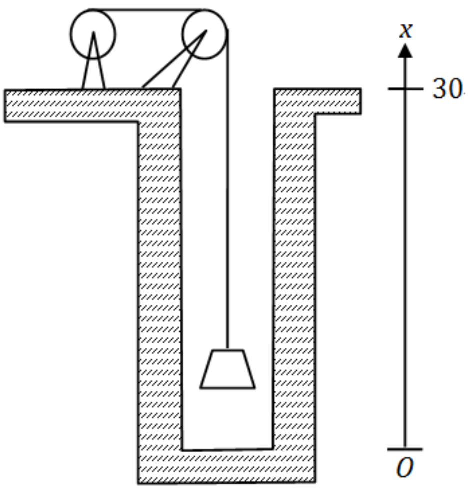
又因为 $f(1)=0$，利用函数单调性可知当 $0<x<1$ 时，$f(x)<0$ 即 $\ln x<\frac{x-1}{x+1}$；当 $1<x<+\infty$ 时，$f(x)>0$ 即 $\ln x>\frac{x-1}{x+1}$. 综上所述，当 $x>0$ 时，总有 $\left(x^2-1\right)\ln x \geqslant (x-1)^2$.

七、（本题满分 6 分）

为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口（见图），已知井深 $30m$，抓斗自重 $400N$，缆绳每米重 $50N$，抓斗抓起的污泥重 $2000N$，提升速度为 $3m/s$，在提升过程中，污泥以 $20N/s$ 的速度从抓斗缝隙中漏掉，现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功?

（说明：① $1N\times 1m=1J$；其中 m,N,s,J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳；

② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计.）



解. 设抓起污泥的抓斗提升至井口需做功 W，当抓斗运动到 x 处时，作用力 $f(x)$ 包括抓斗的自重 $400N$，缆绳的重力 $50(30-x)N$，污泥的重力 $\left(2000-\frac{x}{3}\cdot 20\right)N$，即 $f(x)=400+50(30-x)+2000-\frac{20}{3}x=3900-\frac{170}{3}x$，于是

$$W=\int_0^{30}\left(3900-\frac{170}{3}x\right)\mathrm{d}x=\left[3900x-\frac{85}{3}x^2\right]_0^{30}=117000-24500=91500(J).$$

八、(本题满分 7 分)

设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in S$，π 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

解. 设 (X,Y,Z) 为 π 上任意一点，则 π 的方程为

$$x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{2}X+\frac{y}{2}Y+zZ=1.$$

由点到平面的公式，$O(0,0,0)$ 到 π 的距离

$$\rho(x,y,z)=\frac{|Ax+By+Cz|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{\left|\frac{x}{2}x+\frac{y}{2}y+z\cdot z\right|}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2+z^2}}=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}},$$

将 S 投影到 xOy 平面，其投影域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2\}$. 由曲面方程知 $z=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)},(x,y)\in D$, 于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},$$

因此

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}\mathrm{d}\sigma$$

故有

$$\iint_S \frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\iint_S z\sqrt{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}\,\mathrm{d}S$$
$$=\frac{1}{4}\iint_D (4-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)r\,\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{2}.$$

九、(本题满分 7 分)

设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$,

(I) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值;

(II) 试证：对任意的常数 $\lambda>0$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

解. (I) 因为

$$\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{n}\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n(n+1)},$$

所以部分和数列

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}(a_i+a_{i+2})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=1-\frac{1}{n+1},$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\lim_{n\to\infty}S_n=1$.

(II) 令 $t=\tan x$，则有

$$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}<\int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1}\Rightarrow\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^\lambda(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}.$$

由于 $\lambda+1>0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 也收敛.

十、（本题满分 8 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}$，其行列式 $|A|=-1$，又 A 的伴随矩阵 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$，求 a,b,c 和 λ_0 的值.

解. 根据题设有 $AA^*=|A|E=-E$ 和 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$，于是

$$AA^*\alpha=A\lambda_0\alpha=\lambda_0 A\alpha\quad\Rightarrow\quad-\alpha=\lambda_0 A\alpha.$$

也即有

$$\lambda_0\begin{pmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\lambda_0(-a+1+c)=1 & (1)\\ \lambda_0(-5-b+3)=1 & (2)\\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 & (3)\end{cases}$$

由 (1)(3) 两式得 $\lambda_0=1$，把 $\lambda_0=1$ 代入 (1) 和 (2) 中得 $b=-3,a=c$. 从而

$$-1=|A|=\begin{vmatrix}a&-1&a\\5&-3&3\\1-a&0&-a\end{vmatrix}=a-3\quad\Rightarrow\quad a=2.$$

因此 $a=2,b=-3,c=2,\lambda_0=1$.

十一、（本题满分 6 分）

设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定，B 为 $m\times n$ 实矩阵，B^T 为 B 的转置矩阵，试证：B^TAB 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $r(B)=n$.

解. “必要性”：设 B^TAB 为正定矩阵，则由定义知，对任意的实 n 维列向量 $x\neq0$，有 $x^T\left(B^TAB\right)x>0$, 即 $(Bx)^TA(Bx)>0$，于是，$Bx\neq0$，即对任意的实 n 维列向量 $x\neq0$，都有 $Bx\neq0$. 因此 $Bx=0$ 只有零解，故有 $r(B)=n$.

“充分性”：因 $\left(B^TAB\right)^T=B^TA^TB=B^TAB$，故 B^TAB 也为实对称矩阵. 若 $r(B)=n$，则线性方程组 $Bx=0$ 只有零解，从而对任意的实 n 维列向量 $x\neq0$,

有 $Bx\neq 0$. 又 A 为正定矩阵, 所以对于 $Bx\neq 0$ 有 $(Bx)^TA(Bx)=x^T\left(B^TAB\right)x>0$, 故 B^TAB 为正定矩阵.

十二、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立, 下表列出了二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律及关于 X 和关于 Y 的边缘分布律中的部分数值, 试将其余数值填入表中的空白处.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_i$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}=p_j$	$\frac{1}{6}$			1

解. 由离散型随机变量边缘分布律的定义:

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_j P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=\sum_j p_{ij},\quad j=1,2,3.$$

$$p_{\cdot j}=P\left\{Y=y_j\right\}=\sum_i P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=\sum_i p_{ij},\quad i=1,2.$$

由表知 $P\left\{Y=y_1\right\}=\frac{1}{6}$, $P\left\{X=x_2,Y=y_1\right\}=\frac{1}{8}$, 所以

$$P\left\{X=x_1,Y=y_1\right\}=P\left\{Y=y_1\right\}-P\left\{X=x_2,Y=y_1\right\}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24}.$$

又根据 X 和 Y 相互独立, 则有

$$p_{ij}=P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}=P\{X=x_i\}P\left\{Y=y_j\right\}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}.$$

因 $P\left\{X=x_1,Y=y_1\right\}=\frac{1}{24}$, $P\left\{Y=y_1\right\}=\frac{1}{6}$, 所以

$$P\{X=x_1\}=\frac{P\left\{X=x_1,Y=y_1\right\}}{P\left\{Y=y_1\right\}}=\frac{\frac{1}{24}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{4}.$$

再由边缘分布的定义有

$$\begin{aligned}P\left\{X=x_1,Y=y_3\right\}&=P\{X=x_1\}-P\left\{X=x_1,Y=y_1\right\}-P\left\{X=x_1,Y=y_2\right\}\\&=\frac{1}{4}-\frac{1}{24}-\frac{1}{8}=\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

又由独立性知

$$P\left\{Y=y_3\right\}=\frac{P\left\{X=x_1,Y=y_3\right\}}{P\{X=x_1\}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}.$$

由边缘分布定义有

$$P\left\{X=x_2,Y=y_3\right\}=P\left\{Y=y_3\right\}-P\left\{X=x_1,Y=y_3\right\}=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{1}{4}.$$

再由 $\sum_i p_{i\cdot}=1$，所以

$$P\{X=x_2\}=1-P\{X=x_1\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

由边缘分布定义有

$$\begin{aligned}P\left\{X=x_2,Y=y_2\right\}&=P\left\{X=x_2\right\}-P\left\{X=x_2,Y=y_1\right\}-P\left\{X=x_2,Y=y_3\right\}\\&=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

又 $\sum_j p_{\cdot j}=1$，所以

$$P\left\{Y=y_2\right\}=1-P\left\{Y=y_1\right\}-P\left\{Y=y_3\right\}=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

所以填充表格如下:

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}=p_i$
x_1	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}=p_j$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	1

十三、(本题满分 6 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量 $\widehat{\theta}$;　(II) 求 $\widehat{\theta}$ 的方差 $D\left(\widehat{\theta}\right)$.

解. (I) 由期望的定义:

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta x\frac{6x}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta\left(\frac{6x^2}{\theta^2}-\frac{6x^3}{\theta^3}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{6}{\theta^2}\int_0^\theta x^2\mathrm{d}x-\frac{6}{\theta^3}\int_0^\theta x^3\mathrm{d}x=\frac{6}{\theta^2}\frac{\theta^3}{3}-\frac{6}{\theta^3}\frac{\theta^4}{4}=2\theta-\frac{3\theta}{2}=\frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$，用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$，即 $\frac{\theta}{2}=\overline{X}$，解得的矩估计量 $\widehat{\theta}=2\overline{X}$.

(II) 由于

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\int_0^\theta\left(\frac{6x^3}{\theta^2}-\frac{6x^4}{\theta^3}\right)\mathrm{d}x=\frac{6\theta^2}{20},$$

所以

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{6\theta^2}{20}-\left(\frac{\theta}{2}\right)^2=\frac{\theta^2}{20},$$

从而

$$D(\overline{X})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X)=\frac{1}{n}D(X)=\frac{\theta^2}{20n}.$$

因此 $\widehat{\theta}=2\overline{X}$ 的方差为 $D(\widehat{\theta})=D(2\overline{X})=4D(\overline{X})=\frac{4}{n}D(X)=\frac{\theta^2}{5n}$.

二〇〇〇年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=$ ________.

解. 应填 $\frac{\pi}{4}$. 由于曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-(x-1)^2}$ 是以点 $(1,0)$ 为圆心，以 1 为半径的上半圆周，它与直线 $x=1$ 和 $y=0$ 所围图形的面积为圆面积的 $\frac{1}{4}$，即 $\frac{\pi}{4}$.

2. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点 $(1,-2,2)$ 的法线方程为 ________.

解. 应填 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}$. 令 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$，则有

$$F_x'(1,-2,2)=2x|_{(1,-2,2)}=2,$$

$$F_y'(1,-2,2)=4y|_{(1,-2,2)}=-8,$$

$$F_z'(1,-2,2)=6z|_{(1,-2,2)}=12.$$

所以曲面在点 $(1,-2,2)$ 处的法线方程为 $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-8}=\frac{z-2}{12}$，即

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{6}.$$

3. 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解为 ________.

解. 应填 $y=\frac{C_1}{x^2}+C_2$. 令 $p=y'$，原方程化为 $x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+3p=0$. 分离变量并两边积分，得方程的通解 $p=Cx^{-3}$. 对上式再积分得

$$y=\int Cx^{-3}\,\mathrm{d}x=-\frac{C}{2}x^{-2}+C_2=\frac{C_1}{x^2}+C_2,\left(C_1=-\frac{C}{2}\right)$$

所以原方程的通解为 $y=\frac{C_1}{x^2}+C_2$.

4. 已知方程组 $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&a+2\\1&a&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ 无解，则 $a=$ ________.

解. 应填 -1. 化增广矩阵为阶梯形，有

$$\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&1\\2&3&a+2&\vdots&3\\1&a&-2&\vdots&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&1\\0&-1&a&\vdots&1\\0&a-2&-3&\vdots&-1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&\vdots&1\\0&-1&a&\vdots&1\\0&0&(a-3)(a+1)&\vdots&a-3\end{pmatrix}$$

当 $a=3$ 时，系数矩阵和增广矩阵的秩均为 2，小于未知量的个数，所以方程组有无穷多解．当 $a=-1$ 时，系数矩阵的秩为 2，而增广矩阵的秩为 3，因此方程组无解．

5. 设两个相互独立的事件 A 和 B 都不发生的概率为 $\frac{1}{9}$，A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等，则 $P(A)=$________．

解. 应填 $\frac{2}{3}$．由 $P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)$ 有 $P(A)P(\overline{B})=P(\overline{A})P(B)$，即有 $P(A)[1-P(B)]=[1-P(A)]P(B)$．可得 $P(A)=P(B)$，$P(\bar{A})=P(\bar{B})$．从而有

$$P(\overline{AB})=P(\overline{A})P(\overline{B})=\left[P(\overline{A})\right]^2=[1-P(A)]^2=\frac{1}{9}.$$

解得 $P(A)=\frac{2}{3}$．

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $f(x),g(x)$ 是恒大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$．　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$．

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$．　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$．

解. 应选 (A)．设 $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$，则 $(F(x))'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0$，则 $F(x)$ 在 $a<x<b$ 时单调递减，所以对 $\forall a<x<b$，$F(a)>F(x)>F(b)$，即

$$\frac{f(a)}{g(a)}>\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)}$$

得 $f(x)g(b)>f(b)g(x),a<x<b$，故 (A) 为正确选项．

2. 设 $S:x^2+y^2+z^2=a^2\,(z\geqslant 0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有 $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\iint_S x\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1} x\,\mathrm{d}S$．　　(B) $\iint_S y\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1} x\,\mathrm{d}S$．

(C) $\iint_S z\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1} x\,\mathrm{d}S$．　　(D) $\iint_S xyz\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1} xyz\,\mathrm{d}S$．

解. 应选 (C)．本题中 S 关于 yoz 平面和 xoz 平面均对称，而 $f(x,y,z)=z$ 对 x,y 均为偶函数，则

$$\iint_S z\,\mathrm{d}S=2\iint_{S\cap\{x\geqslant 0\}} z\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S$$

又因为在 S_1 上将 x 换为 y，y 换为 z，z 换为 x，S_1 不变（即积分区域 S_1 关于 x,y,z 轮换对称），从而将被积函数也作此轮换变换后，其积分的值不变，即有

$$4\iint_{S_1} z\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1} x\,\mathrm{d}S=4\iint_{S_1} y\,\mathrm{d}S.$$

故选项 (C) 正确．

曲面 S 关于 yoz 平面对称，x 为 x 的奇函数，所以 $\iint_S x\,\mathrm{d}S=0$，而 $\iint_{S_1} x\,\mathrm{d}S$ 中 $x\geqslant 0$ 且仅在 yoz 面上 $x=0$，从而 $\iint_{S_1} x\,\mathrm{d}S>0$，(A) 不成立.

曲面 S 关于 zox 平面对称, y 为 y 的奇函数, 所以 $\iint_S y\,\mathrm{d}S=0$, 而 $\iint_{S_1} x\,\mathrm{d}S>0$, 所以 (B) 不成立.

曲面 S 关于 zox 平面对称，xyz 为 y 的奇函数，所以 $\iint_S xyz\,\mathrm{d}S=0$，而 $\iint_{S_1} xyz\,\mathrm{d}S>0$，所以 (D) 不成立.

3. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为……………………………………( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$.

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$.

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

解. 应选 (D). 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_{n+1}$ 也收敛. 由收敛级数的性质知级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}u_n+\sum_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$$

也收敛，即选项 (D) 成立.

(A) 错误: 取 $u_n=(-1)^n\dfrac{1}{\ln(1+n)}$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n\ln(1+n)}$ 是发散的.

(B) 错误：取 $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散;

(C) 错误：取 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但

$$u_{2n-1}-u_{2n}=\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}=\frac{4n-1}{2n(2n-1)}\sim\frac{1}{n}$$

由比较审敛法的极限形式知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 发散.

4. 设 n 维列向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m(m<n)$ 线性无关，则 n 维列向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充分必要条件为……………………………………………………( )

(A) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 可由向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性表示.

(B) 向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 可由向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性表示.

(C) 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 与向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 等价.

(D) 矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 与矩阵 $B=\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)$ 等价.

解. 应选 (D). 由反例 $\alpha_1=(1,0,0,0)^T,\alpha_2=(0,1,0,0)^T,\beta_1=(0,0,1,0)^T,\beta_2=(0,0,0,1)^T$ 可排除选项 (A), (B), (C). 剩下的 (D) 为正确选项. 事实上, 矩阵 $A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 与矩阵 $B=\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)$ 等价的充要条件是 $r(A)=r(B)$, 即

$$r\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)=r\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right)=m,$$

因此是向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 线性无关的充要条件.

5. 设二维随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布, 则随机变量 $\xi=X+Y$ 与 $\eta=X-Y$ 不相关的充分必要条件为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) $E(X)=E(Y)$. (B) $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$.

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$. (D) $E(X^2)+[E(X)]^2=E(Y^2)+[E(Y)]^2$.

解. 应选 (B). ξ 和 η 不相关的充分必要条件是它们的协方差 $\mathrm{Cov}\left(\xi,\eta\right)=0$. 由于

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(\xi,\eta\right)&=\mathrm{Cov}(X+Y,X-Y)\\&=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(X,Y)+\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=\mathrm{Cov}(X,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)=D(X)-D(Y).\end{aligned}$$

可见 $\mathrm{Cov}\left(\xi,\eta\right)=0$ 等价于 $D(X)=D(Y)$, 即 $E(X^2)-[E(X)]^2=E(Y^2)-[E(Y)]^2$, 故正确选项为 (B).

三、(本题满分 5 分)

求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

解. 由于极限中含有 $e^{\frac{1}{x}}$ 与 $|x|$, 故应分别求其左极限与右极限.

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{2}{1}-1=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1.$$

左极限与右极限相等, 所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

四、(本题满分 6 分)

设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{x}{y}\right)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, g 具有二阶连续导数, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. 根据复合函数的求导公式有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\left[f_{11}''x+f_{12}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]y+f_1'+\left[f_{21}''x+f_{22}''\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\right]\frac{1}{y}$$
$$+f_2'\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)+g''\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+g''\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=f_1'-\frac{1}{y^2}f_2'+xyf_{11}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''-\frac{1}{x^2}g'-\frac{y}{x^3}g''$$

五、（本题满分 6 分）

计算曲线积分 $I=\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周 $(R>1)$，取逆时针方向.

解. 记 $P=\frac{-y}{4x^2+y^2}, Q=\frac{x}{4x^2+y^2}$, 则 $\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}=0, (x,y)\neq(0,0)$. 在 L 内加 L_1：椭圆 $4x^2+y^2=\varepsilon^2$ 的顺时针方向. 设 D 由 L 与 L_1 所围，$D_1: 4x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2$，则有

$$I=\int_{L+L_1}\frac{x\,dy-y\,dx}{4x^2+y^2}-\int_{L_1}\frac{x\,dy-y\,dx}{4x^2+y^2}=\iint_D 0\,dx\,dy-\int_{L_1}\frac{x\,dy-y\,dx}{4x^2+y^2}$$
$$=-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{L_1}x\,dy-y\,dx=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}2\,dx\,dy=\frac{2}{\varepsilon^2}\cdot\pi\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\varepsilon=\pi.$$

六、（本题满分 7 分）

设对于半空间 $x>0$ 内任意的光滑有向封闭曲面 S，都有

$$\oiint_S xf(x)\,dy\,dz-xyf(x)\,dz\,dx-e^{2x}z\,dx\,dy=0,$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，求 $f(x)$.

解. 由题设条件，由高斯公式可得

$$0=\oiint_S xf(x)\,dy\,dz-xyf(x)\,dz\,dx-e^{2x}z\,dx\,dy$$
$$=\pm\iiint_\Omega\left[xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}\right]dv.$$

其中 Ω 为 S 所围成的有界闭区域. 由 S 的任意性知被积函数应恒等于零. 即

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0,\quad (x>0).$$

变形后得

$$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}e^{2x},(x>0)$$

利用一阶线性非齐次微分方程的通解公式，可得

$$f(x)=e^{\int(1-\frac{1}{x})dx}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot e^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)dx}\,dx+C\right]$$
$$=\frac{e^x}{x}\left[\int\frac{1}{x}e^{2x}\cdot xe^{-x}\,dx+C\right]=\frac{e^x}{x}(e^x+C)$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{e^{2x}+Ce^x}{x}\right)=1$, 故必有 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{2x}+Ce^x\right)=0$, 即 $C+1=0$, 从而 $C=-1$. 因此 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}(e^x-1)$.

七、(本题满分 6 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n+(-2)^n}\dfrac{x^n}{n}$ 的收敛区域, 并讨论该区间端点处的收敛性.

解. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{x\to\infty}\frac{[3^n+(-2)^n]n}{[3^{n+1}+(-2)^{n+1}](n+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[1+(\frac{-2}{3})^n\right]n}{3\left[1+(\frac{-2}{3})^{n+1}\right](n+1)}=\frac{1}{3}$$

所以收敛半径为 $R=3$, 相应的收敛区间为 $(-3,3)$. 当 $x=3$ 时, 因为

$$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{2n}$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 由比较审敛法的极限形式, 所以原级数在点 $x=3$ 处发散; 当 $x=-3$ 时, 由于

$$\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\left(\frac{(-3)^n+2^n}{3^n+(-2)^n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\right)\cdot\frac{1}{n}=(-1)^n\frac{1}{n}-\frac{(2)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n},$$

分别考虑两个级数, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$ 是收敛的. 又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]n=\infty$, 从而

$$\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}\cdot\frac{1}{n}<\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

再由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ 收敛,根据比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛,于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛, 所以原级数在点 $x=-3$ 处收敛. 所以收敛域为 $[-3,3)$.

八、(本题满分 7 分)

设有一半径为 R 的球体, P_0 是此球的表面上的一个定点, 球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比 (比例常数 $k>0$), 求球体的重心位置.

解. 记所考虑的球体为 Ω, 以 Ω 的球心为坐标原点 O, 射线 OP_0 为正 x 轴建立直角坐标系, 则球面方程为: $x^2+y^2+z^2=R^2$, 点 P_0 的坐标为 $(R,0,0)$, 设 Ω 的重心位置为 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, 由对称性, 得 $\bar{y}=0,\bar{z}=0$, 设 μ 为 Ω 上点 (x,y,z) 处的密度, 按题设 $\mu=k\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]$, 则

$$\bar{x}=\frac{\iiint_\Omega x\mu\,dv}{\iiint_\Omega \mu\,dv}=\frac{\iiint_\Omega x\cdot k\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dv}{\iiint_\Omega k\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]dv}.$$

分别计算分子和分母的两个积分得

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega k\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]\mathrm{d}v &= \iiint_\Omega k\left(x^2+y^2+z^2+R^2\right)\mathrm{d}v-2kR\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v\\ &= k\iiint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}v+k\iiint_\Omega R^2\,\mathrm{d}v-0\\ &= 8k\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r+\frac{4k}{3}\pi R^5\\ &= \frac{4k\pi R^5}{5}+\frac{4k}{3}\pi R^5=\frac{32}{15}k\pi R^5,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega kx\left[(x-R)^2+y^2+z^2\right]\mathrm{d}v &= k\iiint_\Omega x(x^2+y^2+z^2+R^2)-2kR\iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}v\\ &= 0-\frac{2kR}{3}\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v\\ &= -\frac{2kR}{3}\cdot\frac{4}{5}\pi R^5=-\frac{8}{15}k\pi R^6.\end{aligned}$$

故 $\overline{x}=-\frac{R}{4}$. 因此球体 Ω 的重心位置为 $\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$.

九、（本题满分 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x=0$，$\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$. 试证：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

解. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t, 0\leqslant x\leqslant\pi$，则有 $F(0)=0$ 和 $F(\pi)=0$. 又由题设，用分部积分有

$$\begin{aligned}0=\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \cos x\,dF(x)\\ &= F(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x=\int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由积分中值定理知，存在 $\xi\in(0,\pi)$ 使

$$0=\int_0^\pi F(x)\sin x\,\mathrm{d}x=F(\xi)\sin\xi\cdot(\pi-0).$$

因为 $\xi\in(0,\pi)$，$\sin\xi\neq0$，所以推知存在 $\xi\in(0,\pi)$，使得 $F(\xi)=0$. 再在区间 $[0,\xi]$ 与 $[\xi,\pi]$ 上对 $F(x)$ 用罗尔定理，推知存在 $\xi_1\in(0,\xi)$，$\xi_2\in(\xi,\pi)$ 使得 $F'(\xi_1)=0, F'(\xi_2)=0$，即 $f(\xi_1)=0, f(\xi_2)=0$.

十、（本题满分 6 分）

设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{pmatrix}$，且 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$，其中 E 为 4 阶单位矩阵，求矩阵 B.

解. 由 $8=|A^*|=|A|^3$ 得 $|A|=2$，$A^*A=2E$．等式 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3E$ 两边右乘 A，整理得 $(A-E)B=3A$．再两边左乘 A^*，整理得 $(2E-A^*)B=6E$．于是

$$B=6(2E-A^*)^{-1}=6\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&0&1&0\\0&3&0&-6\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=6\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&0&0&0\\0&6&0&0\\6&0&6&0\\0&3&0&-1\end{pmatrix}.$$

十一、（本题满分 8 分）

某试验性生产线每年一月份进行熟练工与非熟练工的人数统计，然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门，其缺额由招收新的非熟练工补齐，新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工．设第 n 年一月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n,y_n 记成向量 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

(I) 求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式: $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$;

(II) 验证 $\eta_1=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量，并求出相应的特征值;

(III) 当 $\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 时，求 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}$.

解. (I) 由题意得

$$\begin{cases}x_{n+1}=\frac{5}{6}x_n+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)\\y_{n+1}=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}x_n+y_n\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n+\frac{2}{5}y_n\\y_{n+1}=\frac{1}{10}x_n+\frac{3}{5}y_n\end{cases}$$

写成矩阵形式得到

$$\begin{pmatrix}x_{n+1}\\y_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}\frac{9}{10}&\frac{2}{5}\\\frac{1}{10}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}.$$

(II) 把 η_1，η_2 作为列向量写成矩阵的形式 (η_1,η_2)，因为其行列式 $\left|(\eta_1,\eta_2)\right|=$

$\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$，可见 η_1, η_2 线性无关．又

$$A\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \eta_1, \quad A\eta_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\eta_2,$$

因此 η_1 为 A 的属于特征值 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量，η_2 为 A 的属于特征值 $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ 特征向量.

(III) 因为

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} \cdots = A^n \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

因此只要计算 A^n 即可．令 $P = (\eta_1, \eta_2) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，则由 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$，

有 $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}$．求得 $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$，于是

$$A^n = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 + \left(\frac{1}{2}\right)^n & 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 4\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 8 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

十二、（本题满分 8 分）

某流水生产线上每个产品不合格的概率为 p（$0 < p < 1$），各产品合格与否相互独立，当出现一个不合格产品时即停机检修．设开机后第一次停机时已生产了产品的个数为 X，求 X 的数学期望 $E(X)$ 和方差 $D(X)$.

解. 记 $q = 1 - p$，X 的概率分布为 $P\{X = k\} = q^{k-1}p, (k = 1, 2 \cdots)$．由离散型随机变量的数学期望定义得，$X$ 的数学期望为

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP\{X = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}p = p\sum_{k=1}^{\infty} \left(q^k\right)'$$

$$= p\left(\sum_{k=1}^{\infty} q^k\right)' = p\left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1}{p}.$$

因为

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2q^{k-1}p=p\left[q\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'\right]'$$

$$=p\left[\frac{q}{(1-q)^2}\right]'=\frac{2-p}{p^2}.$$

故 X 的方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}.$$

十三、（本题满分 8 分）

设某种元件的使用寿命 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, x\geqslant\theta\\0, x<\theta\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 为未知参数，又设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 X 的一组样本观测值，求参数 θ 的最大似然估计值.

解. 似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\begin{cases}2^ne^{-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)}, x\geqslant\theta(i=1,2,\cdots,n)\\0,\text{其他}\end{cases}$$

当 $x_i\geqslant\theta(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\theta)>0$，所以 $\ln L(\theta)=n\ln 2-2\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\theta)$. 而

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=2n>0,$$

所以 $L(\theta)$ 单调增加. 要使得 $L(\theta)$ 值最大，θ 是越大越好. 又由于 θ 必须满足 $x_i\geqslant\theta\ (i=1,2,\cdots,n)$,因此当 θ 取 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的最小值时,$x_i\geqslant\theta(i=1,2,\cdots,n)$ 恒成立，且此时 $L(\theta)$ 取最大值，所以 θ 的最大似然估计值为

$$\widehat{\theta}=\min(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

二〇〇一年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $y = \mathrm{e}^x(c_1\sin x + c_2\cos x)$（$c_1, c_2$ 为任意常数）为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解，则该方程为 ________.

解. 应填 $y''-2y'+2y=0$. 由题设知对应特征方程的特征根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i=1\pm i$，从而特征方程为 $(\lambda-(1+i))(\lambda-(1-i))=\lambda^2-2\lambda+2=0$，于是所求二阶常系数线性齐次微分方程为 $y''-2y'+2y=0$.

2. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)}=$ ________.

解. 应填 $\frac{2}{3}$. 先计算偏导数:

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3}.$$

类似可得

$$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3};\qquad\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r},\quad\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3}.$$

根据定义有

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)=\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

于是

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} r)|_{(1,-2,2)}=\left.\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right|_{(1,-2,2)}=\frac{2}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\frac{2}{3}.$$

3. 交换二次积分的积分次序: $\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x=$ ________.

解. 应填 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y$. 注意在 $-1\leqslant y\leqslant 0$ 内，$2\geqslant 1-y$. 所以需要先交换积分上下限再交换积分次序:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{2}^{1-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x&=-\int_{-1}^{0}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{2}f(x,y)\,\mathrm{d}x\\&=-\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{0}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{0}^{1-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

4. 设矩阵 A 满足 $A^2+A-4E=0$，其中 E 为单位矩阵，则 $(A-E)^{-1}=$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{2}(A+2E)$. 由题设可得 $(A-E)(A+2E)=2E$. 从而

$$(A-E)\cdot\frac{1}{2}(A+2E)=E\quad\Rightarrow\quad(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(A+2E).$$

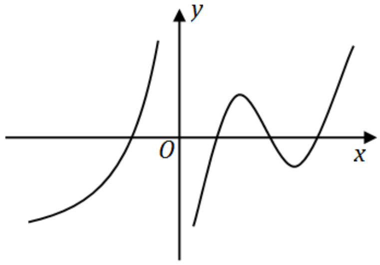
5. 设随机变量 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant$ ________.

解. 应填 1/2. 根据切比雪夫不等式有

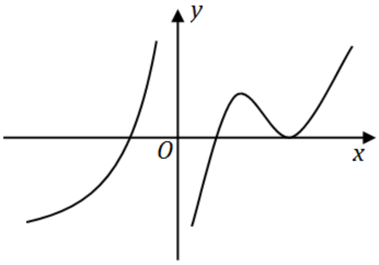
$$P\{|X-E(X)|\geqslant 2\}\leqslant \frac{D(X)}{2^2}=\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}.$$

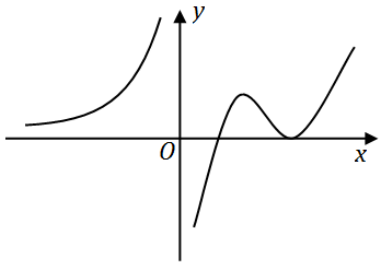
二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

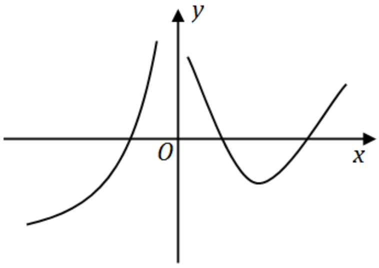
1. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如下图所示，

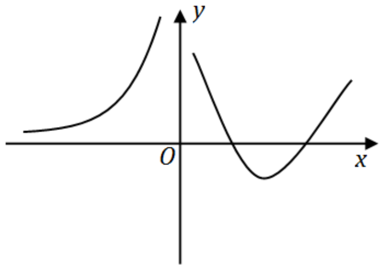


则导函数 $y=f'(x)$ 的图形为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 

(B) 

(C) 

(D) 

解. 应选 (D). 从题设图形可见，在 y 轴的左侧，曲线 $y=f(x)$ 是严格单调增加的，因此当 $x<0$ 时，一定有 $f'(x)>0$，对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，由此可排除 (A) 和 (C). 又 $y=f(x)$ 的图形在 y 轴右侧靠近 y 轴部分单调增加，所以在这一段内一定有 $f'(x)>0$，对应 $y=f'(x)$ 图形必在 x 轴的上方，进一步可排除 (B)，故正确答案为 (D).

2. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 附近有定义，且 $f'_x(0,0)=3, f'_y(0,0)=1$，则 $\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=3\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $(3,1,1)$.

(C) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(1,0,3)$.

(D) 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $(3,0,1)$.

解. 应选 (C). 因为偏导数存在未必能保证可微，所以可以排除 (A). 令 $F(x,y,z)=z-f(x,y)$，则有 $F_x'=-f_x', F_y'=-f_y', F_z'=1$. 因此过点 $(0,0,f(0,0))$ 的法向量为 $\pm\left(F_x',F_y',F_z'\right)=\pm\left(-f_x',-f_y',1\right)=\pm(3,1,1)$, 可排除 (B). 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 可表示为参数形式：$\begin{cases} x=x \\ y=0 \\ z=f(x,0) \end{cases}$，点 $(0,0,f(0,0))$ 的切向量为 $\pm\left\{1,0,f_x'(0,0)\right\}=\pm\{1,0,3\}$. 故正确选项为 (C).

3. 设 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导的充要条件为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在.

(B) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在.

(D) $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}\left[f(2h)-f(h)\right]$ 存在.

解. 应选 (B). 因为令 $x=1-\mathrm{e}^h$ 可得

$$\lim_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^h)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1-x)}=-\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=-\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-f'(0).$$

可见若 $f(x)$ 在点 $x=0$ 可导，则极限 $\lim\limits_{h\to0}\frac{1}{h}f(1-\mathrm{e}^h)$ 一定存在；反过来也成立.

4. 设 $A=\begin{pmatrix} 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 4&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$，则 A 与 B $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) 合同且相似.

(B) 合同但不相似.

(C) 不合同但相似.

(D) 不合同且不相似.

解. 应选 (A). 因为 A 是实对称矩阵，故 A 必相似于一对角阵 Λ. 又由相似矩阵有相同的特征值，相同的秩，知 A 与 Λ 有相同的秩，故 $r(\Lambda)=r(A)=1$，即 Λ 对角线上有 3 个元素为零. 因此，$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 是 A 的特征值. 由特征值的和等于矩阵主对角线元素之和，知

$$\sum_{i=1}^4\lambda_i=\lambda_4=\sum_{i=1}^4 a_{ii}=4.$$

故 $\lambda_4=4$. 即 A 有特征值 $\lambda=4$和$\lambda=0$（三重根），和对角阵 B 的特征值完全一致，故 A,B 相似. 又由两矩阵合同的充要条件：实对称矩阵 A 与 B 合同的充要条件是 A 与 B 相似. 知 A,B 合同.

5. 将一枚硬币重复掷 n 次，以 X 和 Y 分别表示正面向上和反面向上的次数，则 X 和 Y 的相关系数等于…………………………………………………( )

(A) -1.　　(B) 0.　　(C) $\frac{1}{2}$.　　(D) 1.

解. 应选 (A)．因为 $X+Y=n$，所以 $Y=n-X$．由于相关系数 $\rho_{X,Y}$ 的绝对值等于 1 的充要条件是 X 与 Y 之间存在线性关系，即 $Y=a+bX$（其中 a,b 是常数）；且当 $b>0$ 时 $\rho_{X,Y}=1$，当 $b<0$ 时 $\rho_{X,Y}=-1$．故选 (A).

三、（本题满分 6 分）

求 $\displaystyle\int\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$.

解. 由分部积分法可得

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=-\frac{1}{2}\int\arctan\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-2x})=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x-\int\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}(\arctan\mathrm{e}^x)\right)\\
&=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x-\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}(1+\mathrm{e}^{2x})}\right)\\
&=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x-\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2x}}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\right)\\
&=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-2x}\arctan\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+\arctan\mathrm{e}^x\right)+C.
\end{aligned}$$

四、（本题满分 6 分）

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且

$$f(1,1)=1,\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2,\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f(x,f(x,x)).$$

求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

解. 由题设，设 $f_1'=\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$f_2'=\dfrac{\partial f}{\partial y}$，则有

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big[f(x,f(x,x))\big]=f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))\big(f(x,x)\big)'\\
&=f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))\big[f_1'(x,x)+f_2'(x,x)\big].
\end{aligned}$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=f_1'(1,1)+f_2'(1,1)\big[f_1'(1,1)+f_2'(1,1)\big]=2+3\cdot[2+3]=17.$$

又因为 $\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$，所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}=\left.\left[3\varphi^2(x)\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right]\right|_{x=1}=3\varphi^2(1)\left.\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=3\cdot1\cdot17=51.$$

五、（本题满分 8 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0;\\ 1, & x=0.\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

解. 因为

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\qquad x\in(-1,1),$$

所以

$$\arctan x=\arctan 0+\int_0^x(\arctan x)'\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad x\in[-1,1].$$

于是

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n},\qquad x\in[-1,1],x\neq 0.\end{aligned}$$

又 $x=0$ 时 $f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n}$ 也成立，从而

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n},\qquad x\in[-1,1].$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}\big[f(1)-1\big]=\frac{1}{2}\cdot\Big[\frac{\pi}{2}-1\Big]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

六、（本题满分 7 分）

计算 $I=\oint_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

解. 记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上由 L 所围成的有界部分的上侧，D 为 S 在 xOy 坐标面上的投影，$D=\{(x,y)||x|+|y|=1\}$. 则有

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{1}{\sqrt{1+(z_x')^2+(z_y')^2}}(-z_x',-z_y',1)=\Big(\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3},\frac{1}{\sqrt3}\Big).$$

则由斯托克斯公式及二重积分的奇偶性可得

$$\begin{aligned}I&=\oint_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z\\&=\iint_S(-2y-4z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(-2z-6x)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(-2x-2y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\sqrt3}\iint_S\big[(-2y-4z)+(-2z-6x)+(-2x-2y)\big]\mathrm{d}S\end{aligned}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S(4x+2y+3z)\mathrm{d}S=-2\iint_D(x-y+6)\mathrm{d}\sigma$$
$$=-2\iint_D x\,\mathrm{d}\sigma+2\iint_D y\,\mathrm{d}\sigma-12\iint_D \mathrm{d}\sigma=-12\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-12\cdot 2=-24.$$

七、（本题满分 7 分）

设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq 0$，试证：

(I) 对于 $(-1,1)$ 内的任意 $x\neq 0$，存在唯一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使得 $f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$ 成立；

(II) $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

解. (I) 因为 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数，所以一阶导数存在，由拉格朗日中值定理得，任给非零 $x\in(-1,1)$，存在 $\theta(x)\in(0,1)$，$\theta(x)\cdot x\in(-1,1)$，使 $f(x)=f(0)+xf'[\theta(x)\cdot x]$，$(0<\theta(x)<1)$ 成立. 因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x)\neq 0$, 所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号，不妨设 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单调且增加，故 $\theta(x)$ 唯一.

(II) 由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,\xi\in(0,x).$$

再与 (1) 中的结论比较，得到

$$xf'[\theta(x)x]=f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

约去 x，变形得

$$\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}\theta(x)=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'[\theta(x)x]-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0),\quad \lim_{x\to 0}f''(x)=\lim_{\xi\to 0}f''(\xi)=f''(0),$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}$.

八、（本题满分 8 分）

设有一高度为 $h(t)$（t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程

$$z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$$

（设长度单位为厘米，时间单位为小时），已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9），问高度为 130 厘米的雪堆全部融化需多少小时?

解. 由侧面所满足的方程，可得雪堆沿平行于 xOy 面的截面为

$$D_z=\left\{(x,y)|(x^2+y^2)\leqslant\frac{1}{2}[h^2(t)-h(t)z]\right\}.$$

从而雪堆体积为

$$V=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\int_0^{h(t)}\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{h(t)}\frac{1}{2}\pi[h^2(t)-h(t)z]\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}h(t)^3.$$

由侧面所满足的方程，可得雪堆在 xOy 面上的投影为

$$D=\left\{(x,y):x^2+y^2\leqslant\frac{1}{2}h^2(t)\right\}$$

从而雪堆的侧面积为

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(z_x'\right)^2+\left(z_y'\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\sqrt{1+\frac{16(x^2+y^2)}{h(t)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{16r^2}{h^2(t)}}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{13\pi h^2(t)}{12}.$$

由题意知 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-0.9S(t)$，将上述 $V(t)$ 和 $S(t)$ 代入，得 $\dfrac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t}=-1.3$．积分解得 $h(t)=-\dfrac{13}{10}t+C$．由 $h(0)=130$，得 $C=130$．所以 $h(t)=-\dfrac{13}{10}t+130$．令 $h(t)=0$，得 $t=100$．因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需要时间为 100 小时．

九、（本题满分 6 分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，

$$\beta_1=t_1\alpha_1+t_2\alpha_2,\beta_2=t_1\alpha_2+t_2\alpha_3,\cdots,\beta_s=t_1\alpha_s+t_2\alpha_1,$$

其中 t_1,t_2 为实常数．试问 t_1,t_2 满足什么关系时，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 也为 $Ax=0$ 的一个基础解系？

解. 由题设知，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的线性组合，所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 均为 $Ax=0$ 的解．下面证明 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关．设

$$k_1\beta_1+k_2\beta_2+\cdots+k_s\beta_s=0$$

代入整理得

$$(t_1k_1+t_2k_s)\alpha_1+(t_2k_1+t_1k_2)\alpha_2+\cdots+(t_2k_{s-1}+t_1k_s)\alpha_s=0$$

由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系，知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，即

$$\begin{cases}t_1k_1+t_2k_s=0\\t_2k_1+t_1k_2=0\\\qquad\vdots\\t_2k_{s-1}+t_1k_s=0\end{cases}$$

其系数行列式

$$\begin{vmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & t_2 \\ t_2 & t_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & t_2 & t_1 \end{vmatrix} = t_1^s + (-1)^{s+1} t_2^s$$

由齐次线性方程组只有零解得充要条件可得: 当 s 为偶数, $t_1 \neq \pm t_2$; 当 s 为奇数, $t_1 \neq t_2$ 时, 上述方程组只有零解 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$, 因此向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 线性无关, 此时 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 也是方程组 $Ax = 0$ 的基础解系.

十、(本题满分 8 分)

已知 3 阶矩阵 A 与三维向量 x, 使得向量组 x, Ax, A^2x 线性无关, 且满足

$$A^3x = 3Ax - 2A^2x.$$

(I) 记 $P = (x, Ax, A^2x)$, 求 3 阶矩阵 B, 使 $A = PBP^{-1}$;

(II) 计算行列式 $|A + E|$.

解. (I) 在等式 $A = PBP^{-1}$ 两边右乘 P, 得到 $AP = PB$. 由题设知,

$$AP = A(x, Ax, A^2x) = (Ax, A^2x, A^3x) = (Ax, A^2x, 3Ax - 2A^2x)$$

$$= (x, Ax, A^2x)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

令矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, 则 B 满足 $A = PBP^{-1}$, 即为所求.

(II) 由 (1) 知 A 与 B 相似. 由矩阵相似的性质, $A + E$ 与 $B + E$ 也相似. 又由相似矩阵的行列式相等, 得

$$|A + E| = |B + E| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = -4.$$

十一、(本题满分 7 分)

设某班车起点站上客人数 X 服从参数 λ ($\lambda > 0$) 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 p ($0 < p < 1$), 且途中下车与否相互独立, 以 Y 表示在中途下车的人数, 求:

(I) 在发车时有 n 个乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率;

(II) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

解. (Ⅰ) 即求条件概率 $P\{Y=m|X=n\}$，由题设知此条件概率服从二项分布，则

$$P\{Y=m|X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m},\quad 0\leqslant m\leqslant n,\ n=0,1,2\cdots$$

(Ⅱ) 即求 $P\{X=n,Y=m\}$，利用乘法公式，有

$$P\{X=n,Y=m\}=P\{Y=m|X=n\}P\{X=n\}=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-\lambda}}{n!}\lambda^n$$

其中 $0\leqslant m\leqslant n,n=0,1,2\cdots$

十二、（本题满分 7 分）

设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$（$\sigma>0$），从该总体中抽取简单随机样本 X_1，$X_2,\cdots,X_{2n}$（$n\geqslant 2$），其样本均值为 $\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$，求统计量

$$Y=\sum_{i=1}^{n}\left(X_i+X_{n+i}-2\overline{X}\right)^2$$

的数学期望 $E(Y)$.

解. 考虑 $Z_i=X_i+X_{n+i},i=1,2,\cdots,n$．于是 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 是取自总体 $N(2\mu,2\sigma^2)$ 的简单随机样本．其样本均值为 $2\overline{X}$，样本方差为 $\frac{1}{n-1}Y$．由于 $E\left(\frac{1}{n-1}Y\right)=2\sigma^2$，所以 $E(Y)=(n-1)(2\sigma^2)=2(n-1)\sigma^2$.

二〇〇二年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=$________.

解. 应填 1. 先求出原函数，再求其极限即得广义积分的值:

$$\int_{e}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_{e}^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_{e}^{+\infty}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{\ln x}+1=1.$$

2. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定，则 $y''(0)=$________.

解. 应填 -2. y 是由 $e^y+6xy+x^2-1=0$ 确定的 x 的函数，两边对 x 求导得

$$e^y y'+6xy'+6y+2x=0 \quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{6y+2x}{e^y+6x}.$$

两边再对 x 求导得

$$y''=-\frac{(e^y+6x)(6y'+2)-(6y+2x)(e^y y'+6)}{(e^y+6x)^2}.$$

把 $x=0$ 代入，得 $y(0)=0$，$y'(0)=0$. 代入 y'' 得 $y''(0)=-2$.

3. 微分方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$, $y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解是________.

解. 应填 $y=\sqrt{x+1}$. 将 $yy''+y'^2=0$ 改写为 $(yy')'=0$，从而得 $yy'=C_1$. 代入初始条件 $y(0)=1, y'(0)=\frac{1}{2}$ 得 $C_1=\frac{1}{2}$，所以得 $yy'=\frac{1}{2}$，即 $2yy'=1$. 改写为 $(y^2)'=1$. 解得 $y^2=x+C_2$，$y=\pm\sqrt{x+C_2}$. 再代入初始条件得 $1=\pm\sqrt{C_2}$；所以应取"+"且 $C_2=1$，于是特解 $y=\sqrt{x+1}$.

4. 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准型 $f=6y_1^2$，则 $a=$________.

解. 应填 2. 二次型 f 的对应矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2\\ 2 & a & 2\\ 2 & 2 & a\end{pmatrix}$；它经正交变换 $x=Py$ 可化成标准型 $f=6y_1^2$，故实对称矩阵 A 的特征值为 6,0,0. 因为矩阵的 n 个特征值之和等于它的主对角元素之和，则有 $3a=6$，得 $a=2$.

5. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ $(\sigma>0)$，且二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$，则 $\mu=$________.

解. 应填 4. 二次方程无实根，即 $y^2+4y+X=0$ 的判别式

$$\Delta=\sqrt{b^2-4ac}=16-4X<0 \quad\Rightarrow\quad X>4.$$

此事发生概率为 $\frac{1}{2}$，即 $P\{X>4\}=\frac{1}{2}$. 对于 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$P\{X>\mu\}=\frac{1}{2}$，所以 $\mu=4$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面 4 条性质：

① $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处连续，② $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数连续，

③ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，④ $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数存在.

若用 “$P\Rightarrow Q$” 表示可由性质 P 推出 Q，则有$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) ②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$①. (B) ③$\Rightarrow$②$\Rightarrow$①. (C) ③$\Rightarrow$④$\Rightarrow$①. (D) ③$\Rightarrow$①$\Rightarrow$④.

解. 应选 (A). 记住正确的因果关系只有：②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$① 和 ②$\Rightarrow$③$\Rightarrow$④.

2. 设 $u_n\neq 0$（$n=1,2,3,\cdots$），且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)\cdots$(　　)

(A) 发散.　　(B) 绝对收敛.

(C) 条件收敛.　　(D) 收敛性根据所给条件不能判定.

解. 应选 (C). 考察原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 的前 n 项部分和

$$S_n=\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)-\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}\right)+\left(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}\right)-\cdots+(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)=\frac{1}{u_1}+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}.$$

由条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1$，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=1\times 0=0,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{u_1}$，即级数收敛. 另一方面，由条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{u_n}=1>0$，可得当 n 充分大时 $u_n>0$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 为正项级数. 用比较判别法的极限形式，考虑

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}}{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(u_{n+1}+u_n)n(n+1)}{u_nu_{n+1}(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)}{n}\dfrac{u_{n+1}}{(n+1)}+\dfrac{u_n}{n}}{\dfrac{u_n}{n}\cdot\dfrac{u_{n+1}}{n+1}\cdot\dfrac{2n+1}{n}}=1,$$

而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$$

是发散的，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{u_n}+\frac{1}{u_{n+1}}\right)$ 也发散. 从而选 (C).

3. 设函数 $y=f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有界且可导，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=0$.

解. 应选 (B). 令 $f(x)=\frac{1}{x}\sin x^2$, 则 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有界, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin x^2+2\cos x^2$. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 不存在，故 (A) 不成立；因为 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=0$，但 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)=1\neq0$，故 (C) 和 (D) 不成立；从而选 (B).

下面用反证法证明 (B) 正确：设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=A\neq0$. 不妨设 $A>0$，则对于 $\varepsilon=\frac{A}{2}>0$，存在 $X>0$，使当 $x>X$ 时，$\left|f'(x)-A\right|<\varepsilon=\frac{A}{2}$，即

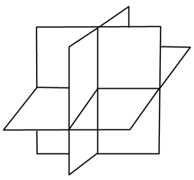
$$\frac{A}{2}=A-\frac{A}{2}<f'(x)<A+\frac{A}{2}=\frac{3A}{2}.$$

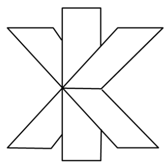
由此可知，$f'(x)$ 有界且大于 $\frac{A}{2}$. 在区间 $[x,X]$ 上应用拉格朗日中值定理有

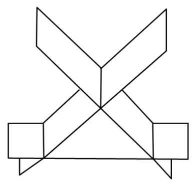
$$f(x)=f(X)+f'(\xi)(x-X)>f(X)+\frac{A}{2}(x-X),$$

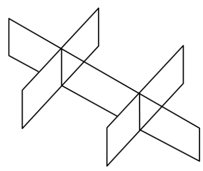
从而 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，与题设 $f(x)$ 有界矛盾.

4. 设有三张不同平面的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=b_i, i=1,2,3$，它们所组成的线性方程组的系数矩阵与增广矩阵的秩都为 2，则这三张平面可能的位置关系为 (　　)


(A)


(B)


(C)


(D)

解. 应选 (B). 事实上，系数矩阵的秩与增广矩阵的秩相等且为 2，故方程组有解，且解空间的维数为 $3-2=1$，即公共解构成一条直线，故选 (B).

5. 设 X_1 和 X_2 是任意两个相互独立的连续型随机变量，它们的概率密度分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$，分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C) $F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

解. 应选 (D). 函数 $f(x)$ 成为概率密度的充要条件为：

$$(1)\ f(x)\geqslant0;\quad (2)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=1.$$

函数 $F(x)$ 成为分布函数的充要条件为:

(1) $F(x)$ 单调不减; (2) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$; (3) $F(x)$ 右连续.

(A) 选项不对，因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x)\,\mathrm{d}x=1+1=2\neq 1.$$

(B) 选项不对，因为可取反例，令

$$f_1(x)=\begin{cases}1, & -1<x<0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}\qquad f_2(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

显然 $f_1(x), f_2(x)$ 均是均匀分布的概率密度. 而 $f_1(x)f_2(x)=0$, 不满足条件.

(C) 选项不对，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x_1)+F(x_2)]=1+1=2\neq 1$.

(D) 选项正确. 令 $X=\max(X_1,X_2)$, 则 X 也是一个随机变量. X 的分布函数为

$$\begin{aligned}F(x)&=P\{X\leqslant x\}=P\{\max(X_1,X_2)\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x, X_2\leqslant x\}\\&=P\{X_1\leqslant x\}P\{X_2\leqslant x\}=F_1(x)F_2(x).\end{aligned}$$

三、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数, 且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$, 若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小, 试确定 a,b 的值.

解. 由题设条件有

$$0=\lim_{h\to 0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0),$$

$$0=\lim_{h\to 0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}(af'(h)+2bf'(2h))=(a+2b)f'(0).$$

由于 $f(0)\neq 0$ 且 $f'(0)\neq 0$, 所以 $a+b-1=0$ 且 $a+2b=0$. 解得 $a=2, b=-1$.

四、(本题满分 7 分)

已知两曲线 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 在点 $(0,0)$ 处的切线相同, 写出此切线方程, 并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\dfrac{2}{n}\right)$.

解. 由 $y=\int_0^{\arctan x}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ 知 $y(0)=0$, 由变上限积分的求导公式得

$$y'=\mathrm{e}^{-(\arctan x)^2}\frac{1}{1+x^2}\quad\Rightarrow\quad y'(0)=1.$$

因此, 过点 $(0,0)$ 的切线方程为 $y=x$. $y=f(x)$ 在点 $(0,0)$ 处与上述曲线有相同的切线方程, 于是 $f(0)=0, f'(0)=1$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2.$$

五、（本题满分 7 分）

计算二重积分 $\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dx\,dy$，其中 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

解. 记 $D_1=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x\right\},D_2=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,x\leqslant y\leqslant 1\right\}$，则有

$$\iint_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\,d\sigma=\iint_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}\,d\sigma+\iint_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}\,d\sigma$$

$$=\iint_{D_1} e^{x^2}\,d\sigma+\iint_{D_2} e^{y^2}\,d\sigma=\int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}\,dy+\int_0^1 dy\int_0^1 e^{y^2}\,dx$$

$$=\int_0^1 e^{x^2}x\,dx+\int_0^1 e^{y^2}y\,dy=2\int_0^1 e^{x^2}x\,dx=\left[e^{x^2}\right]_0^1=(e-1).$$

六、（本题满分 8 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\,dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\,dy,$$

(I) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关； (II) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

解. (I) 记 $P(x,y)=\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]$，$Q(x,y)=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$，则在 $y>0$ 时有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=f(xy)+xyf'(xy)-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

所以在上半平面内该曲线积分与路径无关.

(II) 设 $F(u)$ 为 $f(u)$ 的一个原函数，则有

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\,dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\,dy$$

$$=\int_L \frac{y\,dx-x\,dy}{y^2}+\int_L f(xy)(y\,dx+x\,dy)=\int_L d\left(\frac{x}{y}\right)+\int_L f(xy)\,d(xy)$$

$$=\left(\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\right)+(F(cd)-F(ab))=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+0=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

七、（本题满分 7 分）

(I) 验证函数 $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$（$-\infty<x<+\infty$）满足微分方程 $y''+y'+y=e^x$；

(II) 利用 (1) 的结果求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数.

解. (I) $y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$，逐项可导得

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots.$$

从而 $y''(x)+y'(x)+y(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\mathrm{e}^x$.

(II) 微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 对应的齐次线性方程为 $y''+y'+y=0$，其特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0$，其特征根为 $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$，所以其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$$

设非齐次方程的特解为 $y=c\mathrm{e}^x$，代入原非齐次方程得 $c=\frac{1}{3}$. 故微分方程 $y''+y'+y=\mathrm{e}^x$ 的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x]+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x.$$

由初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 得 $C_1=\frac{2}{3}, C_2=0$. 从而

$$y=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x.$$

于是幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}\mathrm{e}^x\quad(-\infty<x<+\infty).$$

八、（本题满分 7 分）

设有一小山，取它的底面所在的平面为 xoy 坐标面，其底部所占的区域为 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2-xy\leqslant 75\}$，小山的高度函数为 $h(x,y)=75-x^2-y^2+xy$.

(I) 设 $M(x_0,y_0)$ 为区域 D 上的一点，问 $h(x,y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大? 若记此反向导数的最大值为 $g(x_0,y_0)$，试写出 $g(x_0,y_0)$ 表达式.

(II) 现欲利用此小山开展攀岩活动，为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点. 也就是说，要在 D 的边界线 $x^2+y^2-xy=75$ 上找出使 (I) 中的 $g(x,y)$ 达到最大值的点. 试确定攀登起点的位置.

解. (I) 根据方向导数和梯度的定义，知方向导数的最大值是梯度的模长，

$$\operatorname{grad}h(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}=\left\{\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_{(x_0,y_0)},\frac{\partial h}{\partial y}\Big|_{(x_0,y_0)}\right\}=\{y_0-2x_0,x_0-2y_0\}.$$

$$g(x_0,y_0)=\max\frac{\partial u}{\partial l}\Big|_{(x_0,y_0)}=\left|\operatorname{grad}h(x,y)\right|_{(x_0,y_0)}$$

$$=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}.$$

(II) 令 $f(x,y)=g^2(x,y)$=$5x^2+5y^2-8xy$，只需求出 f 在约束条件 $75-x^2-y^2+xy=0$ 下的最大值点. 为此构造拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy).$$

则由

$$\begin{cases} F_x' = 10x - 8y + \lambda(y - 2x) = 0, \\ F_y' = 10y - 8x + \lambda(x - 2y) = 0, \\ F_\lambda' = 75 - x^2 - y^2 + xy = 0, \end{cases}$$

可解得 $(x,y)_1 = (5\sqrt{3}, 5\sqrt{3})$ 或 $(x,y)_2 = (-5\sqrt{3}, -5\sqrt{3})$ 或 $(x,y)_3 = (5,-5)$ 或 $(x,y)_4 = (-5,5)$.于是得到如上 4 个可能极值点.将 $(x,y)_i$ 记为 $M_i(i=1,2,3,4)$. 由于

$$f(M_1) = f(M_2) = 150, f(M_3) = f(M_4) = 450,$$

故点 $M_3 = (5,-5), M_4 = (-5,5)$ 可作为攀登起点.

九、(本题满分 6 分)

已知 4 阶方阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$. 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

解. 易知矩阵的 A 的秩为 3, 从而齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系只包含一个解向量. 而由 $\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 - 0\alpha_4 = 0$, 知 $\xi = (1,-2,1,0)^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个非零解向量, 从而 $Ax = 0$ 的通解为 $x = k\xi$. 又由

$$\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \iff A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \beta,$$

可得 $\eta^* = (1,1,1,1)^T$ 是 $Ax = \beta$ 的一个特解, 根据非齐次线性方程组的解的结构定理, 方程组的通解为 $x = k(1,-2,1,0)^T + (1,1,1,1)^T$ (其中 k 是任意常数).

十、(本题满分 8 分)

设 A, B 为同阶方阵,

(I) 如果 A, B 相似, 试证 A, B 的特征多项式相等.

(II) 举一个二阶方阵的例子说明 (I) 的逆命题不成立.

(III) 当 A, B 均为实对称矩阵时, 试证 (I) 的逆命题成立.

解. (I) 因 $A \sim B$, 由定义知, 存在可逆阵 P, 使得 $P^{-1}AP = B$, 故

$$\begin{aligned} |\lambda E - B| &= \left|\lambda E - P^{-1}AP\right| = \left|\lambda P^{-1}P - P^{-1}AP\right| = \left|P^{-1}(\lambda E - A)P\right| \\ &= \left|P^{-1}\right||\lambda E - A||P| = |\lambda E - A|, \end{aligned}$$

故 A, B 有相同的特征多项式.

(II) 取 $A=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，则有

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2,\quad |\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2,$$

即 A,B 有相同的特征多项式，但 A 不相似于 B．这是因为对任何的 2 阶可逆阵 P，均有 $P^{-1}AP=P^{-1}OP=O\neq B$，故 (I) 的逆命题不成立.

(III) 当 A,B 都是实对称矩阵时, A,B 均能相似于对角阵, 且该对角阵的对角线元素由 A,B 的特征值组成．若 A,B 有相同的特征多项式，则 A,B 有相同的特征值 (包含重数), 故 A,B 将相似于同一个对角阵. 设特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则有

$$A\sim\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix},\quad B\sim\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

由相似的传递性，知 $A\sim B$，即 (I) 的逆命题成立.

十一、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} & 0\leqslant x\leqslant\pi;\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 对 X 独立地重复观察 4 次，用 Y 表示观察值大于 $\frac{\pi}{3}$ 的次数，求 Y^2 的数学期望.

解. 由一维概率公式有

$$p=P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

所以 $Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$．从而

$$E(Y^2)=D(Y)+[E(Y)]^2=npq+(np)^2=4\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\left(4\times\frac{1}{2}\right)^2=5.$$

十二、(本题满分 8 分)

设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 θ ($0<\theta<\frac{1}{2}$) 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3，求 θ 的矩阵估计值和最大似然估计值.

解. (I) 矩估计：变量期望和样本均值分别为

$$E(X)=0\times\theta^2+1\times 2\theta(1-\theta)+2\times\theta^2+3\times(1-2\theta)=3-4\theta,$$

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2.$$

用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$，即 $3-4\theta=2$．解得矩估计值为 $\hat{\theta}=\frac{1}{4}$.

(II) 最大似然估计：对于给定的样本值，似然函数为：

$$L(\theta)=\theta^2\cdot[2\theta(1-\theta)]^2\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)^4=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4.$$

取自然对数再求导得

$$\ln L(\theta)=\ln 4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{6-28\theta+24\theta^2}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0$，解得 $\theta_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$．因 $\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$ 与题目中 $0<\theta<\frac{1}{2}$ 矛盾，不合题意，所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

二〇〇三年考研数学试卷一解答

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{\sqrt{e}}$. 令 $y=(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$，有 $\ln y=\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$. 而由等价代换得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2},$$

故原式 $=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$.

2. 曲面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面的方程是 ________.

解. 应填 $2x+4y-z=5$. 平面 $2x+4y-z=0$ 的法向量 $\vec{n}_1=(2,4,-1)$; 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 的法向量

$$\vec{n}_2=(z_x(x_0,y_0),z_y(x_0,y_0),-1)=(2x_0,2y_0,-1).$$

由于 $\vec{n}_1//\vec{n}_2$，因此有

$$\frac{2x_0}{2}=\frac{2y_0}{4}=\frac{-1}{-1}.$$

可解得 $x_0=1,y_0=2$，相应地有 $z_0=x_0^2+y_0^2=5$. 所求切平面过点 $(1,2,5)$，法向量为 $\vec{n}_2=(2,4,-1)$，故所求的切平面方程为

$$2(x-1)+4(y-2)-(z-5)=0\quad\Rightarrow\quad 2x+4y-z=5.$$

3. 设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，则 $a_2=$ ________.

解. 应填 1. 将 $f(x)=x^2(-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开为余弦级数

$$f(x)=x^2=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx(-\pi\leqslant x\leqslant\pi),\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx.$$

所以

$$\begin{aligned}a_2&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cdot\cos 2x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x^2d(\sin 2x)=\frac{1}{\pi}\left([x^2\sin 2x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin 2x\cdot 2x\,dx\right)\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\,d(\cos 2x)=\frac{1}{\pi}\left([x\cos 2x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx\right)=1.\end{aligned}$$

4. 从 R^2 的基 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 到基 $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 的过渡矩阵为 ________.

解. 应填 $\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}$. 设过渡矩阵为 P. 则有

$$P=(\alpha_1,\alpha_2)^{-1}(\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\-1&-2\end{pmatrix}.$$

5. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 $P\{X+Y\leqslant 1\}=$________.

解. 应填 $\frac{1}{4}$. 由题设有

$$P\{X+Y\leqslant 1\}=\iint_{x+y\leqslant 1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{1-x}6x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}(6x-12x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

6. 已知一批零件的长度 X（单位：cm）服从正态分布 $N(\mu,1)$，从中随机地抽取 16 个零件，得到长度的平均值为 40（cm），则 μ 的置信度为 0.95 的置信区间是________.（注：标准正态分布函数值 $\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(1.645)=0.95$.）

解. 应填 $(39.51,40.49)$. 由题设，$1-\alpha=0.95$. 由

$$P\{|U|<u_{\alpha/2}\}=P\{-u_{\alpha/2}<U<u_{\alpha/2}\}=2\Phi(u_{\alpha/2})-1=0.95,$$

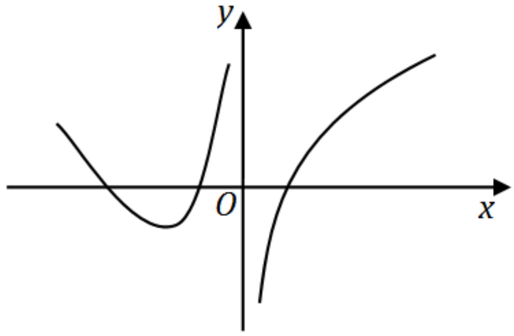
得 $\Phi(u_{\alpha/2})=0.975$. 查得 $u_{\alpha/2}=1.96$. 将 $\sigma=1$，$n=16$，$\overline{x}=40$ 代入公式

$$\left(\overline{x}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\overline{x}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

得置信区间 $(39.51,40.49)$.

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的图形如图所示，则 $f(x)$ 有 (　　)



(A) 一个极小值点和两个极大值点.　　(B) 两个极小值点和一个极大值点.

(C) 两个极小值点和两个极大值点.　　(D) 三个极小值点和一个极大值点.

解. 应选 (C). 根据导函数的图形可知，一阶导数为零的点有 3 个；$x=0$ 是导数不存在的点. 第一个交点左右两侧导数符号由正变为负，是极大值点；第二个交点和第三个交点左右两侧导数符号由负变为正，是极小值点. 对导数不存在的点 $x=0$. 左侧一阶导数为正，右侧一阶导数为负，可见 $x=0$ 为极大值点. 故 $f(x)$ 共有两个极小值点和两个极大值点.

2. 设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$，则必有$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n c_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在.

解. 应选 (D). 由题设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=1$，假设 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 存在并记为 A，则

$$\lim_{n\to\infty} c_n=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n c_n}{b_n}=A,$$

这与 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\infty$ 矛盾，故假设不成立，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n c_n$ 不存在. 所以选项 (D) 正确.

3. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{x\to0,y\to0}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则( )

(A) 点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

(B) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点.

(C) 点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点.

(D) 根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点.

解. 应选 (A). 这是因为

$$\lim_{x\to0,y\to0}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1\Rightarrow f(x,y)-xy=(1+\alpha)(x^2+y^2)^2.$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\alpha=0$. 由 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续知 $f(0,0)=0$.

取 $y=x$，$|x|$ 充分小，$x\neq0$，有

$$f(x,y)=x^2+(1+\alpha)(2x^2)^2>0;$$

取 $y=-x$，$|x|$ 充分小，$x\neq0$，有

$$f(x,y)=-x^2+(1+\alpha)(2x^2)^2<0.$$

故点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点.

4. 设向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则$\cdots\cdots$( )

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 II 必线性相关.

(B) 当 $r>s$ 时，向量组 II 必线性相关.

(C) 当 $r<s$ 时，向量组 I 必线性相关.

(D) 当 $r>s$ 时，向量组 I 必线性相关.

解. 应选 (D). 记 I 的秩为 R，II 的秩为 S，则由 I 可由 II 线性表示，可知 $R\leqslant S$. 又 $S\leqslant s$，于是当 $r>s$ 时，有 $r>s\geqslant S\geqslant R$，即 I 线性相关.

5. 设有齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$，其中 A 和 B 均为 $m\times n$ 矩阵，现有 4 个命题：

①若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $r(A)\geqslant r(B)$;

②若 $r(A)\geqslant r(B)$，则 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解；

③若 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解，则 $r(A)=r(B)$；

④若 $r(A)=r(B)$，则 $Ax=0$ 与 $Bx=0$ 同解.

以上命题中正确的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) ①②. (B) ①③. (C) ②④. (D) ③④.

解. 应选 (B). 若 $Ax=0$ 的解均是 $Bx=0$ 的解，则 $Ax=0$ 的解空间的维数不超过 $Bx=0$ 的解空间的维数，即 $n-r(A)\leqslant n-r(B)$，亦即 $r(A)\geqslant r(B)$，故①正确；同理③也正确. 又由两个解空间的维数的大小关系，推不出两个齐次线性方程的解集是否有包含关系，所以②不成立；同理，④也不成立.

6. 设随机变量 $X\sim t(n)$（$n>1$），$Y=\frac{1}{X^2}$，则$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $Y\sim\chi^2(n)$. (B) $Y\sim\chi^2(n-1)$. (C) $Y\sim F(n,1)$. (D) $Y\sim F(1,n)$.

解. 应选 (C). 由 t 分布的定义知，存在 $U\sim N(0,1)$，$V\sim\chi^2(n)$，使得

$$X=\frac{U}{\sqrt{V/n}}\sim t(n)\quad\Rightarrow\quad Y=\frac{1}{X^2}=\frac{V/n}{U^2}=\frac{V/n}{U^2/1}.$$

分母是标准正态分布的平方，所以 $U^2\sim\chi^2(1)$. 由 F 分布的定义知 $Y\sim F(n,1)$.

三、（本题满分 10 分）

过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形 D.

(Ⅰ) 求 D 的面积 A；

(Ⅱ) 求 D 绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转一周所得旋转体的体积 V.

解. (Ⅰ) 设切点的横坐标为 x_0，则曲线 $y=\ln x$ 在点 $(x_0,\ln x_0)$ 处的切线方程是

$$y=\ln x_0+\frac{1}{x_0}(x-x_0).$$

切线的斜率为 $y'\big|_{x_0}=\frac{1}{x_0}$，由于该切线过原点，将 $(0,0)$ 点代入切线方程，得 $\ln x_0-1=0$，从而 $x_0=\mathrm{e}$. 所以该切线的方程为 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$. 利用平面图形 D 的面积公式得

$$A=\int_0^1(\mathrm{e}^y-\mathrm{e}y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\mathrm{e}-1.$$

(Ⅱ) 切线 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}x$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的三角形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的圆锥体积为

$$V_1=\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}y)^2\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}\pi\mathrm{e}^2.$$

曲线 $y=\ln x$ 与 x 轴及直线 $x=\mathrm{e}$ 所围成的图形绕直线 $x=\mathrm{e}$ 旋转所得的旋转体体积为

$$V_2=\int_0^1\pi(\mathrm{e}-\mathrm{e}^y)^2\,\mathrm{d}y=\pi\int_0^1(\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^y+\mathrm{e}^{2y})\,\mathrm{d}y$$

$$=\pi\left[e^2y-2e\cdot e^y+\frac{1}{2}e^{2y}\right]\Big|_0^1=\pi\left(-\frac{1}{2}e^2+2e-\frac{1}{2}\right)$$

因此所求旋转体的体积为

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}(5e^2-12e+3).$$

四、(本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

解. 对函数先求导再展开,可得

$$f'(x)=-2\frac{1}{1+4x^2}=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nx^{2n},\qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

又因为 $f(0)=\frac{\pi}{4}$,所以

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\,dt=\frac{\pi}{4}-2\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n4^nt^{2n}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},\qquad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

在 $x=\frac{1}{2}$ 处,右边的级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2}$ 收敛,左边函数 $f(x)$ 连续,所以成立范围可扩大到 $x=\frac{1}{2}$ 处,即上式在区间 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上成立. 令 $x=\frac{1}{2}$,代入上式得

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)4^n}{2n+1}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

再由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,解得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}-f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

五、(本题满分 10 分)

已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$,$L$ 为 D 的正向边界. 试证:

(I) $\oint_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx=\oint_L xe^{-\sin y}\,dy-ye^{\sin x}\,dx$;

(II) $\oint_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx\geqslant 2\pi^2$.

解. (I) 由格林公式有

$$\oint_L xe^{\sin y}\,dy-ye^{-\sin x}\,dx=\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,dx\,dy,$$

$$\oint_L xe^{-\sin y}\,dy-ye^{\sin x}\,dx=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})\,dx\,dy.$$

因为积分区域 D 关于 $y=x$ 对称,所以交换 x 和 y 后二重积分不变:

$$\iint_D(e^{\sin y}+e^{-\sin x})\,dx\,dy=\iint_D(e^{-\sin y}+e^{\sin x})\,dx\,dy,$$

从而有

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x = \oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\,\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

(II) 由格林公式及轮换对称性有

$$\begin{aligned}\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x &= \iint_D (\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_D \mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D \mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_D \mathrm{e}^{\sin x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_D \mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_D (\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \geqslant \iint_D 2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi^2.\end{aligned}$$

六、(本题满分 10 分)

某建筑工程打地基时，需用汽锤将桩打进土层．汽锤每次击打，都将克服土层对桩的阻力而作功．设土层对桩的阻力的大小与桩被打进地下的深度成正比（比例系数为 k，$k>0$）．汽锤第一次击打将桩打进地下 a 米．根据设计方案，要求汽锤每次击打桩时所作的功与前一次击打时所作的功之比为常数 r $(0<r<1)$．问

(I) 汽锤击打桩 3 次后，可将桩打进地下多深？

(II) 若击打次数不限，汽锤至多能将桩打进地下多深？

解. (I) 建立坐标系，地面作为坐标原点，向下为 x 轴正向．设第 n 次击打后，桩被打进地下 x_n；第 n 次击打时，汽锤所作的功为 W_n $(n=1,2,3,\cdots)$．由题设，当桩被打进地下的深度为 x 时，土层对桩的阻力的大小为 kx，汽锤所作的功等于克服阻力所做的功，所以

$$W_1=\int_0^{x_1} kx\,\mathrm{d}x=\frac{k}{2}x_1^2,\qquad W_2=\int_{x_1}^{x_2} kx\,\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2),$$

$$W_3=\int_{x_2}^{x_3} kx\,\mathrm{d}x=\frac{k}{2}(x_3^2-x_2^2).$$

又 $W_2=rW_1$，$W_3=rW_2=r^2W_1$，$x_1=a$，所以

$$\frac{k}{2}x_3^2=W_1+W_2+W_3=(1+r+r^2)W_1=(1+r+r^2)\frac{k}{2}a^2.$$

于是 $x_3=a\sqrt{1+r+r^2}$.

(II) 和 (I) 类似可得

$$\begin{aligned}\frac{k}{2}x_n^2&=W_1+W_2+\cdots+W_n\\ &=(1+r+\cdots+r^{n-1})W_1=(1+r+\cdots+r^{n-1})\frac{k}{2}a^2.\end{aligned}$$

从而求得

$$x_n=a\sqrt{1+r+\cdots+r^{n-1}}=a\sqrt{\frac{1-r^n}{1-r}}.$$

由于 $0<r<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{a}{\sqrt{1-r}}$.

七、（本题满分 12 分）

设函数 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $y'\neq 0$，$x=x(y)$ 是 $y=y(x)$ 的反函数.

(I) 试将 $x=x(y)$ 所满足的微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}+(y+\sin x)\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3=0$ 变换为 $y=y(x)$ 满足的微分方程；

(II) 求变换后的微分方程满足初始条件 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$ 的解.

解. (I) 由反函数的导数公式可得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{y'},\quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{y'}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{-y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

代入原方程得 $y''-y=\sin x$.

(II) 方程 $y''-y=\sin x$ 的齐次通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}$. 设方程 $y''-y=\sin x$ 的特解为 $y^*=A\cos x+B\sin x$，代入方程解得 $A=0,B=-\dfrac{1}{2}$，故 $y^*=-\dfrac{1}{2}\sin x$. 从而方程的通解为

$$y=Y+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{-x}-\frac{1}{2}\sin x.$$

由 $y(0)=0, y'(0)=\dfrac{3}{2}$，得 $C_1=1, C_2=-1$. 故 $y''-y=\sin x$ 满足初始条件的解为 $y=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-\dfrac{1}{2}\sin x$.

八、（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零，

$$F(t)=\frac{\displaystyle\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v}{\displaystyle\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma},\qquad G(t)=\frac{\displaystyle\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\displaystyle\int_{-t}^{t} f(x^2)\mathrm{d}x},$$

其中 $\Omega(t)=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\}$，$D(t)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant t^2\}$.

(I) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性.

(II) 证明当 $t>0$ 时，$F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$.

解. (I) 先将三重积分和二重积分分别化为球面坐标和极坐标，得到

$$F(t)=\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}=\frac{4\pi\displaystyle\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{2\pi\displaystyle\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}=\frac{2\displaystyle\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\displaystyle\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}.$$

对 $F(t)$ 求导，可知在 $t>0$ 时

$$F'(t)=2\frac{t^2f(t^2)\cdot\displaystyle\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r-\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r\cdot f(t^2)t}{\left[\displaystyle\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2}$$

$$=2\frac{tf(t^2)\cdot\int_0^t f(r^2)r(t-r)\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2}>0$$

所以 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加.

(II) 因为

$$G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^t f(x^2)\mathrm{d}x}=\frac{2\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}$$

所以

$$F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}-\frac{2\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r}$$

$$=\frac{2\left[\left(\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r\right)\cdot\left(\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r\right)-\left(\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right)^2\right]}{\left(\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right)\cdot\left(\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r\right)}.$$

令 $g(t)=\left(\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r\right)\cdot\left(\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r\right)-\left(\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right)^2$，则 $t>0$ 时有

$$g'(t)=f(t^2)t^2\int_0^t f(r^2)\mathrm{d}r+f(t^2)\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r-2f(t^2)t\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r$$

$$=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\,\mathrm{d}r>0.$$

故 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，又因为 $g(0)=0$，所以当 $t>0$ 时，有 $g(t)>g(0)=0$. 从而 $t>0$ 时，$F(t)>\frac{2}{\pi}G(t)$.

九、（本题满分 10 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$，$P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}A^*P$，求 $B+2E$ 的特征值与特征向量，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为 3 阶单位矩阵.

解. 设 A 的特征值为 λ，对应的特征向量为 η，即 $A\eta=\lambda\eta$. 由于 $|A|=7\neq 0$，所以 $\lambda\neq 0$. 所以由 $A^*A=|A|E$ 可得 $A^*\eta=\frac{|A|}{\lambda}\eta$，从而

$$B(P^{-1}\eta)=P^{-1}A^*P(P^{-1}\eta)=\frac{|A|}{\lambda}(P^{-1}\eta),\quad (B+2E)P^{-1}\eta=\left(\frac{|A|}{\lambda}+2\right)P^{-1}\eta.$$

因此 $\frac{|A|}{\lambda}+2$ 为 $B+2E$ 的特征值，对应的特征向量为 $P^{-1}\eta$. 由于

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&-2\\-2&\lambda-3&-2\\-2&-2&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-7),$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7$. 当 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时, 对应的线性无关特征向量可取为 $\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. 当 $\lambda_3=7$ 时, 对应的一个特征向量为 $\eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

由 $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 得

$$P^{-1}\eta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad P^{-1}\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad P^{-1}\eta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

因此 $B+2E$ 的三个特征值为 9, 9, 3. 对应于特征值 9 的全部特征向量为

$$k_1P^{-1}\eta_1+k_2P^{-1}\eta_2=k_1\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_1,k_2 是不全为零的任意常数; 对应于特征值 3 的全部特征向量为

$$k_3P^{-1}\eta_3=k_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

其中 k_3 是不为零的任意常数.

十、(本题满分 8 分)

已知平面上三条不同直线的方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0,\ l_2: bx+2cy+3a=0,\ l_3: cx+2ay+3b=0.$$

试证: 这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

解. (I)"必要性": 设三直线交于一点 (x_0,y_0), 则 $\begin{pmatrix}x_0\\y_0\\1\end{pmatrix}$ 为 $BX=0$ 的非零解, 其中

$$B=\begin{pmatrix}a&2b&3c\\b&2c&3a\\c&2a&3b\end{pmatrix}.$$

所以 $|B|=0$. 而

$$|B|=\begin{vmatrix}a&2b&3c\\b&2c&3a\\c&2a&3b\end{vmatrix}=-6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$$

$$=-3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2].$$

但根据题设 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故 $a+b+c=0$.

(II)“充分性”：考虑线性方程组①

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a, \\ cx+2ay=-3b. \end{cases}$$

将方程组①的三个方程相加，并由 $a+b+c=0$. 可知，方程组①等价于方程组②

$$\begin{cases} ax+2by=-3c, \\ bx+2cy=-3a. \end{cases}$$

因为

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix}=2(ac-b^2)=-2[a(a+b)+b^2]=-[a^2+b^2+(a+b)^2]\neq 0,$$

故方程组②有唯一解，所以方程组①有唯一解，即三直线 l_1,l_2,l_3 交于一点.

十一、（本题满分 10 分）

已知甲、乙两箱中装有同种产品，其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品，乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后，求:

(I) 乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(II) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

解. (I) 设 $X_i=\begin{cases} 0, & \text{从甲箱中取出的第 } i \text{ 件产品是合格品,} \\ 1, & \text{从甲箱中取出的第 } i \text{ 件产品是次品} \end{cases}$ （$i=1,2,3$）. 则 X_i 的概率分布为

X_i	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

因为 $X=X_1+X_2+X_3$，所以由数学期望的线性可加性有

$$E(X)=E(X_1)+E(X_2)+E(X_3)=\frac{3}{2}.$$

(II) 设 A 表示事件“从乙箱中任取一件产品是次品”，由于 $\{X=0\}$，$\{X=1\}$，$\{X=2\}$，$\{X=3\}$ 构成完备事件组，因此根据全概率公式有

$$P(A)=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}P\{A|X=k\}=\sum_{k=0}^{3}P\{X=k\}\cdot\frac{k}{6}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{3}k\cdot P\{X=k\}$$

$$=\frac{1}{6}E(X)=\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{4}.$$

十二、（本题满分 8 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta,\end{cases}$ 其中 $\theta>0$ 是未知参数．从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，记 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

(I) 求总体 X 的分布函数 $F(x)$;

(II) 求统计量 $\hat{\theta}$ 的分布函数 $F_{\hat{\theta}}(x)$;

(III) 如果用 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量，讨论它是否具有无偏性.

解. (I) 由连续型随机变量分布函数的定义，有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta.\end{cases}$$

(II) 由 $\hat{\theta}=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 有

$$F_{\hat{\theta}}(x)=P\{\hat{\theta}\leqslant x\}=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\leqslant x\}$$

$$=1-P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>x\}=1-P\{X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x\}$$

$$=1-[1-F(x)]^n=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta.\end{cases}$$

(III) $\hat{\theta}$ 概率密度为

$$f_{\hat{\theta}}(x)=\frac{dF_{\hat{\theta}}(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{cases}2n\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}, & x>\theta,\\ 0, & x\leqslant\theta.\end{cases}$$

因为

$$E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_{\hat{\theta}}(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}2nx\mathrm{e}^{-2n(x-\theta)}\mathrm{d}x=\theta+\frac{1}{2n}\neq\theta,$$

所以 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计量不具有无偏性.

二〇〇四年考研数学试卷一解答

一、填空题（1～6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 曲线 $y=\ln x$ 上与直线 $x+y=1$ 垂直的切线方程为 ________.

解. 应填 $y=x-1$. 因为直线 $x+y=1$ 的斜率 $k_1=-1$，所以与其垂直的直线的斜率 $k_2=1$. 令 $y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}=1$，得 $x=1$. 于是得切点坐标为 $(1,0)$，所求切线方程为 $y-0=1\cdot(x-1)$，即 $y=x-1$.

2. 已知 $f'(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^{-x}$，且 $f(1)=0$，则 $f(x)=$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{2}(\ln x)^2$. 令 $\mathrm{e}^x=t$，则 $x=\ln t$，$\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{t}$，于是有

$$f'(t)=\frac{\ln t}{t} \quad\Rightarrow\quad f'(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

两边积分得

$$f(x)=\int\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\ln x\,\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C.$$

代入初始条件 $f(1)=0$ 得 $C=0$，故所求函数为 $f(x)=\frac{1}{2}(\ln x)^2$.

3. 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L x\,\mathrm{d}y-2y\,\mathrm{d}x$ 的值为 ________.

解. 应填 $\frac{3}{2}\pi$. L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \end{cases} \qquad \theta:0\to\frac{\pi}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_L x\,\mathrm{d}y-2y\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\cos\theta\,\mathrm{d}(\sqrt{2}\sin\theta)-2\sqrt{2}\sin\theta\,\mathrm{d}(\sqrt{2}\cos\theta) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}[2\cos^2\theta+4\sin^2\theta]\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}[2+2\sin^2\theta]\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}[3-\cos 2\theta]\,\mathrm{d}\theta=\left[3\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3\pi}{2}.
\end{aligned}$$

注记：也可以添加两条线段后用格林公式计算.

4. 欧拉方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$（$x>0$）的通解为 ________.

解. 应填 $y=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}$. 令 $x=\mathrm{e}^t$，有 $t=\ln x$, $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right).$$

代入原方程，整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=0.$$

此方程的特征根为 $r_1=-1,r_2=-2$，$r_1\neq r_2$，所以其通解为

$$y=c_1\mathrm{e}^{r_1t}+c_2\mathrm{e}^{r_2t}=c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}.$$

又因为 $x=\mathrm{e}^t$，所以 $\mathrm{e}^{-t}=\frac{1}{x},\mathrm{e}^{-2t}=\frac{1}{x^2}$，代入上式得

$$y=c_1\mathrm{e}^{-t}+c_2\mathrm{e}^{-2t}=\frac{c_1}{x}+\frac{c_2}{x^2}.$$

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 B 满足 $ABA^*=2BA^*+E$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵，E 是单位矩阵，则 $|B|=$________.

解. 应填 $\frac{1}{9}$. 由题设条件 $ABA^*=2BA^*+E$，得 $(A-2E)BA^*=E$. 取行列式得

$$|(A-2E)BA^*|=|A-2E||B||A^*|=|E|=1.$$

由伴随矩阵行列式的公式：若 A 是 n 阶矩阵，则 $|A^*|=|A|^{n-1}$，所以

$$|B|=|A-2E|^{-1}|A^*|^{-1}=|A-2E|^{-1}|A|^{-2}=\begin{vmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{vmatrix}^{-2}=1^{-1}\cdot3^{-2}=\frac{1}{9}.$$

6. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\{X>\sqrt{DX}\}=$________.

解. 应填 $\frac{1}{\mathrm{e}}$. 指数分布的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & \text{若 } x>0,\\ 0 & \text{若 } x\leqslant 0;\end{cases}$$

其方差 $DX=\frac{1}{\lambda^2}$. 于是有

$$P\{X>\sqrt{DX}\}=P\left\{X>\frac{1}{\lambda}\right\}=\int_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_{\frac{1}{\lambda}}^{+\infty}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

二、选择题（7～14 小题，每小题 4 分，共 32 分）

7. 把 $x\to0^+$ 时的无穷小量 $\alpha=\int_0^x\cos t^2\,\mathrm{d}t$，$\beta=\int_0^{x^2}\tan\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$，$\gamma=\int_0^{\sqrt{x}}\sin t^3\,\mathrm{d}t$ 排列起来，使排在后面的是前一个的高阶无穷小，则正确的排列次序是 $\cdots\cdot$ (　　)

(A) α,β,γ.　　(B) α,γ,β.　　(C) β,α,γ.　　(D) β,γ,α.

解. 应选 (B). 由 $\alpha'=\cos x^2$, $\beta'=2x\tan x\sim 2x^2$, $\gamma'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}^3)\sim\frac{1}{2}x$ $(x\to 0^+)$,

得 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\beta}{\gamma}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\beta'}{\gamma'}=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\gamma}{\alpha}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\gamma'}{\alpha'}=0$.

8. 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f'(0)>0$, 则存在 $\delta>0$, 使得 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 内单调增加.

(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 内单调减少.

(C) 对任意的 $x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(D) 对任意的 $x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

解. 应选 (C). 由导数的定义知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}>0.$$

根据极限的保号性, 知存在 $\delta>0$, 当 $x\in(-\delta,0)\cup(0,\delta)$ 时, 有

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}>0.$$

当 $x\in(-\delta,0)$ 时, $x<0$, 有 $f(x)<f(0)$; 而当 $x\in(0,\delta)$ 时, $x>0$, 有 $f(x)>f(0)$.

9. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数, 下列结论中正确的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

(B) 若存在非零常数 λ, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

(C) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=0$.

(D) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, 则存在非零常数 λ, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda$.

解. 应选 (B). 取 $a_n=\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$ 发散, 排除 (A) 和 (D). 又取 $a_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛, 但 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$, 排除 (C). 下面证明 (B) 是正确的: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\lambda\neq 0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\lambda$.

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 由比较判别法的极限形式知, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

10. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$, 则 $F'(2)$ 等于 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) $2f(2)$. (B) $f(2)$. (C) $-f(2)$. (D) 0.

解. 应选 (B). 交换积分次序得

$$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t\left[\int_1^x f(x)\mathrm{d}y\right]dx=\int_1^t f(x)(x-1)\mathrm{d}x.$$

于是 $F'(t)=f(t)(t-1)$，从而 $F'(2)=f(2)$.

11. 设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B，再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为 · ( )

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

解. 应选 (D). 由题设，将 A 的第 1 列与第 2 列交换，即

$$AE_{12}=A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=B,$$

将 B 的第 2 列加到第 3 列，即

$$B\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=AQ.$$

故 $Q=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

12. 设 A, B 为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵，则必有 · · · · · · · · · · · · · · · · · · · ( )

(A) A 的列向量组线性相关， B 的行向量组线性相关.

(B) A 的列向量组线性相关， B 的列向量组线性相关.

(C) A 的行向量组线性相关， B 的行向量组线性相关.

(D) A 的行向量组线性相关， B 的列向量组线性相关.

解. 应选 (A). **方法 1**: 设 A 为 $m\times n$ 矩阵, B 为 $n\times s$ 矩阵, 由 $AB=0$ 知, $r(A)+r(B)\leqslant n$, 其中 n 是矩阵 A 的列数，也是 B 的行数.

因 A 为非零矩阵，故 $r(A)\geqslant 1$，因 $r(A)+r(B)\leqslant n$，从而 $r(B)\leqslant n-1<n$，由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数，知 B 的行向量组线性相关.

因 B 为非零矩阵，故 $r(B)\geqslant 1$，因 $r(A)+r(B)\leqslant n$，从而 $r(A)\leqslant n-1<n$，由向量组线性相关的充分必要条件向量组的秩小于向量的个数，知 A 的列向量组线性相关.

方法 2：设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times s$ 矩阵，将 B 按列分块，由 $AB=0$ 得，

$$AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=0,\quad A\beta_i=0,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

因 B 是非零矩阵，故存在 $\beta_i\neq 0$，使得 $A\beta_i=0$．即齐次线性方程组 $Ax=0$ 有非零解，故 $r(A)<n$，从而 A 的列向量组线性相关．又 $(AB)^T=B^TA^T=0$，将 A^T 按列分块，得

$$B^TA^T=B^T(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_m^T)=0,\quad B^T\alpha_i^T=0,\quad i=1,2,\cdots,m.$$

因 A 是非零矩阵，故存在 $\alpha_i^T\neq 0$，使得 $B^T\alpha_i^T=0$，即齐次线性方程组 $B^Tx=0$ 有非零解，故 $r(B^T)<n$，从而 B^T 的列向量组线性相关，即 B 的行向量组线性相关.

13. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 α（$0<\alpha<1$），数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于……………………………（　）

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$.　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$.　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.　　(D) $u_{1-\alpha}$.

解. 应选 (C)．由标准正态分布概率密度的对称性知 $P\{X<-u_\alpha\}=\alpha$，于是

$$1-\alpha=1-P\{|X|<x\}=P\{|X|\geqslant x\}=P\{X\geqslant x\}+P\{X\leqslant -x\}=2P\{X\geqslant x\}.$$

即有 $P\{X\geqslant x\}=\dfrac{1-\alpha}{2}$，根据分位点的定义有 $x=u_{\frac{1-\alpha}{2}}$.

14. 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>1)$独立同分布,且其方差为$\sigma^2>0$.令 $Y=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则……………………………………………………………（　）

(A) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\dfrac{\sigma^2}{n}$.　　(B) $\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\sigma^2$.

(C) $D(X_1+Y)=\dfrac{n+2}{n}\sigma^2$.　　(D) $D(X_1-Y)=\dfrac{n+1}{n}\sigma^2$.

解. 应选 (A)．由于随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$（$n>1$）独立同分布，所以有

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=\begin{cases}\sigma^2, & i=j;\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

从而有

$$\mathrm{Cov}(X_1,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_1)+\frac{1}{n}\sum_{i=2}^{n}\mathrm{Cov}(X_1,X_i)=\frac{1}{n}DX_1=\frac{1}{n}\sigma^2.$$

因为 X 与 Y 独立时，有 $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$，所以

$$D(X_1+Y)=D\left(\frac{1+n}{n}X_1+\frac{1}{n}X_2+\cdots+\frac{1}{n}X_n\right)=\frac{(1+n)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n+3}{n}\sigma^2,$$

$$D(X_1-Y)=D\left(\frac{n-1}{n}X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n\right)=\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{n-1}{n^2}\sigma^2=\frac{n-2}{n}\sigma^2.$$

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 12 分）

设 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$，证明 $\ln^2 b-\ln^2 a>\dfrac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$.

解. 设 $\varphi(x)=\ln^2 x-\ln^2 a-\frac{4}{\mathrm{e}^2}(x-a)$，则

$$\varphi'(x)=2\frac{\ln x}{x}-\frac{4}{\mathrm{e}^2},\qquad \varphi''(x)=2\frac{1-\ln x}{x^2}.$$

当 $x>\mathrm{e}$ 时 $\varphi''(x)<0$，故 $\varphi'(x)$ 在 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$ 上单调减少．从而当 $\mathrm{e}<x<\mathrm{e}^2$ 时，$\varphi'(x)>\varphi'(\mathrm{e}^2)=0$．所以 $\varphi(x)$ 在 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^2)$ 上单调增加，从而当 $\mathrm{e}<a<b<\mathrm{e}^2$ 时，$\varphi(b)>\varphi(a)=0$．即 $\ln^2 b-\ln^2 a>\frac{4}{\mathrm{e}^2}(b-a)$．

16.（本题满分 11 分）

某种飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下．现有一质量为 9000kg 的飞机，着陆时的水平速度为 700km/h．经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比（比例系数为 $k=6.0\times10^6$）．问从着陆点算起，飞机滑行的最长距离是多少？（注：kg 表示千克，km/h 表示千米/小时．）

解. 由题设，飞机质量 $m=9000\mathrm{kg}$，着陆时的水平速度 $v_0=700\mathrm{km/h}$．从飞机接触跑道开始计时，设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$，则 $v(0)=v_0$，$x(0)=0$．根据牛顿第二定律有 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$．又 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，故由以上两式得 $\mathrm{d}x=-\frac{m}{k}\mathrm{d}v$，积分得 $x(t)=-\frac{m}{k}v+C$．由初始条件 $v(0)=v_0$，$x(0)=0$，解得 $C=\frac{m}{k}v_0$，从而 $x(t)=\frac{m}{k}(v_0-v(t))$．当 $v(t)\to0$ 时，

$$x(t)\to\frac{mv_0}{k}=\frac{9000\times700}{6.0\times10^6}=1.05.$$

所以，飞机滑行的最长距离为 1.05 千米.

17.（本题满分 12 分）

计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma 2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant0)$ 的上侧.

解. 取 Σ_1 为 xOy 平面上被圆 $x^2+y^2=1$ 所围部分的下侧，记 Ω 为由 Σ 与 Σ_1 围成的空间闭区域，则

$$\begin{aligned}I=&\iint_{\Sigma+\Sigma_1}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&-\iint_{\Sigma_1}2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=I_1-I_2.\end{aligned}$$

由高斯公式以及柱面坐标公式，可得

$$\begin{aligned}I_1&=\iiint_\Omega 6(x^2+y^2+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=6\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}r\int_0^{1-r^2}(z+r^2)r\,\mathrm{d}z\\&=12\pi\int_0^1\left[\frac{1}{2}r\left(1-r^2\right)^2+r^3\left(1-r^2\right)\right]\mathrm{d}r=12\pi\cdot\frac{1}{6}=2\pi.\end{aligned}$$

Σ_1 在 xOy 平面上的投影区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，则有

$$I_2=\iint_{\Sigma_1} 2x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z^2-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_D 3(0-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=3\pi.$$

故有 $I=I_1-I_2=2\pi-3\pi=-\pi$.

18.（本题满分 11 分）

设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数．证明此方程存在惟一正实根 x_n，并证明当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

解. (I) 记 $f_n(x)=x^n+nx-1$，则 $f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=n>0$．由零值定理知，方程 $x^n+nx-1=0$ 存在正实数根 $x_n\in(0,1)$．当 $x>0$ 时，$f_n'(x)=nx^{n-1}+n>0$，即 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加，故方程 $x^n+nx-1=0$ 存在惟一正实根 x_n.

(II) 由 $x^n+nx-1=0$ 与 $x_n>0$ 知 $0<x_n=\dfrac{1-x_n^n}{n}<\dfrac{1}{n}$，故当 $\alpha>1$ 时，$0<x_n^{\alpha}<\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\alpha}}$ 收敛，所以当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

19.（本题满分 12 分）

设 $z=z(x,y)$ 是由 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点和极值.

解. 因为 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，所以两边对 x 求导和对 y 求导得

$$\begin{cases}2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\\ -6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0.\end{cases}$$

根据极值点存在的充分条件，令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0$ 且 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，可得 $x=3y$ 且 $z=y$．代入隐函数方程，可得

$$\begin{cases}x=9,\\ y=3,\\ z=3.\end{cases}\quad 或 \quad \begin{cases}x=-9,\\ y=-3,\\ z=-3.\end{cases}$$

在隐函数方程两边继续对 x,y 求偏导数，得

$$\begin{cases}2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\\ -6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\\ 20-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.\end{cases}$$

将 $\begin{cases} x=9, \\ y=3, \\ z=3. \end{cases}$ 和 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$ 代入，解得

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2},\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3}.$$

故 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=\frac{1}{6}>0$，从而点 $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 $z(9,3)=3$. 类似地，将 $\begin{cases} x=-9, \\ y=-3, \\ z=-3. \end{cases}$ 和 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0 \end{cases}$ 代入，解得

$$A=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},\quad B=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},\quad C=\left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3}.$$

故 $AC-B^2=\frac{1}{36}>0$，又 $A=-\frac{1}{6}<0$，从而点 $(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 $z(-9,-3)=-3$.

20.（本题满分 9 分）

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0, \end{cases} \qquad (n\geqslant 2).$$

试问 a 取何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

解. 对方程组的系数矩阵 A 作初等行变换，有

$$A=\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & n & n & \cdots & n+a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2a & a & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -na & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}=B.$$

当 $a=0$ 时，$r(A)=1<n$，故次方程组有非零解. 其同解方程组为

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=0,$$

由此得基础解系为

$$\eta_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T,\quad \eta_2=(-1,0,1,\cdots,0)^T,\quad \cdots,\quad \eta_{n-1}=(-1,0,0,\cdots,1)^T.$$

于是方程组的通解为 $x=k_1\eta_1+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}$，其中 $k_1,\cdots,k_{n-1}$ 为任意常数.

当 $a\neq 0$ 时，对矩阵 B 作初等行变换，有

$$B\to\begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a+\frac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

可知 $a=-\frac{n(n+1)}{2}$ 时，$r(A)=n-1<n$，故此方程组也有非零解．其同解方程组为

$$\begin{cases}-2x_1+x_2=0,\\ -3x_1+x_3=0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ -nx_1+x_n=0,\end{cases}$$

由此得基础解系为 $\eta=(1,2,\cdots,n)^T$，于是方程组的通解为 $x=k\eta$，其中 k 为任意常数.

21.（本题满分 9 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-3\\-1&4&-3\\1&a&5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

解. A 的特征多项式为

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&3\\1&\lambda-4&3\\-1&-a&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

(I) 若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2-16+18+3a=0$，解得 $a=-2$．由此求得 A 的特征值为 $2,2,6$．因为 $r(2E-A)=1$，所以 $\lambda=2$ 对应的线性无关的特征向量有 2 个，等于 $\lambda=2$ 的重数，从而 A 可相似对角化.

(II) 若 $\lambda=2$ 不是特征方程的二重根，则 $\lambda^2-8\lambda+18+3a$ 为完全平方，从而 $18+3a=16$, 解得 $a=-\frac{2}{3}$. 由此求得 A 的特征值为 $2,4,4$. 因为 $r(4E-A)=2$, 所以 $\lambda=4$ 对应的线性无关的特征向量只有 1 个，不等于 $\lambda=4$ 的重数，从而 A 不可相似对角化.

22.（本题满分 9 分）

设 A,B 为随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$．令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生}.\end{cases}$$

求：(I) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；(II) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

解. (I) 由于 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$，所以 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$．利用条件概率公式和事件间简单的运算关系，有

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3}.$$

故 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(II) X,Y 的概率分布分别为

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4},$$

$$P\{X=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.$$

所以 X,Y 的概率分布为

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

由 0−1 分布的数学期望和方差公式，有

$$EX=\frac{1}{4},\quad EY=\frac{1}{6},\quad DX=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16},\quad DY=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36},$$

$$E(XY)=0\cdot P\{XY=0\}+1\cdot P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}.$$

故协方差和相关系数等于

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{24},\quad \rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

23. (本题满分 9 分)

设总体 X 的分布函数为

$$F(x,\beta)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^{\beta}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1,\end{cases}$$

其中未知参数 $\beta>1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求：

(I) β 的矩估计量； (II) β 的最大似然估计量.

解. X 的概率密度为 $f(x;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1,\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$

(I) 由数学期望的定义：

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{\beta-1}.$$

用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$ 即 $\dfrac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，解得 $\beta=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$，所以参数 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$，其中 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

(II) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一组观测值，则似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\dfrac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i>1\,(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_i>1\,(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\beta)>0$，取自然对数得

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

两边对 β 求导，并令导数为零得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0 \quad\Rightarrow\quad \beta=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}.$$

从而 β 的最大似然估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

二〇〇五年考研数学试卷一解答

一、填空题（1～6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 ________.

解. 应填 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$. 由求斜渐近线公式得:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2+x}=\frac{1}{2},$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{2(2x+1)}=-\frac{1}{4}.$$

所以所求斜渐近线方程为 $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

2. 微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 的解为 ________.

解. 应填 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$. 原方程即为 $y'+\frac{2}{x}y=\ln x$，由公式得方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\ln x\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{2}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\frac{1}{x^2}\left(\int x^2\ln x\,\mathrm{d}x+C\right)=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x+\frac{C}{x^2},$$

其中 C 是常数. 由 $y(1)=-\frac{1}{9}$ 得 $C=0$，故所求解为 $y=\frac{1}{3}x\ln x-\frac{1}{9}x$.

3. 设函数 $u(x,y,z)=1+\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{12}+\frac{z^2}{18}$,单位向量 $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$,则 $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{(1,2,3)}=$ ________.

解. 应填 $\sqrt{3}/3$. 事实上，因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{3},\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{6},\quad\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{9},$$
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

所以所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，Σ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ________.

解. 应填 $(2-\sqrt{2})\pi R^3$. 以 Ω 表示由 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 所围成的有界闭区域，由高斯公式得

$$\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_\Omega 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

利用球面坐标得

$$\iiint_\Omega 3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=3\int_0^R\rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)R^3=(2-\sqrt{2})\pi R^3.$$

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为 3 维列向量，记矩阵

$$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),\quad B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3),$$

如果 $|A|=1$，那么 $|B|=$________.

解. 应填 2. 因为

$$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix},$$

记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，两边取行列式有

$$|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=1\times 2=2.$$

6. 从数 $1,2,3,4$ 中任取一个数，记为 X，再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y=2\}=$________.

解. 应填 $\frac{13}{48}$. 依题意，$P(X=i)=\frac{1}{4},\quad i=1,2,3,4;$

$$P\{Y=2|X=1\}=0,\quad P\{Y=2|X=2\}=\frac{1}{2},$$
$$P\{Y=2|X=3\}=\frac{1}{3},\quad P\{Y=2|X=4\}=\frac{1}{4}.$$

故由全概率公式

$$\begin{aligned}P\{Y=2\}&=P\{X=1\}P\{Y=2|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y=2|X=2\}\\&\qquad+P\{X=3\}P\{Y=2|X=3\}+P\{X=4\}P\{Y=2|X=4\}\\&=\frac{1}{4}\times\left(0+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{13}{48}.\end{aligned}$$

二、选择题（7～14 小题，每小题 4 分，共 32 分）

7. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 ………………( )

(A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点.

解. 应选 (C). 先分段讨论求出 $f(x)$:

当 $|x|<1$ 时，有 $\sqrt[n]{1}\leqslant\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\leqslant\sqrt[n]{2}$，故 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}=1$;

当 $|x|=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$;

当 $|x|>1$ 时，$|x|^3=\sqrt[n]{|x|^{3n}}<\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}\leqslant\sqrt[n]{2|x|^{3n}}=\sqrt[n]{2}|x|^3$，故 $f(x)=|x|^3$.

所以

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1;\\ |x^3|, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

再讨论 $f(x)$ 的不可导点：按导数定义，易知 $x=\pm1$ 处 $f(x)$ 不可导，故应选 (C).

8. 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，表示“M 的充分必要条件是 N”，则必有$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

解. 应选 (A). 事实上，我们有 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 和 $F'(x)=f(x)$.

(1) 当 $F(x)$ 为偶函数时, 有 $F(-x)=F(x)$, 于是 $F'(-x)\cdot(-1)=F'(x)$, 即 $-f(-x)=f(x)$，亦即 $f(-x)=-f(x)$，可见 $f(x)$ 为奇函数.

(2) 反过来，若 $f(x)$ 为奇函数，则 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C$，令 $t=-k$，从而

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C=-\int_0^{x} f(-k)\mathrm{d}k+C=\int_0^{x} f(k)\mathrm{d}k+C=F(x),$$

即 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 为偶函数.

综上所述，(A) 为正确选项. 另外，令 $f(x)=1$，$F(x)=x+1$，可排除 (B) 和 (C)；令 $f(x)=x$，$F(x)=\frac{1}{2}x^2$，可排除 (D).

9. 设函数 $u(x,y)=\phi(x+y)+\phi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\mathrm{d}t$，其中函数 ϕ 具有二阶导数，ψ 具有一阶导数，则必有$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$. (D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

解. 应选 (B). 先求一阶偏导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\phi'(x+y)+\phi'(x-y)+\psi(x+y)-\psi(x-y),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\phi'(x+y)-\phi'(x-y)+\psi(x+y)+\psi(x-y).$$

再求二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\phi''(x+y)+\phi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\phi''(x+y)-\phi''(x-y)+\psi'(x+y)+\psi'(x-y),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\phi''(x+y)+\phi''(x-y)+\psi'(x+y)-\psi'(x-y).$$

从而有 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，即 (B) 为正确选项.

10. 设有三元方程 $xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域，在此邻域内该方程$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z=z(x,y)$.

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数和 $y=y(x,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $z=z(x,y)$.

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$.

解. 应选 (D). 令 $F(x,y,z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1$，则

$$F'_x=y+\mathrm{e}^{xz}z,\quad F'_y=x-\frac{z}{y},\quad F'_z=-\ln y+\mathrm{e}^{xz}x.$$

所以 $F'_x(0,1,1)=2\neq 0$，$F'_y(0,1,1)=-1\neq 0$，$F'_z(0,1,1)=0$. 由隐函数存在定理知，方程可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y,z)$ 和 $y=y(x,z)$，故应选 (D).

11. 设 λ_1,λ_2 是矩阵 A 的两个不同的特征值，对应的特征向量分别为 α_1,α_2，则 α_1，$A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充分必要条件是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $\lambda_1\neq 0$.　　(B) $\lambda_2\neq 0$.　　(C) $\lambda_1=0$.　　(D) $\lambda_2=0$.

解. 应选 (B). 因 α_1,α_2 是属于不同特征值的特征向量，故 α_1,α_2 线性无关. 而

$$(\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2))=(\alpha_1,\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{pmatrix},$$

所以 α_1, $A(\alpha_1+\alpha_2)$ 线性无关的充要条件是 $\begin{vmatrix}1&\lambda_1\\0&\lambda_2\end{vmatrix}=\lambda_2\neq 0$.

12. 设 A 为 $n(n\geqslant 2)$ 阶可逆矩阵，交换 A 的第 1 行与第 2 行得矩阵 B，A^*,B^* 分别为 A, B 的伴随矩阵，则$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 B^*.

(B) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 B^*.

(C) 交换 A^* 的第 1 列与第 2 列得 $-B^*$.

(D) 交换 A^* 的第 1 行与第 2 行得 $-B^*$.

解. 应选 (C). 交换 A 的第一行与第二行得 B，即 $B=E_{12}A$. 又因为 A 可逆，故

$$|B|=|E_{12}A|=|E_{12}||A|=-|A|\neq 0,\quad B^{-1}=(E_{12}A)^{-1}=A^{-1}E_{12}.$$

从而

$$B^*=|B|B^{-1}=-|A|A^{-1}E_{12}=-A^*E_{12},$$

故 $A^*E_{12}=-B^*$.

13. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $a=0.2, b=0.3$.　　(B) $a=0.4, b=0.1$.

(C) $a=0.3, b=0.2$.　　(D) $a=0.1, b=0.4$.

解. 应选 (B). 由二维离散型随机变量联合概率分布的性质有

$$0.4+a+b+0.1=1 \quad \Rightarrow \quad a+b=0.5.$$

可知 $a+b=0.5$，又事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，于是有

$$P\{X=0, X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}.$$

计算各个概率得到

$$P\{X=0, X+Y=1\}=P\{X=0, Y=1\}=a,$$

$$P\{X=0\}=P\{X=0, Y=0\}+P\{X=0, Y=1\}=0.4+a,$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0, Y=1\}+P\{X=1, Y=0\}=a+b=0.5.$$

代入前面等式，得到 $a=(0.4+a)\times 0.5$，解得 $a=0.4, b=0.1$.

14. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$.　　(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$.

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$.　　(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1)$.

解. 应选 (D). 因 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \geqslant 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，故有

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(0, \frac{1}{n})$$

根据正态总体抽样分布理论有

$$\frac{\overline{X}-0}{1/\sqrt{n}}=\sqrt{n}\overline{X} \sim N(0,1),$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\frac{(n-1)S^2}{1^2}=(n-1)S^2 \sim \chi^2(n-1),$$

$$\frac{\overline{X}-0}{S/\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}\overline{X}}{S} \sim t(n-1);$$

故排除选项 (A)，(B)，(C). 又

$$X_1^2 \sim \chi^2(1), \quad \sum_{i=2}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n-1),$$

且 X_1^2 与 $\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2$ 相互独立，于是

$$\frac{X_1^2/1}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2/(n-1)}=\frac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1, n-1).$$

故应选 (D).

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 11 分）

设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant\sqrt{2},x\geqslant 0,y\geqslant 0\}$，$[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数．计算二重积分 $\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解. 用极坐标:

$$\begin{aligned}\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\sin\theta\cos\theta\cdot[1+r^2]\mathrm{d}r\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\cdot[1+r^2]\mathrm{d}r\\&=\frac{1}{2}\sin^2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\cdot[1+r^2]\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt[4]{2}}r^3\cdot[1+r^2]\mathrm{d}r.\end{aligned}$$

而 $[1+r^2]=\begin{cases}1, & 0\leqslant r<1,\\ 2, & 1\leqslant r<\sqrt[4]{2}.\end{cases}$ 从而

$$\begin{aligned}\iint_D xy[1+x^2+y^2]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\frac{1}{2}\left(\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r+\int_1^{\sqrt[4]{2}}2r^3\,\mathrm{d}r\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{r^4}{4}\Big|_0^1+2\times\frac{r^4}{4}\Big|_1^{\sqrt[4]{2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(2-1)\right)=\frac{3}{8}.\end{aligned}$$

16.（本题满分 12 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

解. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n\left(1+\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\right)x^{2n+2}}{(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)}\cdot\frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1}x^2=x^2,$$

所以当 $x^2<1$ 时原级数绝对收敛，当 $x^2>1$ 时原级数发散，因此原级数的收敛区间为 $(-1,1)$．另外，当 $x=\pm1$ 时由于通项极限不为零，故原幂级数在 $x=\pm1$ 处发散．在 $-1<x<1$ 时，

$$\begin{aligned}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n(2n-1)}\right)x^{2n}&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}=S_1(x)+S_2(x).\end{aligned}$$

对 $S_1(x)$，由等比级数求和公式得

$$S_1(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^n=-\frac{-1}{1-(-x^2)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

对 $S_2(x)$，在收敛区间 $-1<x<1$ 上逐项求导得

$$S_2'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2}{2n-1}x^{2n-1},$$

$$S_2''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}2x^{2n-2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-x^2)^{n-1}=2\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

由于 $S_2(0)=0, S_2'(0)=0$，所以

$$S_2'(x)=S_2'(0)+\int_0^x S_2''(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2\arctan x,$$

同理得

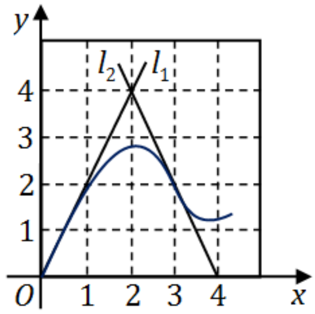
$$\begin{aligned}S_2(x)&=S_2(0)+\int_0^x S_2'(t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^x\arctan t\,\mathrm{d}t\\&=2t\arctan t\Big|_0^x-2\int_0^x t\,\mathrm{d}(\arctan t)=2x\arctan x-2\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt\\&=2x\arctan x-\ln(1+t^2)\Big|_0^x=2x\arctan x-\ln(1+x^2).\end{aligned}$$

从而

$$f(x)=S_1(x)+S_2(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+2x\arctan x-\ln(1+x^2),\quad x\in(-1,1).$$

17. (本题满分 11 分)

如图，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$. 设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\,\mathrm{d}x$.



解. 由直线 l_1 过 $(0,0)$ 和 $(2,4)$ 两点知直线 l_1 的斜率为 2. 由直线 l_1 是曲线 C 在点 $(0,0)$ 的切线，由导数的几何意义知 $f'(0)=2$. 同理可得 $f'(3)=-2$. 另外由点 $(3,2)$ 是曲线 C 的一个拐点知 $f''(3)=0$. 由分部积分公式,

$$\begin{aligned}\int_0^3(x^2+x)f'''(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^3(x^2+x)\,\mathrm{d}(f''(x))\\&=\left[(x^2+x)f''(x)\right]_0^3-\int_0^3 f''(x)(2x+1)\,\mathrm{d}x\\&=-\int_0^3(2x+1)\,\mathrm{d}(f'(x))\\&=-\left[(2x+1)f'(x)\right]_0^3+2\int_0^3 f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=16+2[f(3)-f(0)]=20.\end{aligned}$$

18.（本题满分 12 分）

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0, f(1)=1$．证明：

(Ⅰ) 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$;

(Ⅱ) 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

解. (Ⅰ) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，则 $F(0)=-1<0$，$F(1)=1>0$．于是由闭区间连续函数的介值定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$.

(Ⅱ) 在 $[0,\xi]$ 和 $[\xi,1]$ 上对 $f(x)$ 分别应用拉格朗日中值定理，知存在两个不同的点 $\eta\in(0,\xi),\zeta\in(\xi,1)$，使得

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi-0},\quad f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}.$$

于是

$$f'(\eta)f'(\zeta)=\frac{f(\xi)}{\xi}\cdot\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-\xi}{\xi}\cdot\frac{\xi}{1-\xi}=1.$$

19.（本题满分 12 分）

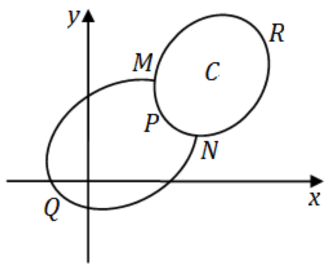
设函数 $\phi(y)$ 具有连续导数，在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上，曲线积分 $\oint_L\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(Ⅰ) 证明：对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有

$$\oint_C\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0.$$

(Ⅱ) 求函数 $\phi(y)$ 的表达式.

解. (Ⅰ) 如图，将 C 分解为：$C=l_1-l_2$，其中 $l_1=NRM$，$l_2=NPM$.



另作一条曲线 $l_3=MQN$ 围绕原点且与 C 相接，则

$$\oint_C\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=\oint_{l_1+l_3}\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}-\oint_{l_2+l_3}\frac{\phi(y)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}=0.$$

(Ⅱ) 设 $P=\frac{\varphi(y)}{2x^2+y^4},Q=\frac{2xy}{2x^2+y^4}$，$P,Q$ 在单连通区域 $x>0$ 内具有一阶连续偏导数，由 (Ⅰ) 知，曲线积分 $\int_L\frac{\varphi(y)\mathrm{d}x+2xy\,\mathrm{d}y}{2x^2+y^4}$ 在该区域内与路径无关，故当 $x>0$ 时，总有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$．经计算，

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2y(2x^2+y^4)-4x\cdot 2xy}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{-4x^2y+2y^5}{(2x^2+y^4)^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\varphi'(y)(2x^2+y^4)-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}=\frac{2x^2\varphi'(y)+\varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3}{(2x^2+y^4)^2}.$$

比较上面两式的右端，得

$$\begin{cases}\varphi'(y)=-2y,\\ \varphi'(y)y^4-4\varphi(y)y^3=2y^5.\end{cases}$$

解得 $\varphi(y)=-y^2$.

20.（本题满分 9 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(I) 求 a 的值;

(II) 求正交变换 $x=Qy$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形;

(III) 求方程 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解.

解. (I) 二次型对应矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

由二次型的秩为 2，知 $r(A)=2<3$，所以 $|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix}1-a & 1+a & 0\\ 1+a & 1-a & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{3\times3}\cdot\begin{vmatrix}1-a & 1+a\\ 1+a & 1-a\end{vmatrix}=-8a=0,$$

求得 $a=0$.

(II) 当 $a=0$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，所以

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda)=\lambda(\lambda-2)^2.$$

令 $|\lambda E-A|=0$，解得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$. 当 $\lambda_1=\lambda_2=2$ 时，解得线性无关的特征向量为:

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3=0$ 时，解得特征向量为:

$$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

易见 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 两两正交，将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化得

$$\eta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\eta_3=\frac{\alpha_3}{\|\alpha_3\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

取 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，即为所求的正交变换矩阵．令 $x=Qy$，则

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=y^TQ^TAQy=y^T\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&0\end{pmatrix}y=2y_1^2+2y_2^2.$$

(III) 由 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2+2y_2^2=0$，得 $y_1=0,y_2=0,y_3=k$（k 为任意常数）．从而所求解为：

$$x=Qy=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}=k\eta_3=\frac{k}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=k'\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},$$

其中 $k'=\dfrac{k}{\sqrt{2}}$ 为任意常数.

21.（本题满分 9 分）

已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c)，a,b,c 不全为零，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$（$k$ 为常数），且 $AB=0$，求线性方程组 $Ax=0$ 的通解.

解. 由 $AB=0$ 知，B 的每一列均为 $Ax=0$ 的解，且 $r(A)+r(B)\leqslant 3$.

(I) 若 $k\neq 9$，则 $r(B)=2$，于是 $r(A)=1$．记 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，则 β_1,β_3 是方程组的解且线性无关，可作为其基础解系，故 $Ax=0$ 的通解为：

$$x=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix},\qquad k_1,k_2\text{为任意常数}.$$

(II) 若 $k=9$，则 $r(B)=1$，于是 $r(A)=1$ 或 $r(A)=2$.

(i) 若 $r(A)=2$，则方程组的基础解系由一个线性无关的解组成，β_1 是方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=0$ 的通解为：

$$x=k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\qquad k_1\text{为任意常数}.$$

(ii) 若 $r(A)=1$，则 A 的三个行向量成比例，因第 1 行元素 (a,b,c) 不全为零，不妨设 $a\neq 0$，则 $Ax=0$ 的同解方程组为：$ax_1+bx_2+cx_3=0$，系数矩

阵的秩为 1，故基础解系由 2 个线性无关解向量组成，选 x_2, x_3 为自由未知量，分别取 $x_2=1, x_3=0$ 或 $x_2=0, x_3=1$，方程组的基础解系为

$$\xi_1=\begin{pmatrix}-\frac{b}{a}\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \xi_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

则其通解为 $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，k_1, k_2 为任意常数.

22.（本题满分 9 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1, 0<y<2x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求：

(I) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$；

(II) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

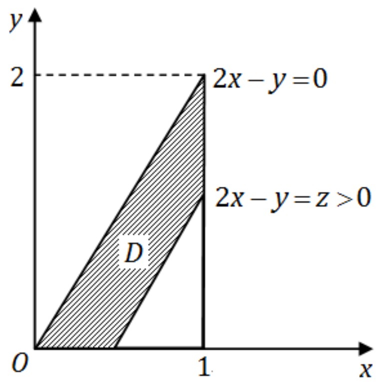
解. (I) 由边缘密度函数的定义，关于 X 的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{2x}\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(II) 由分布函数的定义：$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X-Y\leqslant z\}$. 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=0$. 当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=1$. 当 $0\leqslant z<2$ 时，如图转换成阴影部分的二重积分



$$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint_{2x-y\leqslant z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=1-\iint_{2x-y>z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{2x-z}\mathrm{d}y=z-\frac{1}{4}z^2.$$

所以分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z-\frac{1}{4}z^2, & 0\leqslant z<2,\\ 1, & z4\geqslant 2.\end{cases}$$

由密度函数与分布函数的关系，所求的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}z, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

23.（本题满分 9 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，记 $Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$．求：

(Ⅰ) Y_i 的方差 DY_i，$i=1,2,\cdots,n$；

(II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$.

解. 由题设知 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 相互独立，且 $EX_i=0,DX_i=1(i=1,2,\cdots,n)$,

$$E\overline{X}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=0,$$

$$D\overline{X}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{1}{n}.$$

(Ⅰ) 因为 $Y_i=X_i-\overline{X}$，所以对 $i=1,2,\cdots,n$，有 $EY_i=0$,

$$DY_i=D(X_i-\overline{X})=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}X_j\right]$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot 1+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)=\frac{n-1}{n}.$$

(II) 由协方差的定义：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)&=E(Y_1Y_n)-EY_1EY_n=E(Y_1Y_n)\\&=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]=E(X_1X_n-X_1\overline{X}-X_n\overline{X}+\overline{X}^2)\\&=E(X_1X_n)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})+E(\overline{X}^2).\end{aligned}$$

因为 X_1,X_n 独立，有

$$E(X_1X_n)=EX_1EX_n=0\times 0=0.$$

由方差的公式，有

$$E(\overline{X}^2)=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{1}{n}+0=\frac{1}{n}.$$

由期望的性质和方差的公式有

$$\begin{aligned}E(X_1\overline{X})&=E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_1X_j\right)=E\left(\frac{1}{n}X_1^2+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}X_1X_j\right)\\&=\frac{1}{n}E(X_1^2)+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}EX_1EX_j=\frac{1}{n}\left[DX_1+(EX_1)^2\right]+0\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{n}(1+0)=\frac{1}{n}.$$

同理 $E(X_n\overline{X})=\frac{1}{n}$．所以

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(Y_1, Y_n)&=E(X_1X_n)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})+E(\overline{X}^2)\\&=0-\frac{1}{n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

二〇〇六年考研数学试卷一解答

一、填空题（1～6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ ________.

解. 应填 2．由等价无穷小替换可得 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2.$

2. 微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是 ________.

解. 应填 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$．分离变量，并对两边同时积分得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y(1-x)}{x}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{y}=\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow\ln|y|=\ln|x|-x+C_0\Rightarrow|y|=|x|\mathrm{e}^{-x+C_0}\Rightarrow y=Cx\mathrm{e}^{-x}.$$

3. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$（$0\leqslant z\leqslant 1$）的下侧，则

$\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ________.

解. 应填 2π．补一个曲面 $\Sigma_1:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1\\ z=1\end{cases}$，取上侧，则 $\Sigma+\Sigma_1$ 组成的封闭立体 Ω 满足高斯公式，从而

$$\begin{aligned}&\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&\qquad-\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&\iiint_\Omega 6\,\mathrm{d}v-\iint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3(z-1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&6\times\frac{\pi}{3}-0=2\pi.\end{aligned}$$

4. 点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $d=$ ________.

解. 应填 $\sqrt{2}$．代入点到平面的距离公式，可得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|6+4+0|}{\sqrt{9+16+25}}=\sqrt{2}.$$

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1\\-1&2\end{pmatrix}$，$E$ 为 2 阶单位矩阵，矩阵 B 满足 $BA=B+2E$，则 $|B|=$ ________.

解. 应填 2．由已知条件 $BA=B+2E$ 变形得 $B(A-E)=2E$．两边取行列式得 $|B|\cdot|A-E|=|2E|=4$．因为 $|A-E|=\begin{vmatrix}1&1\\-1&1\end{vmatrix}=2$，所以 $|B|=2$..

6. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则 $P\{\max\{X,\ Y\}\leqslant 1\}=$________.

解. 应填 $\frac{1}{9}$．随机变量 X 与 Y 均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布，则有

$$P\{X\leqslant 1\}=\int_0^1\frac{1}{3}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3},\qquad P\{Y\leqslant 1\}=\int_0^1\frac{1}{3}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{3}.$$

又随机变量 X 与 Y 相互独立，所以

$$P\left\{\max(x,y)\leqslant 1\right\}=P\{x\leqslant 1,Y\leqslant 1\}=P\{x\leqslant 1\}\cdot P\{Y\leqslant 1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

二、选择题（7～14 小题，每小题 4 分，共 32 分）

7. 设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，且 $f'(x)>0,\ f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 $\mathrm{d}y$ 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则(　　)

(A) $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.　(B) $0<\Delta y<\mathrm{d}y$.　(C) $\Delta y<\mathrm{d}y<0$.　(D) $\mathrm{d}y<\Delta y<0$.

解. 应选 (A)．由带拉格朗日余项的泰勒公式，得到

$$\Delta y-\mathrm{d}y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-f'(x_0)\Delta x=\frac{1}{2}f''(\xi)(\Delta x)^2>0,$$

于是 $\Delta y>\mathrm{d}y$．又由于 $\mathrm{d}y=f'(x_0)\Delta x>0$，故有 $0<\mathrm{d}y<\Delta y$.

8. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$ 等于 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

解. 应选 (C)．积分区域 D 的极坐标表示是 $0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$．用直角坐标表示为 $0\leqslant y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2},\ y\leqslant x\leqslant\sqrt{1-y^2}$．所以积分等于 $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x$.

9. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则级数 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛.　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛.

解. 应选 (D). 记 $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，则可排除 (A)，(B)，(C) 选项. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$ 也收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1})$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 也收敛.

10. 设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数，且 $\varphi'_y(x,y)\neq 0$. 已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点，下列选项正确的是 ···············( )

(A) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.　(B) 若 $f'_x(x_0,y_0)=0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

(C) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)=0$.　(D) 若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

解. 应选 (D). 用拉格朗日乘数法，引入函数 $F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，则有

$$\begin{cases}F'_x=f'_x(x,y)+\lambda\varphi'_x(x,y)=0,\\ F'_y=f'_y(x,y)+\lambda\varphi'_y(x,y)=0,\\ F'_\lambda=\varphi'(x,y)=0.\end{cases}$$

解得

$$f'_x(x_0,y_0)=-\frac{f'_y(x_0,y_0)\varphi'_x(x_0,y_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0)}.$$

因此若 $f'_x(x_0,y_0)\neq 0$，则 $f'_y(x_0,y_0)\neq 0$.

11. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 均为 n 维列向量，A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是 ·( )

(A) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性相关，则 $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$ 线性相关.

(B) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性相关，则 $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$ 线性无关.

(C) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关，则 $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$ 线性相关.

(D) 若 $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 线性无关，则 $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$ 线性无关.

解. 应选 (A). $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关等价于 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s$. 设 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，则 $AB=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)$. 故由 $r(AB)<r(B)$ 得

$$r(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s)\leqslant r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)<s,$$

即 $Aa_1,Aa_2,\cdots,Aa_s$ 线性相关.

12. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 ································( )

(A) $C=P^{-1}AP$.　(B) $C=PAP^{-1}$.　(C) $C=P^TAP$.　(D) $C=PAP^T$.

解. 应选 (B). 由初等变换与初等矩阵的关系，可知

$$B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}A=PA,\qquad C=B\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=BQ.$$

因为

$$PQ=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E,$$

所以 $Q=P^{-1}$，从而 $C=BQ=BP^{-1}=PAP^{-1}$.

13. 设 A, B 为随机事件，且 $P(B)>0$, $P(A|B)=1$，则必有··················(　　)

(A) $P(A\cup B)>P(A)$.　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$.

(C) $P(A\cup B)=P(A)$.　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$.

解. 应选 (C). 由 $P\{A|B\}=\dfrac{P\{AB\}}{P\{B\}}=1$ 得 $P\{AB\}=P\{B\}$，从而由加法公式有

$$P\{A\cup B\}=P\{A\}+P\{B\}-P\{AB\}=P\{A\}.$$

14. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则必有·····························(　　)

(A) $\sigma_1<\sigma_2$.　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$.　　(C) $\mu_1<\mu_2$.　　(D) $\mu_1>\mu_2$.

解. 应选 (A). 将随机变量标准化，有 $\dfrac{X-\mu_1}{\sigma_1}\sim N(0,1)$，所以

$$P(\left|X-\mu_1\right|<1)=P\left(\left|\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}\right|<\frac{1}{\sigma_1}\right)=2P\left\{0<\frac{X-\mu_1}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}$$
$$=2\left[\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-\Phi(0)\right]=2\Phi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)-1.$$

同理可得 $P(\left|Y-\mu_2\right|<1)=2\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)-1$. 因为 $\Phi(x)$ 是单调递增函数，所以当 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$ 时，$2\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_1}\right)-1>2\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma_2}\right)-1$，即 $\dfrac{1}{\sigma_1}>\dfrac{1}{\sigma_2}$，所以 $\sigma_1<\sigma_2$.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

设区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1, x\geqslant 0\}$，计算二重积分 $I=\displaystyle\iint_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$.

解. 由二重积分的奇偶对称性和极坐标可得

$$I=\iint_D\frac{1+xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy=\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy+\iint_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$$
$$=\iint_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\,dr=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

16.（本题满分 12 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$, $x_{n+1}=\sin x_n\ (n=1,2,\cdots)$.

(I) 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，并求该极限；(II) 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解. (I) 由于 $0<x<\pi$ 时，$0<\sin x<x$，于是 $0<x_{n+1}=\sin x_n\leqslant x_n$，这说明数列 $\{x_n\}$ 单调减少且 $x_n>0$. 由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记为 A. 递推公式两边取极限得 $A=\sin A$，所以 $A=0$.

(II) 由等价无穷小量代换和洛必达法则可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^{\frac{1}{t^2}}=\exp\left(\lim_{t\to0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{t\to0}\frac{\frac{\sin t}{t}-1}{t^2}\right)=\exp\left(\lim_{t\to0}\frac{\sin t-t}{t^3}\right)=\exp\left(\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{3t^2}\right)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

17. (本题满分 12 分)

将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

解. 先对函数作分解再用公式即可将函数展开成幂级数:

$$f(x)=\frac{1}{(1+x)(2-x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^{n+1}\quad(|x|<1).$$

18. (本题满分 12 分)

设函数 $f(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有二阶导数，且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

(I) 验证 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$. (II) 若 $f(1)=0,f'(1)=1$，求函数 $f(u)$ 的表达式.

解. (I) 由 $z=f(u),u=\sqrt{x^2+y^2}$ 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{(x^2+y^2)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{y^2}{(x^2+y^2)}+f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

代入 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，得

$$f''\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)+\frac{f'\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

所以 $f''(u)+\dfrac{f'(u)}{u}=0$ 成立.

(II) 令 $f'(u)=p$，则方程变成 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}u}=-\dfrac{p}{u}$，则 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}p}{p}=-\int\frac{\mathrm{d}u}{u}$，解得 $f'(u)=p=\dfrac{C_1}{u}$. 因为 $f'(1)=1$，所以 $C_1=1$，从而 $f'(u)=\dfrac{1}{u}$. 解得 $f(u)=\ln u+C_2$，又因为 $f(1)=0$，所以 $C_2=0$，得 $f(u)=\ln u$.

19. (本题满分 12 分)

设在上半平面 $D=\{(x,y)\big|y>0\}$ 内，函数 $f(x,y)$ 是有连续偏导数，且对任意的 $t>0$ 都有 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有 $\oint_L yf(x,y)\mathrm{d}x-xf(x,y)\mathrm{d}y=0$.

解. 已知 $f(tx,ty)=t^{-2}f(x,y)$，两边对 t 求导得

$$xf_x'(tx,ty)+yf_y'(tx,ty)=-2t^{-3}f(x,y).$$

令 $t=1$，得到

$$xf_x'(x,y)+yf_y'(x,y)=-2f(x,y).$$

再令 $P=yf(x,y),Q=-xf(x,y)$，则有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-f(x,y)-xf_x'(x,y),\quad \frac{\partial P}{\partial y}=f(x,y)+yf_y'(x,y).$$

由前面等式可得 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，所以由格林公式知结论成立.

20. (本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=-1\\4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1\\ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1\end{cases}$ 有 3 个线性无关的解.

(I) 证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$;

(II) 求 a,b 的值及方程组的通解.

解. (I) 系数矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\4&3&5&-1\\a&1&3&b\end{pmatrix}$，未知量的个数为 $n=4$，且又 $Ax=b$ 有三个线性无关解，设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是方程组的 3 个线性无关的解，则 $\alpha_2-\alpha_1,\alpha_3-\alpha_1$ 是 $Ax=0$ 的两个线性无关的解. 于是 $4-r(A)\geqslant 2$，即 $r(A)\leqslant 2$. 又因为 A 有一个二阶子式不等于零，所以 $r(A)\geqslant 2$，从而 $r(A)=2$.

(II) 对方程组的增广矩阵作初等行变换:

$$(A|b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\4&3&5&-1&-1\\a&1&3&b&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&1-a&3-a&b-a&1+a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1\\0&-1&1&-5&3\\0&0&4-2a&4a+b-5&4-2a\end{pmatrix}.$$

由 $r(A)=2$，得 $\begin{cases}4-2a=0\\4a+b-5=0\end{cases}$，即 $a=2,\ b=-3$．所以

$$(A|b)\to\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&-1&1&-5&3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2&-4&2\\0&1&-1&5&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

求得方程组 $Ax=b$ 的通解为 $(2,-3,0,0)^T+c_1(-2,1,1,0)^T+c_2(4,-5,0,1)^T$，$c_1,c_2$ 为任意常数.

21.（本题满分 9 分）

设3阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为3,向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^TAQ=\Lambda$.

解. (I) 由题设条件 $A\alpha_1=0=0\alpha_1$，$A\alpha_2=0=0\alpha_2$，故 α_1,α_2 是 A 的对应于 $\lambda=0$ 的特征向量，又因为 α_1,α_2 线性无关，故 $\lambda=0$ 至少是 A 的二重特征值．又因为 A 的每行元素之和为 3，所以有 $A(1,1,1)^T=(3,3,3)^T=3(1,1,1)^T$，所以 $\alpha_3=(1,1,1)^T$ 是 A 的对应于特征值 $\lambda_3=3$ 的特征向量，从而知 $\lambda=0$ 是二重特征值．于是 A 的特征值为 $0,0,3$；属于 0 的特征向量是 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，k_1,k_2 不都为 0；属于 3 的特征向量是 $k_3\alpha_3$，$k_3\neq 0$.

(II) 将特征向量 α_1,α_2 正交化得

$$\beta_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\quad \beta_2=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right).$$

再将 β_1,β_2,α_3 单位化，得

$$\eta_1=\left(-\frac{\sqrt6}{6},\frac{\sqrt6}{3},-\frac{\sqrt6}{6}\right)^T,\quad \eta_2=\left(-\frac{\sqrt2}{2},0,\frac{\sqrt2}{2}\right)^T,\quad \eta_3=\left(\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3},\frac{\sqrt3}{3}\right)^T.$$

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则 Q 是正交矩阵，并且 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

22.（本题满分 9 分）

随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -1<x<0;\\ \frac{1}{4}, & 0\leqslant x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，$F\left(x,y\right)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数．求

(I) Y 的概率密度 $f_Y(y)$；(II) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

解. (I) 因为 $F_Y(y)=P\left\{Y\leqslant y\right\}=P\left\{X^2\leqslant y\right\}$，分情况讨论：当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-\sqrt{y}}^{0}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}\sqrt{y};$$

当 $1\leqslant y<4$ 时，

$$F_Y(y)=P(-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y})=\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{\sqrt{y}}\frac{1}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y};$$

当 $y\geqslant 4$ 时，$F_Y(y)=1$．综上所述，有

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ \frac{3}{4}\sqrt{y}, & 0\leqslant y<1;\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}, & 1\leqslant y<4;\\ 1, & y\geqslant 4.\end{cases}$$

由概率密度是分布函数在对应区间上的的微分，所以

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1;\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1\leqslant y<4;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(II) 根据二维随机变量的定义有

$$F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},X^2\leqslant 4\right\}$$

$$=P\left\{-2\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

23.（本题满分 9 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & 其它,\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数（$0<\theta<1$），$X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数，求 θ 的最大似然估计.

解. 依题设，似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^N(1-\theta)^{n-N}, & 0<x_{i_1},x_{i_2},\cdots x_{i_N}<1,1\leqslant x_{i_{N+1}},x_{i_{N+2}},\cdots x_{i_n}<2;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

在 $0<x_{i_1},x_{i_2},\cdots x_{i_N}<1$，$1\leqslant x_{i_{N+1}},x_{i_{N+2}},\cdots x_{i_n}<2$ 时，等式两边同取自然对数得

$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta).$$

两边对 θ 求导并令导数为零，得到

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0,$$

解得 $\theta=\frac{N}{n}$，所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\frac{N}{n}$.

二〇〇七年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 当 $x\to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是 ……………………………… (　　)

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.

解. 应选 (B). 事实上，因为

$$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\frac{1-\sqrt{x}+\sqrt{x}+x}{1-\sqrt{x}}=\ln\left[1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right],$$

而且当 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\to 0$，所以由等价无穷小量代换得到

$$\ln\left[1+\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right]\sim\frac{x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\sim x+\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)\sim\sqrt{x}.$$

2. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 渐近线的条数为 ……………………………… (　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

解. 应选 (D). 因为

$$\lim_{x\to 0}y=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=\infty,$$

所以 $x=0$ 是一条铅直渐近线；因为

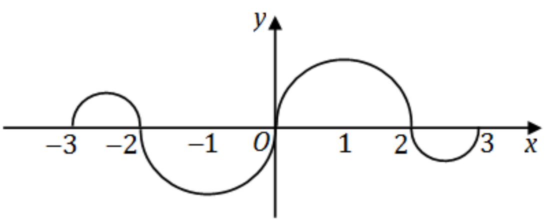
$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right)=0,$$

所以 $y=0$ 是沿 $x\to-\infty$ 方向的一条水平渐近线；令

$$\begin{aligned}
k&=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x/(1+e^x)}{1}=1,\\
b&=\lim_{x\to+\infty}(y-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}(\ln(1+e^x)-x)=0+\lim_{x\to+\infty}(\ln(1+e^x)-\ln e^x)\\
&=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln(e^{-x}+1)=\ln 1=0,
\end{aligned}$$

所以 $y=x$ 是曲线的斜渐近线. 总共有 3 条渐近线.

3. 如图，连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2]$, $[2,3]$ 上的图形分别是直径为 1 的上、下半圆周，在区间 $[-2,0]$, $[0,2]$ 上图形分别是直径为 2 的上、下半圆周.



设 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则下列结论正确的是 ( )

(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$.

(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$.

(C) $F(-3)=\frac{3}{4}F(2)$.

(D) $F(-3)=-\frac{5}{4}F(-2)$.

解. 应选 (C). 由所给条件知，$f(x)$ 为 x 的奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，由 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 知

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(-u)d(-u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=F(x),$$

故 $F(x)$ 为 x 的偶函数，所以 $F(-3)=F(3)$. 由于曲线由半圆周组成，由定积分的几何意义，得到

$$F(2)=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\cdot 1^2=\frac{\pi}{2},$$

$$F(3)=\int_0^3 f(t)\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\int_2^3 f(t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\cdot 1^2-\frac{\pi}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{4}F(2).$$

所以 $F(-3)=F(3)=\frac{3}{4}F(2)$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，则下列命题错误的是 ( )

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在.

解. 应选 (D). 例如取 $f(x)=|x|$，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|-|-x|}{x}=0$$

存在，而

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-0}{x-0}=-1,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-0}{x-0}=1,$$

左右极限存在但不相等，所以 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 的导数 $f'(0)$ 不存在，即选项 (D) 错误.

由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在及 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，可得

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}x\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\cdot\lim_{x\to 0}x=0\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0,$$

所以选项 (A) 正确. 由选项 (A) 知 $f(0)=0$，所以

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$$

存在，所以选项 (C) 也正确．由 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $f(-x)$ 在 $x=0$ 处连续，从而

$$\lim_{x\to0}\big[f(x)+f(-x)\big]=\lim_{x\to0}f(x)+\lim_{x\to0}f(-x)=f(0)+f(0)=2f(0),$$

所以

$$2f(0)=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot x\right]=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}\cdot\lim_{x\to0}x=0\cdot\lim_{x\to0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}=0,$$

即有 $f(0)=0$，所以选项 (B) 正确．

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数，且 $f''(x)>0$，令 $u_n=f(n)\,(n=1,2,\cdots)$，则下列结论正确的是……………………………………………………（　）

(A) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛．　　(B) 若 $u_1>u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散．

(C) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必收敛．　　(D) 若 $u_1<u_2$，则 $\{u_n\}$ 必发散．

解. 应选 (D)．$u_n=f(n)$，由拉格朗日中值定理有

$$u_{n+1}-u_n=f(n+1)-f(n)=f'(\xi_n)(n+1-n)=f'(\xi_n),$$

其中 $n<\xi_n<n+1$，$\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_n<\cdots$．由 $f''(x)>0$ 知 $f'(x)$ 严格单调增，故有

$$f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_n)<\cdots.$$

若 $u_1<u_2$，则 $f'(\xi_1)=u_2-u_1>0$，所以 $0<f'(\xi_1)<f'(\xi_2)<\cdots<f'(\xi_n)<\cdots$.

$$u_{n+1}=u_1+\sum_{k=1}^{n}(u_{k+1}-u_k)=u_1+\sum_{k=1}^{n}f'(\xi_k)>u_1+nf'(\xi_1).$$

而 $f'(\xi_1)$ 是一个确定的正数．于是 $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}=+\infty$，故 $\{u_n\}$ 发散．

6. 设曲线 $L:f(x,y)=1$（$f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数）过第 II 象限内的点 M 和第IV象限内的点 N，Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是……………………………………………………………（　）

(A) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x$.　　(B) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y$.

(C) $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$.　　(D) $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$.

解. 应选 (B)．设 M 和 N 点的坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2)，则由题设可知 $x_1<x_2$，$y_1>y_2$．于是

对选项 (A)，有 $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x=\int_\Gamma \mathrm{d}x=x_2-x_1>0$，应排除；

对选项 (B)，有 $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y=\int_\Gamma \mathrm{d}y=y_2-y_1<0$，是正确选项；

对选项 (C)，有 $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s=l>0$（其中 l 为 Γ 的弧长），应排除；

对选项 (D)，有 $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y=\int_\Gamma 0\mathrm{d}x+0\mathrm{d}y=0$，应排除．

7. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则下列向量组线性相关的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$.　　(B) $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$.

(C) $\alpha_1-2\alpha_2, \alpha_2-2\alpha_3, \alpha_3-2\alpha_1$.　　(D) $\alpha_1+2\alpha_2, \alpha_2+2\alpha_3, \alpha_3+2\alpha_1$.

解. 应选 (A)．因为 $(\alpha_1-\alpha_2)+(\alpha_2-\alpha_3)+(\alpha_3-\alpha_1)=0$，所以 $\alpha_1-\alpha_2, \alpha_2-\alpha_3, \alpha_3-\alpha_1$ 线性相关.

选项 (B) 不对．因为

$$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P_2,$$

其中 $|P_2|=2\neq0$.

选项 (C) 不对，因为

$$(\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&-2\\-2&1&0\\0&-2&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P_3,$$

其中 $|P_3|=-7\neq0$.

选项 (D) 不对，因为

$$(\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&2\\2&1&0\\0&2&1\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P_4,$$

其中 $|P_4|=9\neq0$.

8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 $B\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) 合同，且相似.　　(B) 合同，但不相似.

(C) 不合同，但相似.　　(D) 既不合同，也不相似.

解. 应选 (B)．因为迹 $\mathrm{tr}(A)=2+2+2=6$，迹 $\mathrm{tr}(B)=1+1=2\neq6$，所以 A 与 B 不相似（不满足相似的必要条件）．又 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda-3)^2$，$|\lambda E-B|=\lambda(\lambda-1)^2$，$A$ 与 B 是同阶实对称矩阵，其秩相等，且有相同的正惯性指数，故 A 与 B 合同.

9. 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 p（$0<p<1$），则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $3p(1-p)^2$.　　(B) $6p(1-p)^2$.　　(C) $3p^2(1-p)^2$.　　(D) $6p^2(1-p)^2$.

解. 应选 (C)．第 4 次射击恰好是第 2 次命中目标可以理解为：第 4 次试验成功而前三次试验中必有 1 次成功，2 次失败．根据独立重复的伯努利试验，前 3 次

试验中有 1 次成功 2 次失败，其概率必为 $C_3^1 p(1-p)^2$. 再加上第 4 次是成功的，其概率为 p. 所以，第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

$$C_3^1 p(1-p)^2 \cdot p = 3p^2(1-p)^2.$$

10. 设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布，且 X 与 Y 不相关，$f_X(x), f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度，则在 $Y=y$ 条件下，X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为(　　)

(A) $f_X(x)$.　　(B) $f_Y(y$.　　(C) $f_X(x)f_Y(y)$.　　(D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$.

解. 应选 (A). 由于二维正态随机变量 (X,Y) 中 X 与 Y 不相关，故 X 与 Y 独立，且 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. 根据条件概率密度的定义，当在 $Y=y$ 条件下，如果 $f_Y(y)\neq 0$，则

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{f_X(x)f_Y(y)}{f_Y(y)}=f_X(x).$$

二、填空题（11～16 小题，每小题 4 分，共 24 分）

11. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}\, dx =$________.

解. 应填 $\dfrac{\sqrt{e}}{2}$. 事实上，令 $\dfrac{1}{x}=t$，则有 $x=\dfrac{1}{t}$，$dx=-\dfrac{1}{t^2}dt$，从而

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}\,dx &= \int_1^{\frac{1}{2}} t^3 e^t\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int_1^{\frac{1}{2}} t e^t\,dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 t e^t\,dt \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 t\,d(e^t) = \left(te^t\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1 - \int_{\frac{1}{2}}^1 e^t\,dt = e-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} - e^t\Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= e-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}}-\left(e-e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{2}.\end{aligned}$$

12. 设 $f(u,v)$ 为二元可微函数，$z=f(x^y,y^x)$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$________.

解. 应填 $f_1'(x^y,y^x)yx^{y-1}+f_2'(x^y,y^x)y^x\ln y$. 这是因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x^y,y^x)}{\partial x} &= f_1'(x^y,y^x)\frac{\partial x^y}{\partial x}+f_2'(x^y,y^x)\frac{\partial y^x}{\partial x} \\ &= f_1'(x^y,y^x)yx^{y-1}+f_2'(x^y,y^x)y^x\ln y.\end{aligned}$$

13. 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$________.

解. 应填 $C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}$. 事实上，这是二阶常系数非齐次线性微分方程. 对应的齐次方程的特征方程为 $r^2-4r+3=0$，得特征根 $r_1=1, r_2=3$，从而对应齐次方程的通解为

$$y=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}=C_1e^x+C_2e^{3x}.$$

由于这里 $\lambda=2$ 不是特征方程的根，所以应设该非齐次方程的一个特解为 $y^*=Ae^{2x}$，所以 $(y^*)'=2Ae^{2x}$，$(y^*)''=4Ae^{2x}$，代入原方程得

$$4Ae^{2x}-4\cdot 2Ae^{2x}+3Ae^{2x}=2e^{2x}.$$

解得 $A=-2$，所以 $y^*=-2e^{2x}$．故得原方程的通解为

$$y=C_1e^x+C_2e^{3x}-2e^{2x}.$$

14. 设曲面 $\Sigma:|x|+|y|+|z|=1$，则 $\oiint_\Sigma(x+|y|)\mathrm{d}S=$________.

解. 应填 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$. 事实上, $\oiint_\Sigma(x+|y|)\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma x\,\mathrm{d}S+\oiint_\Sigma|y|\,\mathrm{d}S$. 对于第一部分, 由于积分区域关于 x 轴、y 轴是对称的面, 被积函数 x 为 x 的奇函数, 所以 $\oiint_\Sigma x\,\mathrm{d}S=0$.
对于第二部分，因 Σ 关于 x,y,z 轮换对称，所以

$$\oiint_\Sigma|x|\,\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma|y|\,\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma|z|\,\mathrm{d}S$$

$$\Rightarrow\quad\oiint_\Sigma|y|\,\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint_\Sigma\left(|x|+|y|+|z|\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint_\Sigma\mathrm{d}S.$$

由曲面积分的几何意义，$\oiint_\Sigma\mathrm{d}S$ 为曲面的表面积，而 Σ 为 8 块同样的等边三角形，每块等边三角形的边长为 $\sqrt{2}$，所以 Σ 的面积等于 $8\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$，从而

$$\oiint_\Sigma(x+|y|)\mathrm{d}S=\oiint_\Sigma|y|\,\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\cdot4\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

15. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A^3 的秩为________.

解. 应填 1．事实上，

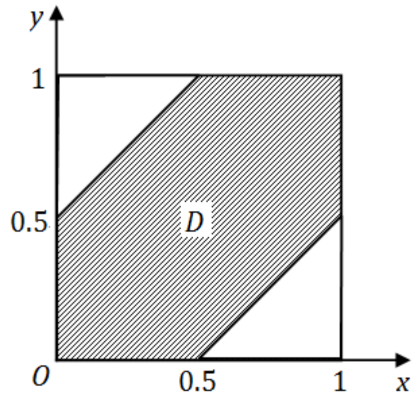
$$A^2=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

从而知道 $r\left(A^3\right)=1$.

16. 在区间 $(0,1)$ 中随机地取两个数,则这两数之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$ 的概率为________.

解. 应填 3/4. 以 X 和 Y 分别表示区间 $(0,1)$ 中随机的两个数，则 $|X-Y|<\frac{1}{2}$ 的区域就是正方形中阴影的面积 D



根据几何概型的定义，所求概率为

$$P\left(|X-Y|<\frac{1}{2}\right)=\frac{D\text{ 的面积}}{\text{单位正方形面积}}=\frac{1-(1/2)^2}{1}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题（17～24 小题，共 86 分）

17.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$ 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\leqslant 4,y\geqslant 0\right\}$ 上的最大值和最小值.

解. 先求函数 $f(x,y)$ 在 D 的内部的最值，由

$$\begin{cases} f'_x=2x-2xy^2=0 \\ f'_y=4y-2x^2y=0 \end{cases}$$

解得 D 内的驻点为 $(\pm\sqrt{2},1)$，相应的函数值为 $f(\pm\sqrt{2},1)=2$.

再考虑 $f(x,y)$ 在 D 的边界 L_1：$y=0$（$-2\leqslant x\leqslant 2$）上的最值. 此时 $f(x,0)=x^2$（$-2\leqslant x\leqslant 2$），易知函数 $f(x,y)$ 在此边界上的最大值为 $f(\pm 2,0)=4$，最小值为 $f(0,0)=0$.

最后考虑 $f(x,y)$ 在 D 的边界 L_2: $x^2+y^2=4\,(y\geqslant 0)$ 上的最值, 此时 $y=\sqrt{4-x^2}$, 在区间 $[-2,2]$ 上令

$$h(x)=f(x,\sqrt{4-x^2})=x^2+2(4-x^2)-x^2(4-x^2)=x^4-5x^2+8,$$

由 $h'(x)=4x^3-10x=0$ 得驻点 $x_1=0,x_2=-\sqrt{\frac{5}{2}},x_3=\sqrt{\frac{5}{2}}$，所以函数 $h(x)$ 在相应点处的函数值为

$$h(0)=f(0,2)=8,\ h\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=f\left(-\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4},\ h\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=f\left(\sqrt{\frac{5}{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\right)=\frac{7}{4}.$$

综上可知函数在 D 上的最大值为 $f(0,2)=8$，最小值为 $f(0,0)=0$.

18.（本题满分 11 分）

计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-\frac{y^2}{4}$（$0\leqslant z\leqslant 1$）的上侧.

解. 补充曲面片 $S: z=0, x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1$，下侧为正，有 $I=I_1-I_2$，其中

$$I_1=\iint_{\Sigma+S} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_2=\iint_{S} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+2zy\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

根据高斯公式，

$$I_1=\iiint_{\Omega}(z+2z)\,\mathrm{d}v=\int_0^1 3z\,\mathrm{d}z\iint_{x^2+\frac{1}{4}y^2<1-z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 6\pi z(1-z)\,\mathrm{d}z=\pi.$$

其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1-z, 0\leqslant z\leqslant 1\right\}$. 又由函数奇偶性可知

$$I_2=\iint_{x^2+\frac{1}{4}y^2\leqslant 1} 3xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

从而 $I=\pi-0=\pi$.

19.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(a)$=$g(a)$，$f(b)$=$g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

解. 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，由题设 $f(x), g(x)$ 存在相等的最大值，设 $x_1\in(a,b)$，$x_2\in(a,b)$ 使得

$$f(x_1)=\max_{[a,b]} f(x)=g(x_2)=\max_{[a,b]} g(x).$$

于是 $\varphi(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geqslant 0$，$\varphi(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leqslant 0$.

若 $\varphi(x_1)=0$，则取 $\eta=x_1\in(a,b)$，有 $\varphi(\eta)=0$.

若 $\varphi(x_2)=0$，则取 $\eta=x_2\in(a,b)$，有 $\varphi(\eta)=0$.

若 $\varphi(x_1)>0, \varphi(x_2)<0$，则由连续函数介值定理知，存在 $\eta\in(x_1,x_2)$ 使 $\varphi(\eta)=0$.

不论以上哪种情况，总存在 $\eta\in(a,b)$，使 $\varphi(\eta)=0$. 另外有

$$\varphi(a)=f(a)-g(a)=0,\quad \varphi(b)=f(b)-g(b)=0.$$

将 $\varphi(x)$ 在区间 $[a,\eta],[\eta,b]$ 分别应用罗尔定理，得存在 $\xi_1\in(a,\eta),\xi_2\in(\eta,b)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=0,\varphi'(\xi_2)=0$；再由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $\varphi''(\xi)=0$，即有 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

20.（本题满分 10 分）

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛，其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1.$$

(I) 证明 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,\ n=1,2,\cdots$； (II) 求 $y(x)$ 的表达式.

解. (I) 由于 $y=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，根据泰勒级数的唯一性，可知 $a_n=\dfrac{y^{(n)}(0)}{n!}$. 在方程 $y''-2xy'-4y=0$ 两端求 n 阶导数，得

$$y^{(n+2)}-2xy^{(n+1)}-2(n+2)y^{(n)}=0.$$

令 $x=0$，得

$$y^{(n+2)}(0)-2(n+2)y^{(n)}(0)=0,$$

即 $(n+2)!a_{n+2}-2(n+2)\cdot n!a_n=0$，故 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,\ n=1,2,\cdots$.

(II) 由于 $a_0=y(0)=0,\ a_1=y'(0)=1$，由微分方程得 $a_2=y''(0)/2=0$. 从而由递推关系得到 $a_{2n}=0,n=1,2,\cdots$;

$$a_{2n+1}=\frac{2}{2n}a_{2n-1}=\cdots=\frac{2^n}{2n(2n-2)\cdots4\cdot2}a_1=\frac{1}{n!},n=0,1,2,\cdots.$$

所以

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}.$$

21. (本题满分 11 分)

设线性方程组① $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$ 与方程② $x_1+2x_2+x_3=a-1$ 有公共解，求 a 的值及所有公共解.

解. 因为方程组①与②有公共解，从而得联立方程组③

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\x_1+2x_2+ax_3=0\\x_1+4x_2+a^2x_3=0\\x_1+2x_2+x_3=a-1\end{cases}$$

对联立方程组的增广矩阵作初等行变换得

$$(A\,|\,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&2&a&0\\1&4&a^2&0\\1&2&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&a-1\\0&0&a-1&1-a\\0&0&0&(a-1)(a-2)\end{pmatrix}.$$

要使此线性方程组有解，a 必须满足 $(a-1)(a-2)=0$，即 $a=1$ 或 $a=2$.

当 $a=1$ 时，$r(A)=2$，联立方程组③的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_2=0.\end{cases}$$

由 $r(A)=2$，方程组有 $n-r=3-2=1$ 个自由未知量．选 x_1 为自由未知量，取 $x_1=1$，解得两方程组的公共解为 $k(1,0,-1)^T$，其中 k 是任意常数.

当 $a=2$ 时，联立方程组③的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_2=0, \\ x_3=-1. \end{cases}$$

解得两方程的公共解为 $(0,1,-1)^T$.

22.（本题满分 11 分）

设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，$\alpha_1=(1,-1,1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量，记 $B=A^5-4A^3+E$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量，并求 B 的全部特征值与特征向量；

(II) 求矩阵 B.

解. (I) 由 $A\alpha_1=\alpha_1$，可得 $A^k\alpha_1=A^{k-1}(A\alpha_1)=A^{k-1}\alpha_1=\cdots=\alpha_1$，$k$ 是正整数，故

$$B\alpha_1=(A^5-4A^3+E)\alpha_1=A^5\alpha_1-4A^3\alpha_1+E\alpha_1=\alpha_1-4\alpha_1+\alpha_1=-2\alpha_1,$$

于是 α_1 是 B 的特征向量（对应的特征值为 $\mu_1=-2$）．设 $f(x)=x^5-4x^3+1$，若 λ 是 A 的特征值，则 $f(\lambda)$ 是 $f(A)=B$ 的特征值．A 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$，则 B 的全部特征值为

$$\mu_1=f(\lambda_1)=-2,\quad \mu_2=f(\lambda_2)=1,\quad \mu_3=f(\lambda_3)=1,$$

由前面证明知 α_1 是矩阵 B 的属于特征值 $\mu_1=-2$ 的特征向量．设 B 的属于 $\mu_2=\mu_3=1$ 的特征向量为 $(x_1,x_2,x_3)^T$，α_1 与 $(x_1,x_2,x_3)^T$ 正交，所以有方程如下：

$$x_1-x_2+x_3=0$$

解该方程组得基础解系为

$$\alpha_2=(-1,0,1)^T,\quad \alpha_3=(1,1,0)^T.$$

故 B 的所有的特征向量为：对应于 $\mu_1=-2$ 的全体特征向量为 $k_1\alpha_1$，其中 k_1 是非零任意常数，对应于 $\mu_2=\mu_3=1$ 的全体特征向量为 $k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中 k_2,k_3 是不同时为零的任意常数.

(II) 令矩阵 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求逆矩阵 P^{-1} 得到

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

由 $P^{-1}BP=\mathrm{diag}(-2,1,1)$，得到

$$B=P\cdot\mathrm{diag}(-2,1,1)\cdot P^{-1}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\1&0&1\\-1&1&0\end{pmatrix}.$$

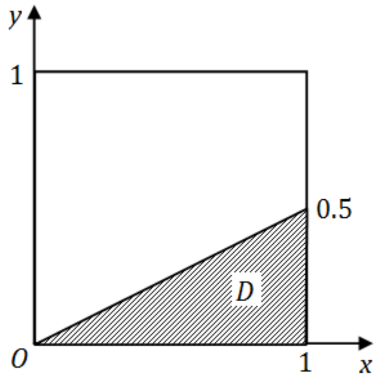
23.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(Ⅰ) 求 $P\{X>2Y\}$； (Ⅱ) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

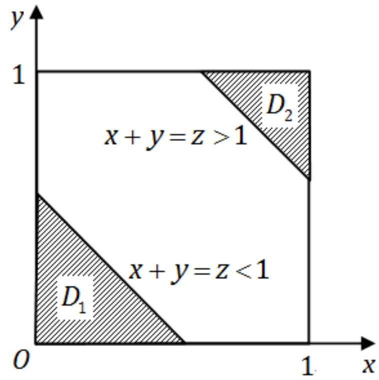
解. (Ⅰ) $P\{X>2Y\}=\iint_D(2-x-y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 为 $0<x<1,0<y<1$ 中 $x>2y$ 的那部分区域（下图阴影部分）；



求此二重积分可得

$$P\{X>2Y\}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}x}(2-x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1(x-\frac{5}{8}x^2)\mathrm{d}x=\frac{7}{24}.$$

(Ⅱ) $F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}$



当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$；当 $z>2$ 时，$F_Z(z)=1$；当 $0<z\leqslant 1$ 时，

$$F_Z(z)=\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}(2-x-y)\mathrm{d}y=-\frac{1}{3}z^3+z^2;$$

当 $1<z\leqslant 2$ 时，

$$F_Z(z)=1-\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=1-\int_{z-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{z-x}^{1}(2-x-y)\mathrm{d}y=\frac{1}{3}z^3-2z^2+4z-\frac{5}{3}.$$

所以 $Z=X+Y$ 的概率密度

$$f_Z(z)=F'(z)=\begin{cases}2z-z^2, & 0<z\leqslant 1,\\ z^2-4z+4, & 1<z\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

24.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}, & 0<x<\theta,\\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta\leqslant x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中参数 θ（$0<\theta<1$）未知，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值.

(I) 求参数 θ 的矩估计量 $\widehat{\theta}$；

(II) 判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量，并说明理由.

解. (I) 记 $E(X)=\mu$，则由数学期望的定义，有

$$\mu=E(X)=\int_0^{\theta}\frac{x}{2\theta}\mathrm{d}x+\int_{\theta}^{1}\frac{x}{2(1-\theta)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta.$$

样本均值 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$，即有

$$\mu=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta \quad\Rightarrow\quad \theta=2\mu-\frac{1}{2}.$$

因此参数 θ 的矩估计量为 $\widehat{\theta}=2\overline{X}-\frac{1}{2}$；

(II) 首先计算

$$E(X)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\theta,\quad E(X^2)=\frac{1}{6}(1+\theta+2\theta^2),$$
$$\Rightarrow\quad D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{5}{48}-\frac{\theta}{12}+\frac{1}{12}\theta^2.$$

于是有

$$E(4\overline{X}^2)=4E(\overline{X}^2)=4\left[D\overline{X}+(E\overline{X})^2\right]=4\left[\frac{1}{n}DX+(EX)^2\right]$$
$$=\frac{5+3n}{12n}+\frac{3n-1}{3n}\theta+\frac{3n+1}{3n}\theta^2\neq\theta^2,$$

因此 $4\overline{X}^2$ 不是为 θ^2 的无偏估计量.

二〇〇八年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)\,\mathrm{d}t$，则 $f'(x)$ 的零点个数……………………（　）

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

解. 应选 (B). $f'(x)=[\ln(2+x^2)]\cdot 2x$，故 $x=0$ 是 $f'(x)$ 的唯一零点.

2. 函数 $f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于……………………（　）

(A) $\boldsymbol{i}$.　　(B) $-\boldsymbol{i}$.　　(C) $\boldsymbol{j}$.　　(D) $-\boldsymbol{j}$.

解. 应选 (A). 因为 $f'_x=\dfrac{1/y}{1+x^2/y^2}$，$f'_y=\dfrac{-x/y^2}{1+x^2/y^2}$，所以 $f'_x(0,1)=1$，$f'_y(0,1)=0$，从而 $\operatorname{grad} f(0,1)=1\cdot\boldsymbol{i}+0\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{i}$.

3. 在下列微分方程中，以 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$（$C_1,C_2,C_3$ 为任意常数）为通解的是……………………（　）

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$.　　(B) $y'''+y''+4y'+4y=0$.

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$.　　(D) $y'''-y''+4y'-4y=0$.

解. 应选 (D). 由通解的表达式可见此微分方程的三个特征根分别为 $r=1, r=\pm 2i$，所以特征方程为 $(r-1)(r-2i)(r+2i)=0$，即 $r^3-r^2+4r-4=0$. 于是该微分方程是 $y'''-y''+4y'-4y=0$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，$\{x_n\}$ 为数列，下列命题正确的是·（　）

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调，则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调，则 $\{x_n\}$ 收敛.

解. 应选 (B). 因为 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界，且 $\{x_n\}$ 单调，所以 $\{f(x_n)\}$ 单调且有界，故 $\{f(x_n)\}$ 一定存在极限.

5. 设 A 为 n 阶非零矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，满足 $A^3=0$，则……………………（　）

(A) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 不可逆.　　(B) $E-A$ 不可逆，$E+A$ 可逆.

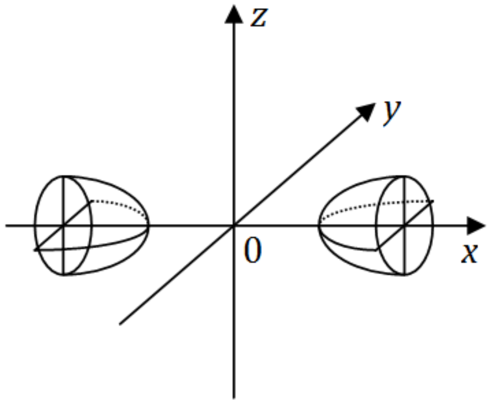
(C) $E-A$ 可逆，$E+A$ 可逆.　　(D) $E-A$ 可逆，$E+A$ 不可逆.

解. 应选 (C). 因为

$$(E-A)(E+A+A^2)=E-A^3=E,\quad (E+A)(E-A+A^2)=E+A^3=E.$$

所以 $E-A$ 和 $E+A$ 均可逆.

6. 设 A 为 3 阶实对称矩阵，如果二次曲面方程 $(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图，则 A 的正特征值个数为⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯( )



(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

解. 应选 (B). 图示的二次曲面为双叶双曲面，其方程为 $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}-\frac{(z')^2}{c^2}=1$，即二次型的标准型为 $f=\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}-\frac{(z')^2}{c^2}$. 又由于所做的是正交变换，故而标准型的系数即为 A 的特征值.

7. 设随机变量 X,Y 独立同分布，且 X 分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max\{X,Y\}$ 分布函数为⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯( )

(A) $F^2(x)$.　　(B) $F(x)F(y)$.

(C) $1-[1-F(x)]^2$.　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$.

解. 应选 (A). 这是因为

$$F_Z(z)=P(Z\leqslant z)=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P(X\leqslant z)P(Y\leqslant z)=F(z)F(z)=F^2(z).$$

8. 设随机变量 $X\sim N(0,1)$， $Y\sim N(1,4)$，且相关系数 $\rho_{XY}=1$，则⋯⋯⋯( )

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$.　　(B) $P\{Y=2X-1\}=1$.

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$.　　(D) $P\{Y=2X+1\}=1$.

解. 应选 (D). 由 $\rho_{XY}=1$ 知，存在 $a>0$ 和 b，使得 $P\{Y=aX+b\}=1$. 从而

$$1=E(Y)=E(aX+b)=aEX+b=a\times0+b=b,$$

$$4=D(Y)=D(aX+b)=a^2EX=a^2\times1=a^2.$$

所以 $a=2$， $b=1$.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$________.

解. 应填 $\frac{1}{x}$. 分离变量得 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}$, 两端积分得 $-\ln|y|=\ln|x|+C_1$, 所以 $\frac{1}{|y|}=C|x|$, 又 $y(1)=1$, 所以 $y=\frac{1}{x}$.

10. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为 ________.

解. 应填 $y=x+1$. 设 $F(x,y)=\sin(xy)+\ln(y-x)-x$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{y\cos(xy)-\frac{1}{y-x}-1}{x\cos(xy)+\frac{1}{y-x}},$$

将 $y(0)=1$ 代入得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=1$, 所以切线方程为 $y-1=x-0$, 即 $y=x+1$.

11. 已知幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 ________.

解. 应填 $(1,5]$. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 的收敛区间以 $x=-2$ 为中心, 因为该级数在 $x=0$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 所以其收敛半径为 2, 收敛域为 $(-4,0]$, 即 $-2<x+2\leqslant 2$ 时级数收敛, 亦即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nt^n$ 的收敛半径为 2, 收敛域为 $(-2,2]$. 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛半径为 2, 由 $-2<x-3\leqslant 2$ 得 $1<x\leqslant 5$, 即幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为 $(1,5]$.

12. 设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧, 则 $\iint_{\Sigma}xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ________.

解. 应填 4π. 加 $\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\leqslant 4)$ 的下侧, 记 Σ 与 Σ_1 所围空间区域为 Ω, 则

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma_1}xy\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iiint_{\Omega}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\left(-\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)=0+\frac{1}{2}\iint_{x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\,\mathrm{d}r=4\pi.\end{aligned}$$

13. 设 A 为 2 阶矩阵, α_1,α_2 为线性无关的 2 维列向量, $A\alpha_1=0, A\alpha_2=2\alpha_1+\alpha_2$, 则 A 的非零特征值为 ________.

解. 应填 1. 由已知条件有

$$A(\alpha_1,\alpha_2)=(A\alpha_1,A\alpha_2)=(0,2\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_2)\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}.$$

记 $P=(\alpha_1,\alpha_2)$, $B=\begin{pmatrix}0&2\\0&1\end{pmatrix}$, 则 $AP=PB$. 因为 α_1,α_2 线性无关，所以 P 可逆. 从而 $B=P^{-1}AP$，即 A 与 B 相似. 由

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda&-2\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)=0,$$

得 $\lambda=0$ 及 $\lambda=1$ 为 B 的特征值. 又相似矩阵有相同的特征值，故 A 的非零特征值为 1.

14. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\left\{X=EX^2\right\}=$________.

解. 应填 $\frac{1}{2\mathrm{e}}$. 由 $DX=EX^2-(EX)^2$，得 $EX^2=DX+(EX)^2$，又因为 X 服从参数为 1 的泊松分布，所以 $DX=EX=1$，所以 $EX^2=1+1=2$，所以

$$P\{X=2\}=\frac{1^2}{2!}\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{2\mathrm{e}}.$$

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 9 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

解. 由泰勒公式有 $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$，从而

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(\sin^3 x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3),$$

于是有

$$\lim_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$

16.（本题满分 9 分）

计算曲线积分 $\displaystyle\int_L \sin 2x\,\mathrm{d}x+2\left(x^2-1\right)y\,\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(\pi,0)$ 的一段.

解. 取 L_1 为 x 轴上从点 $(\pi,0)$ 到点 $(0,0)$ 的一段，D 是由 L 与 L_1 围成的区域，则

$$\begin{aligned}&\int_L \sin 2x\,\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y\\=&\int_{L+L_1}\sin 2x\,\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y-\int_{L_1}\sin 2x\,\mathrm{d}x+2(x^2-1)y\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$=-\iint_D 4xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \sin 2x\,\mathrm{d}x=-\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^{\sin x} 4xy\,\mathrm{d}y-\left[\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^\pi$$
$$=-\int_0^\pi 2x\sin^2 x\,\mathrm{d}x=-\int_0^\pi x(1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x$$
$$=-\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi+\left[\frac{x}{2}\sin 2x\right]_0^\pi-\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2x\,\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{2}.$$

17.（本题满分 11 分）

已知曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$，求曲线 C 距离 xOy 面最远的点和最近的点.

解. 点 (x,y,z) 到 xOy 面的距离为 $|z|$，故求 C 上距离 xOy 面的最远点和最近点的坐标，等价于求函数 $H=z^2$ 在条件 $x^2+y^2-2z^2=0$ 与 $x+y+3z=5$ 下的最大值点和最小值点. 令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=z^2+\lambda(x^2+y^2-2z^2)+\mu(x+y+3z-5),$$

则有

$$\begin{cases}L'_x=2\lambda x+\mu=0,\\L'_y=2\lambda y+\mu=0,\\L'_z=2z-4\lambda z+3\mu=0,\\x^2+y^2-2z^2=0,\\x+y+3z=5,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}x=-5\\y=-5\\z=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1\end{cases}$. 根据几何意义，曲线 C 上存在距离 xOy 面最远的点和最近的点，故所求点依次为 $(-5,-5,5)$ 和 $(1,1,1)$.

18.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 是连续函数.

(I) 利用定义证明函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$.

(II) 当 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数时,证明函数 $G(x)=2\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t-x\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ 也是以 2 为周期的周期函数.

解. (I) 对任意的 x，由于 f 是连续函数，所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_0^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi),$$

其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间. 由于 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(\xi)=f(x)$, 可知函数 $F(x)$ 在 x 处可导, 且 $F'(x)=f(x)$.

(II) 由于 f 是以 2 为周期的连续函数, 所以对任意的 x, 有

$$
\begin{aligned}
&G(x+2)-G(x)\\
=&2\int_0^{x+2} f(t)\mathrm{d}t-(x+2)\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t\\
=&2\left[\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t+\int_2^{x+2} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right]\\
=&2\left[-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(u+2)\mathrm{d}u\right]=2\int_0^x [f(t+2)-f(t)]\mathrm{d}t=0.
\end{aligned}
$$

即 $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数.

19. (本题满分 11 分)

$f(x)=1-x^2\,(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 展开成(以 2π 为周期的)余弦级数, 并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

解. 由余弦级数的系数公式, 求得

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x=2-\frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\cos nx\,\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{4}{n^2}\quad(n>1).$$

所以

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx\quad(0\leqslant x\leqslant\pi).$$

令 $x=0$, 有

$$f(0)=1-\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.$$

又 $f(0)=1$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

20. (本题满分 10 分)

设 α,β 是 3 维列向量, 矩阵 $A=\alpha\alpha^T+\beta\beta^T$, 其中 α^T 为 α 的转置, β^T 为 β 的转置. 证明:

(I) $r(A)\leqslant 2$; (II) 若 α,β 线性相关, 则 $r(A)<2$.

解. (I) 由矩阵的秩的不等式有

$$r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)\leqslant r(\alpha\alpha^T)+r(\beta\beta^T)\leqslant r(\alpha)+r(\beta)\leqslant 2.$$

(II) 由于 α,β 线性相关, 不妨设 $\alpha=k\beta$. 于是

$$r(A)=r(\alpha\alpha^T+\beta\beta^T)=r\left((1+k^2)\beta\beta^T\right)\leqslant r(\beta)\leqslant 1<2.$$

21.（本题满分 12 分）

设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{pmatrix}2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\quad b=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

(I) 求证 $|A|=(n+1)a^n$；

(II) a 为何值，方程组有唯一解，求 x_1；

(III) a 为何值，方程组有无穷多解，并求通解.

解. (I) 记 $D_n=|A|$，将其按第一列展开得 $D_n=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}$. 所以

$$\begin{aligned}D_n-aD_{n-1}&=aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=a(D_{n-1}-aD_{n-2})\\&=a^2(D_{n-2}-aD_{n-3})=\cdots=a^{n-2}(D_2-aD_1)=a^n.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}D_n=a^n+aD_{n-1}&=a^n+a(a^{n-1}+aD_{n-2})=2a^n++a^2D_{n-2}\\&=\cdots=(n-2)a^n+a^{n-2}D_2=(n-1)a^n+a^{n-1}D_1\\&=(n-1)a^n+a^{n-1}\cdot 2a=(n+1)a^n.\end{aligned}$$

(II) 因为方程组有唯一解，所以 $|A|\neq 0$，又 $|A|=(n+1)a^n$，故 $a\neq 0$. 由克莱姆法则，将 D_n 的第 1 列换成 b，所得行列式按第 1 列展开后等于 $D_{n-1}=na^{n-1}$，所以 $x_1=\dfrac{D_{n-1}}{D_n}=\dfrac{n}{(n+1)a}$.

(III) 方程组有无穷多解，由 $|A|=0$，有 $a=0$，则方程组为

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1\\ & & & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_{n-1}\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}.$$

此时方程组系数矩阵的秩和增广矩阵的秩均为 $n-1$，所以方程组有无穷多解，其通解为 $(0,1,0,\cdots,0)^T+k(1,0,0,\cdots,0)^T$，其中 k 为任意常数.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\{X=i\}=\frac{1}{3}(i=-1,0,1)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1 & 0\leqslant y\leqslant 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，记 $Z=X+Y$.

(I) 求 $P\left\{Z\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$； (II) 求 Z 的概率密度.

解. (I) 因为 X 与 Y 相互独立，$Z=X+Y$，所以

$$P\left(Z\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right)=P\left(X+Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right)=P\left(Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X=0\right)$$
$$=P\left(Y\leqslant\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{1}{2}}1\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

(II) 先求 Z 的分布函数得

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}&=P\{X+Y\leqslant z\}\\&=P\{X+Y\leqslant z,X=-1\}+P\{X+Y\leqslant z,X=0\}+P\{X+Y\leqslant z,X=1\}\\&=P\{Y\leqslant z+1,X=-1\}+P\{Y\leqslant z,X=0\}+P\{Y\leqslant z-1,X=1\}\\&=P\{Y\leqslant z+1\}P\{X=-1\}+P\{Y\leqslant z\}P\{X=0\}+P\{Y\leqslant z-1\}P\{X=1\}\\&=\frac{1}{3}[P\{Y\leqslant z+1\}+P\{Y\leqslant z\}+P\{Y\leqslant z-1\}]\\&=\frac{1}{3}[F_Y(z+1)+F_Y(z)+F_Y(z-1)].\end{aligned}$$

所以 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{3}\left[f_Y(z+1)+f_Y(z)+f_Y(z-1)\right]=\begin{cases}\frac{1}{3}, & -1\leqslant z<2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

23. (本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本. 记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\quad T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2.$$

(I) 证明 T 是 μ^2 的无偏估计量；(II) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，求 DT.

解. (I) 因为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $E\overline{X}=\mu,D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$，则

$$\begin{aligned}E(T)&=E\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=E\overline{X}^2-\frac{1}{n}E(S^2)\\&=D\overline{X}+(E\overline{X})^2-\frac{1}{n}E(S^2)=\frac{1}{n}\sigma^2+\mu^2-\frac{1}{n}\sigma^2=\mu^2,\end{aligned}$$

所以 T 是 μ^2 的无偏估计.

(II) 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，由于 $\overline{X}$ 和 S^2 独立，则有

$$\begin{aligned}D(T)&=D\left(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2\right)=D\overline{X}^2+\frac{1}{n^2}DS^2\\&=\frac{1}{n^2}D\left(\sqrt{n}\overline{X}\right)^2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}D\left[(n-1)S^2\right]\\&=\frac{1}{n^2}\cdot 2+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{(n-1)^2}\cdot 2(n-1)=\frac{2}{n(n-1)}.\end{aligned}$$

二〇〇九年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 当 $x\to 0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$ 是等价无穷小，则 $\cdot\cdot$ (　　)

(A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$.　(B) $a=1, b=\frac{1}{6}$.　(C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$.　(D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$.

解. 应选 (A). 当 $x\to 0$ 时，我们有

$$f(x)=x-\sin ax=x-\left(ax-\frac{1}{6}(ax)^3+o(x^3)\right)=(1-a)x+\frac{a^3}{6}x^3+o(x^3),$$

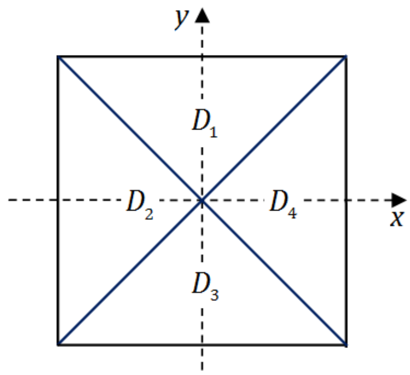
$$g(x)=x^2\ln(1-bx)\sim -bx^3.$$

由 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是 $x\to 0$ 时的等价无穷小量，可得

$$1-a=0,\quad \frac{a^3}{6}=-b.$$

解得 $a=1$，$b=-\frac{1}{6}$.

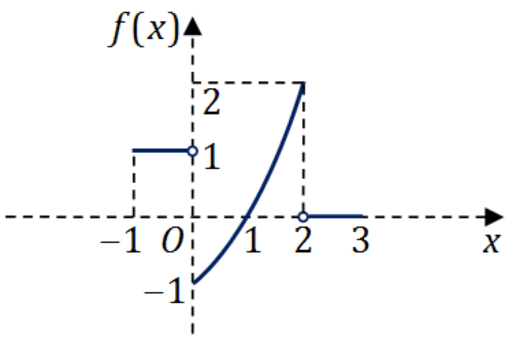
2. 如图,正方形 $\{(x,y)\,\big|\,|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$, $I_k=\iint_{D_k} y\cos x\,dx\,dy$，则 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 4}\{I_k\}=\cdots\cdots$ (　　)



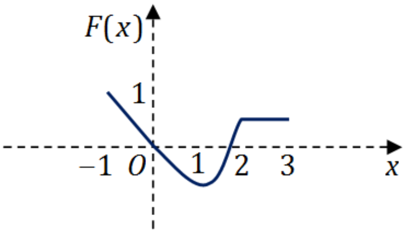
(A) I_1.　(B) I_2.　(C) I_3.　(D) I_4.

解. 应选 (A). D_2 和 D_4 关于 x 轴对称，被积函数是关于 y 的奇函数，所以 $I_2=I_4=0$. 又因为被积函数在 D_1 上大于等于零，在 D_3 上小于等于零，所以 $I_1>0$，$I_3<0$.

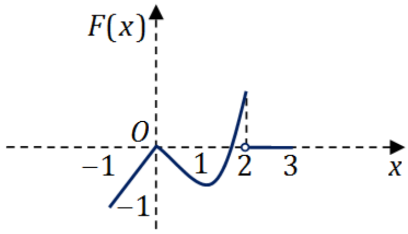
3. 设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



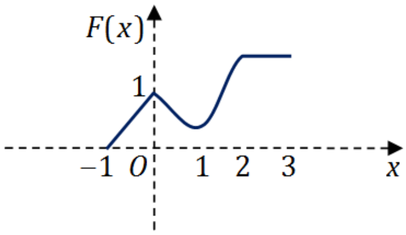
则函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 的图形为……………………………………( )



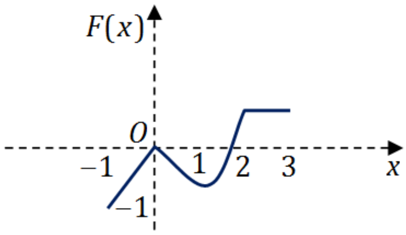
(A)



(B)



(C)



(D)

解. 应选 (D). 由 $y=f(x)$ 的图形，知 $f(x)$ 是只有两个间断点的有界函数，因而 $F(x)$ 在 $[-1,3]$ 上连续，故可排除 (B)；又在区间 $(-1,0)$ 内，有 $F(x)=x$，故可排除 (A) 和 (C)；因此只能选 (D).

4. 设有两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则……………………………( )

(A) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. (B) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散.

(C) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛. (D) 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 发散.

解. 应选 (C). 因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则 $\exists N_1$，使得 $n>N_1$ 时，有 $|a_n|<1$；又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n|$ 收敛，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}|b_n|=0$，则 $\exists N_2$，使得 $n>N_2$ 时，有 $|b_n|<1$. 从而当 $n>N_1+N_2$ 时，有 $a_n^2 b_n^2<|b_n|$，则由正项级数的比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$ 收敛.

5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量空间 R^3 的一组基，则由基 $\alpha_1, \frac{1}{2}\alpha_2, \frac{1}{3}\alpha_3$ 到基 $\alpha_1+\alpha_2$, $\alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 的过渡矩阵为……………………………………( )

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

解. 应选 (A)．根据过渡矩阵的定义，知过渡矩阵 M 满足

$$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)M=\left(\alpha_1,\frac{1}{2}\alpha_2,\frac{1}{3}\alpha_3\right)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}.$$

6. 设 A,B 均为 2 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 的伴随矩阵，若 $|A|=2,|B|=3$，则分块矩阵 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为……………………………………（　）

(A) $\begin{pmatrix}O&3B^*\\2A^*&O\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}O&3A^*\\2B^*&O\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}O&2A^*\\3B^*&O\end{pmatrix}$.

解. 应选 (B)．分块矩阵 $\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}$ 的行列式

$$\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}=(-1)^{2\times2}|A||B|=2\times3=6,$$

即分块矩阵可逆，且有

$$\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^*=\begin{vmatrix}O&A\\B&O\end{vmatrix}\begin{pmatrix}O&A\\B&O\end{pmatrix}^{-1}=6\begin{pmatrix}O&B^{-1}\\A^{-1}&O\end{pmatrix}$$

$$=6\begin{pmatrix}O&\frac{1}{|B|}B^*\\\frac{1}{|A|}A^*&O\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}O&\frac{1}{3}B^*\\\frac{1}{2}A^*&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}O&2B^*\\3A^*&O\end{pmatrix}.$$

7. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，则 $EX=$……………………………………（　）

(A) 0.　(B) 0.3.　(C) 0.7.　(D) 1.

解. 应选 (C)．对 $F(x)$ 求导可得 X 的概率密度函数

$$f(x)=0.3\phi(x)+\frac{0.7}{2}\phi\left(\frac{x-1}{2}\right).$$

由标准正态分布的概率密度函数 $\phi(x)$ 的性质，可得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(x)\mathrm{d}x=1,\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}x\phi(x)\mathrm{d}x=0.$$

从而 X 的数学期望为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\left[0.3\phi(x)+0.35\phi\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=0.3\int_{-\infty}^{+\infty}x\phi(x)\mathrm{d}x+0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\phi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=0.35\int_{-\infty}^{+\infty}x\phi\left(\frac{x-1}{2}\right)\mathrm{d}x=0.7\int_{-\infty}^{+\infty}(2u+1)\phi(u)\mathrm{d}u$$

$$=0.7\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(u)\,\mathrm{d}u=0.7.$$

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$. 记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数，则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

解. 应选 (B). 由于 X,Y 相互独立，所以

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{XY\leqslant z\}\\&=P\{XY\leqslant z|Y=0\}P\{Y=0\}+P\{XY\leqslant z|Y=1\}P\{Y=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{XY\leqslant z|Y=0\}+\frac{1}{2}P\{XY\leqslant z|Y=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{0\leqslant z|Y=0\}+\frac{1}{2}P\{X\leqslant z|Y=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{0\leqslant z\}+\frac{1}{2}P\{X\leqslant z\}.\end{aligned}$$

从而当 $z<0$ 时 $F_Z(z)=\frac{1}{2}\Phi(z)$，当 $z\geqslant 0$ 时 $F_Z(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(z)$. 因此 $z=0$ 为唯一的间断点.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，$z=f(x,xy)$，则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________.

解. 应填 $xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}$. 因为 $\frac{\partial z}{\partial x}=f'_1+f'_2\cdot y$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=xf''_{12}+f'_2+yx\cdot f''_{22}=xf''_{12}+f'_2+xyf''_{22}.$$

10. 若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x$, 则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y=$ ________.

解. 应填 $x(1-\mathrm{e}^x)+2$. 由齐次方程的通解形式可知 $\lambda=1$ 是特征方程的二重特征根，于是 $a=-2, b=1$. 设非齐次微分方程为 $y''-2y'+y=x$ 有特解 $y^*=Ax+B$，代入方程可得 $A=1, B=2$，于是非齐次微分方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^x+x+2.$$

把 $y(0)=2, y'(0)=0$ 代入通解，得 $C_1=0, C_2=-1$. 所以所求解为

$$y=-x\mathrm{e}^x+x+2=x(1-\mathrm{e}^x)+2.$$

11. 已知曲线 $L: y=x^2\left(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2}\right)$，则 $\int_L x\,\mathrm{d}s=$ ________.

解. 应填 $\frac{13}{6}$. 由第一类曲线积分公式可得

$$\int_L x\,\mathrm{d}s=\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}\left(1+4x^2\right)$$
$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left[\sqrt{(1+4x^2)^3}\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}.$$

12. 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\}$，则 $\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$ ________.

解. 应填 $\frac{4}{15}\pi$. 由轮换对称性可知

$$\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_\Omega x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint_\Omega y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

所以

$$\iiint_\Omega z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\iiint_\Omega\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^\pi \mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^4\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3}\int_0^\pi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r$$
$$=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\int_0^\pi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4}{15}\pi.$$

13. 若 3 维列向量 α,β 满足 $\alpha^T\beta=2$，其中 α^T 为 α 的转置，则矩阵 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为 ________.

解. 应填 2. 因为 $\alpha^T\beta=2$，所以 $\beta\alpha^T\beta=\beta(\alpha^T\beta)=2\beta$；又由于 $\beta\neq 0$，所以 $\beta\alpha^T$ 的非零特征值为 2.

14. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差. 若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，则 $k=$ ________.

解. 应填 -1. 由于 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量，所以

$$np^2=E(\overline{X}+kS^2)=E(\overline{X})+E(kS^2)=np+knp(1-p),$$

解得 $k=-1$.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 9 分）

求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

解. 求两个偏导数并令它们等于零，得到

$$\begin{cases} f_x'(x,y)=2x(2+y^2)=0,\\ f_y'(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0.\end{cases}$$

由此解得唯一驻点 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$. 由于

$$A=f''_{xx}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=2\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right),\quad B=f''_{xy}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0,\quad C=f''_{yy}\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\mathrm{e},$$

所以 $B^2-AC=-2\mathrm{e}\left(2+\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)<0$, 且 $A>0$. 从而 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点, 极小值为 $f\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

16. (本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ ($n=1,2,\cdots$) 所围成区域的面积, 记 $S_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, $S_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$, 求 S_1 与 S_2 的值.

解. 曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}$ 的交点为 $(0,0)$ 和 $(1,1)$, 所围区域的面积

$$a_n=\int_0^1\left(x^n-x^{n+1}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}.$$

由此可得

$$S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2},$$

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}.$$

考查幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$, 知其收敛域为 $(-1,1]$, 和函数为 $-\ln(1+x)$. 因为

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=x-\ln(1+x),$$

令 $x=1$, 得

$$S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=S(1)=1-\ln 2.$$

17. (本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成, 圆锥面 S_2 是由过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(I) 求 S_1 及 S_2 的方程; (II) 求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

解. (I) 椭球面 S_1 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2+z^2}{3}=1$. 设切点为 (x_0,y_0), 则 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 在 (x_0,y_0) 处的切线方程为 $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$. 将 $x=4,y=0$ 代入切线方程得 $x_0=1$, 从而 $y_0=\pm\frac{3}{2}$.所以切线方程为 $\frac{x}{4}\pm\frac{y}{2}=1$,从而圆锥面 S_2 的方程为 $\left(\frac{x}{4}-1\right)^2=\frac{y^2+z^2}{4}$, 即 $(x-4)^2-4y^2-4z^2=0$.

(II) S_1 与 S_2 之间的体积等于一个底面半径为 $\frac{3}{2}$、高为 3 的锥体体积 $\frac{9}{4}\pi$ 与部分椭球体体积 V 之差, 其中 $V=\frac{3\pi}{4}\int_1^2(4-x^2)\,\mathrm{d}x=\frac{5}{4}\pi$. 故所求体积为 $\frac{9}{4}\pi-\frac{5}{4}\pi=\pi$.

18. (本题满分 11 分)

(I) 证明拉格朗日中值定理: 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 可导, 则存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(II) 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导, 且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$, 则 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$.

解. (I) 取 $F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, 由题意知 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导, 且

$$F(a)=f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=f(a),$$
$$F(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a).$$

根据罗尔定理, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

即 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(II) 对于任意的 $t\in(0,\delta)$, 函数 $f(x)$ 在 $[0,t]$ 上连续, 在 $(0,t)$ 内可导, 由右导数定义及拉格朗日中值定理

$$f'_+(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{f'(\xi)t}{t}=\lim_{t\to0^+}f'(\xi),$$

其中 $\xi\in(0,t)$. 由于 $\lim\limits_{t\to0^+}f'(t)=A$, 且当 $t\to0^+$ 时, $\xi\to0^+$, 所以 $\lim\limits_{t\to0^+}f'(\xi)=A$, 故 $f'_+(0)$ 存在, 且 $f'_+(0)=A$.

19. (本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$, 其中 Σ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

解. 取 $\Sigma_1:x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧, Ω 为 Σ 与 Σ_1 之间的部分.

$$\begin{aligned}I&=\oiint_\Sigma\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\\&=\oiint_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\oiint_{\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

根据高斯公式

$$\oiint_{\Sigma-\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iiint_\Omega0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=0,$$

$$\oiint_{\Sigma_1}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\oiint_{\Sigma_1}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=4\pi.$$

所以 $I=4\pi$.

20. (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&1\\0&-4&-2\end{pmatrix}$, $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$.

(I) 求满足 $A\xi_2=\xi_1, A^2\xi_3=\xi_1$ 的所有向量 ξ_2,ξ_3;

(II) 对 (I) 中的任意向量 ξ_2,ξ_3, 证明 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

解. (I) 对矩阵 $(A\vdots\xi_1)$ 施以初等行变换

$$(A\vdots\xi_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1\\0&-4&-2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

可求得 $\xi_2=\left(-\frac{1}{2}+\frac{k}{2},\frac{1}{2}-\frac{k}{2},k\right)^T$, 其中 k 为任意常数. 又 $A^2=\begin{pmatrix}2&2&0\\-2&-2&0\\4&4&0\end{pmatrix}$,

对矩阵 $(A^2\vdots\xi_1)$ 施以初等行变换

$$(A^2\vdots\xi_1)=\left(\begin{array}{ccc:c}2&2&0&-1\\-2&-2&0&1\\4&4&0&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

可求得 $\xi_3=\left(-\frac{1}{2}-a,a,b\right)^T$, 其中 a,b 为任意常数.

(II) 由 (I) 知

$$|\xi_1,\xi_2,\xi_3|=\begin{vmatrix}-1&-\frac{1}{2}+\frac{k}{2}&-\frac{1}{2}-a\\1&\frac{1}{2}-\frac{k}{2}&a\\-2&k&b\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0,$$

所以 ξ_1,ξ_2,ξ_3 线性无关.

21. (本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+ax_2^2+(a-1)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(I) 求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(II) 若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，求 a 的值.

解. (I) 二次型 f 的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 \\ 1 & -1 & a-1 \end{pmatrix}$，由于

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-a & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-a+1 \end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-(a+1))(\lambda-(a-2)),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1=a,\lambda_2=a+1,\lambda_3=a-2$.

(II) 由于 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$，所以 A 的特征值有 2 个为正数，1 个为零．又 $a-2<a<a+1$，所以 $a=2$.

22. (本题满分 11 分)

袋中有 1 个红球，2 个黑球与 3 个白球．现有放回地从袋中取两次，每次取一个球，以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(I) 求 $P\{X=1|Z=0\}$； (II) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布.

解. (I) $P\{X=1|Z=0\}=\dfrac{P\{X=1,Z=0\}}{P\{Z=0\}}=\dfrac{C_2^1\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{9}$.

(II) 由题意知 X 与 Y 的所有可能取值均为 0,1,2.

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{C_3^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{4},\qquad P\{X=0,Y=1\}=\frac{C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{C_2^1\cdot C_3^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{6},\qquad P\{X=1,Y=1\}=\frac{C_2^1\cdot C_2^1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{9},$$

$$P\{X=1,Y=2\}=0,$$

$$P\{X=2,Y=0\}=\frac{1}{C_6^1\cdot C_6^1}=\frac{1}{36},\qquad P\{X=2,Y=1\}=0,$$

$$P\{X=2,Y=2\}=0.$$

故 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1	2
0	1/4	1/3	1/9
1	1/6	1/9	0
2	1/36	0	0

.

23. (本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 x\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$ 其中参数 $\lambda\ (\lambda>0)$ 未知，X_1, $X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求参数 λ 的矩估计量； (II) 求参数 λ 的最大似然估计量.

解. (I) 总体 X 的数学期望为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\lambda^2x^2\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\lambda}.$$

令 $\overline{X}=EX$，即 $\overline{X}=\frac{2}{\lambda}$，得 λ 的矩估计量为 $\widehat{\lambda}_1=\frac{2}{\overline{X}}$.

(II) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n(x_i>0,i=1,2,\cdots,n)$ 为样本观测值，则似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\lambda)=\lambda^{2n}\cdot\mathrm{e}^{-\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}\prod_{i=1}^{n}x_i,$$

$$\ln L=2n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

由 $\frac{\mathrm{d}\ln L}{\mathrm{d}\lambda}=\frac{2n}{\lambda}-\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$，得 λ 的最大似然估计量为 $\widehat{\lambda}_2=\frac{2}{\overline{X}}$.

二〇一〇年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$ ······························ (　)

(A) 1.　　(B) e.　　(C) e^{a-b}.　　(D) e^{b-a}.

解. 应选 (C). 由等价无穷小量代换可得

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\cdot\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right)$$
$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\ln\left[1+\frac{x^2-(x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)}\right]\right)=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\frac{x^2-(x-a)(x+b)}{(x-a)(x+b)}\right)$$
$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x^2+abx}{(x-a)(x+b)}\right)=e^{a-b}.$$

2. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F\left(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x}\right)=0$ 确定，其中 F 为可微函数，且 $F_2'\neq 0$，则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ······························ (　)

(A) x.　　(B) z.　　(C) $-x$.　　(D) $-z$.

解. 应选 (B). 因为

$$F_x'=-\frac{y}{x^2}F_1'-\frac{z}{x^2}F_2',\qquad F_y'=\frac{1}{x}F_1',\qquad F_z'=\frac{1}{x}F_2',$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=\frac{yF_1'+zF_2'}{xF_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{F_1'}{F_2'}\quad\Rightarrow\quad x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z.$$

3. 设 m,n 是正整数，则反常积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,dx$ 的收敛性 ······ (　)

(A) 仅与 m 的取值有关.　　(B) 仅与 n 的取值有关.

(C) 与 m,n 取值都有关.　　(D) 与 m,n 取值都无关.

解. 应选 (D). 因为 $x=0$ 与 $x=1$ 都是瑕点，所以应分成两部分:

$$I=\int_0^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,dx=\int_0^{\frac12}\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,dx+\int_{\frac12}^1\frac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\,dx=I_1+I_2.$$

当 $x\to0^+$ 时，$\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}\sim\dfrac{1}{x^{\frac1n-\frac2m}}$，而且 $\dfrac1n-\dfrac2m<1$，由比较判别法知 I_1 收敛. 又因为 $\lim\limits_{x\to1^-}\sqrt{1-x}\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}=0$，而且 $\displaystyle\int_{\frac12}^1\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ 收敛，由比较判别法知 I_2 收敛. 综上所述，不管 m,n 取何值，I 都是收敛的.

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$ ······································· (　　)

(A) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.　　(B) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$.　　(D) $\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 \dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$.

解. 应选 (D). 由定积分的定义及二重积分与二次积分的关系可得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\dfrac{i}{n}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\dfrac{j}{n}\right)^2}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\cdot\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.$$

5. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，E 为 m 阶单位矩阵，若 $AB=E$，则 (　　)

(A) 秩 $r(A)=m$，秩 $r(B)=m$.　　(B) 秩 $r(A)=m$，秩 $r(B)=n$.

(C) 秩 $r(A)=n$，秩 $r(B)=m$.　　(D) 秩 $r(A)=n$，秩 $r(B)=n$.

解. 应选 (A). 由于 $AB=E$，故 $r(AB)=r(E)=m$. 故有

$$r(A)\geqslant r(AB)=m,\quad r(B)\geqslant r(AB)=m.$$

由于 A 为 $m\times n$ 矩阵，B 为 $n\times m$ 矩阵，故 $r(A)\leqslant m$，$r(B)\leqslant m$. 从而可得 $r(A)=m$，$r(B)=m$.

6. 设 A 为 4 阶实对称矩阵，且 $A^2+A=O$，若 A 的秩为 3，则 A 相似于 ····· (　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$.

解. 应选 (D). 设 λ 为 A 的特征值，由于 $A^2+A=O$，所以 $\lambda^2+\lambda=0$，即 A 的特征值只能为 -1 或 0. 又 $r(A)=3$，因此选 (D).

7. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1\end{cases}$，则 $P\{X=1\}=$ ···· (　　)

(A) 0.　　(B) $\dfrac{1}{2}$.　　(C) $\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$.　　(D) $1-\mathrm{e}^{-1}$.

解. 应选 (C). 这是因为

$$P\{X=1\}=P\{X\leqslant 1\}-P\{X<1\}=F(1)-F\left(1^-\right)=1-\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}.$$

8. 设 $f_1(x)$ 为标准正态分布的概率密度，$f_2(x)$ 为 $[-1,3]$ 上均匀分布的概率密度，若 $f(x)=\begin{cases} af_1(x), & x\leqslant 0 \\ bf_2(x), & x>0 \end{cases}$ $(a>0,b>0)$ 为概率密度，则 a,b 应满足 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) $2a+3b=4$. (B) $3a+2b=4$. (C) $a+b=1$. (D) $a+b=2$.

解. 应选 (A). 由概率密度的性质，可得

$$\begin{aligned}1&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}af_1(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}bf_2(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{a}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\,\mathrm{d}x+b\int_0^3\frac{1}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+\frac{3}{4}b.\end{aligned}$$

整理得 $2a+3b=4$.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 设 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{-t}, \\ y=\displaystyle\int_0^t \ln\left(1+u^2\right)\mathrm{d}u, \end{cases}$ 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=$ ________.

解. 应填 0. 由参数方程的导数公式可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\ln\left(1+t^2\right)}{-\mathrm{e}^{-t}}=-\ln\left(1+t^2\right)\mathrm{e}^t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(-\ln\left(1+t^2\right)\mathrm{e}^t\right)}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\left[-\frac{2t}{1+t^2}\cdot\mathrm{e}^t-\ln\left(1+t^2\right)\mathrm{e}^t\right]\cdot\left(-\mathrm{e}^t\right).$$

所以 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}=0$.

10. $\displaystyle\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=$ ________.

解. 应填 -4π. 令 $\sqrt{x}=t$，并利用分部积分法，可得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\pi}t\cos t\cdot 2t\,\mathrm{d}t=\int_0^{\pi}2t^2\cos t\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\pi}t^2\,\mathrm{d}(\sin t)\\&=2\left[\left[t^2\sin t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}2t\sin t\,\mathrm{d}t\right]=4\int_0^{\pi}t\,\mathrm{d}(\cos t)\\&=4\left[[t\cos t]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos t\,\mathrm{d}t\right]=4\pi\cos\pi-4[\sin t]_0^{\pi}=-4\pi.\end{aligned}$$

11. 已知曲线 L 的方程为 $y=1-|x|$ （$x\in[-1,1]$），起点是 $(-1,0)$，终点是 $(1,0)$，则曲线积分 $\displaystyle\int_L xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=$ ________.

解. 应填 0．记 $L_1: y=1+x$，起点为 $(-1,0)$，终点为 $(0,1)$；$L_2: y=1-x$，起点是 $(0,1)$，终点是 $(1,0)$．则有

$$\begin{aligned}
I&=\int_L xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y=\int_{L_1} xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y+\int_{L_2} xy\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{-1}^{0} x(1+x)\,\mathrm{d}x+x^2\,\mathrm{d}x+\int_0^1 x(1-x)\,\mathrm{d}x+x^2(-\mathrm{d}x)\\
&=\int_{-1}^{0}\left(2x^2+x\right)\mathrm{d}x+\int_0^1\left(x-2x^2\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}\right]_0^1\\
&=-\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)=0.
\end{aligned}$$

12. 设 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\right\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\overline{z}=$________．

解. 应填 $\frac{2}{3}$．用柱面坐标来计算：

$$\overline{z}=\frac{\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 z\,\mathrm{d}z}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_{r^2}^1 \mathrm{d}z}=\frac{2\pi\int_0^1 r\left(\frac{1}{2}-\frac{r^4}{2}\right)\mathrm{d}r}{2\pi\int_0^1(1-r^2)\,r\,\mathrm{d}r}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}.$$

13. 设 $\alpha_1=(1,2,-1,0)^T,\alpha_2=(1,1,0,2)^T,\alpha_3=(2,1,1,a)^T$，若由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间的维数是 2，则 $a=$________．

解. 应填 $a=6$．由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 生成的向量空间维数为 2，故有 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2$．对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 作初等行变换得

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\-1&0&1\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&-3\\0&1&3\\0&2&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&3\\0&0&a-6\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以 $a=6$.

14. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\frac{C}{k!},k=0,1,2,\cdots$，则 $E\left(X^2\right)=$________．

解. 应填 2．由离散型随机变量的性质得

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C}{k!}=C\mathrm{e}\quad\Rightarrow\quad C=\mathrm{e}^{-1}.$$

故 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $E(X)=1,D(X)=1$．由方差的计算公式有

$$E\left(X^2\right)=D(X)+[E(X)]^2=1+1^2=2.$$

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

解. 因为对应齐次方程的特征方程有特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$，所以对应齐次方程的通解为 $Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. 设原方程的一个特解为 $y^* = x(ax+b)e^x$，代入原方程，解得 $a = -1, b = -2$，故特解为 $y^* = x(-x-2)e^x$. 从而原方程的通解为

$$y = Y + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x(x+2)e^x.$$

16.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x) = \int_1^{x^2} \left(x^2 - t\right) e^{-t^2} dt$ 的单调区间与极值.

解. 对函数作变形．并求导得

$$f(x) = \int_1^{x^2} (x^2 - t) e^{-t^2} dt = x^2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt - \int_1^{x^2} t e^{-t^2} dt,$$

$$f'(x) = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 2x^3 e^{-x^4} - 2x^3 e^{-x^4} = 2x \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt.$$

令 $f'(x) = 0$，则 $x = 0, x = \pm 1$. 再求二阶导数得

$$f''(x) = 2 \int_1^{x^2} e^{-t^2} dt + 4x^2 e^{-x^4}.$$

因为 $f''(0) = 2 \int_1^0 e^{-t^2} dt < 0$，所以

$$f(0) = \int_1^0 (0 - t) e^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1})$$

是极大值. 而 $f''(\pm 1) = 4e^{-1} > 0$，所以 $f(\pm 1) = 0$ 为极小值. 又因为当 $x < -1$ 和 $0 \leqslant x < 1$ 时 $f'(x) < 0$，当 $-1 \leqslant x < 0$ 和 $x \geqslant 1$ 时 $f'(x) > 0$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$，$f(x)$ 的单调递增区间为 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

17.（本题满分 10 分）

(I) 比较 $\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n |\ln t| dt$（$n = 1, 2, \cdots$）的大小，说明理由；

(II) 记 $u_n = \int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt$（$n = 1, 2, \cdots$），求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

解. (I) 当 $0 < x < 1$ 时 $0 < \ln(1+x) < x$，所以 $|\ln t| [\ln(1+t)]^n < |\ln t| t^n$，从而

$$\int_0^1 |\ln t| [\ln(1+t)]^n dt < \int_0^1 |\ln t| t^n dt \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

(II) 由分部积分法可得

$$\int_0^1 |\ln t| t^n dt = -\int_0^1 \ln t \cdot t^n dt = -\frac{1}{n+1} \int_0^1 \ln t \, d\left(t^{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

故由 $0 < u_n < \int_0^1 |\ln t| t^n dt = \frac{1}{(n+1)^2}$ 及根据夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

18.（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解. 设 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，令

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n-1)x^2}{2n+1}\right|=x^2<1,$$

得幂级数的收敛区间为 $(-1,1)$. 当 $x=\pm1$ 时，由莱布尼兹判别法知级数收敛，故幂级数的收敛域为 $[-1,1]$. 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\cdot x^{2n-1},\quad x\in[-1,1].$$

则有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot x^{2n-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-x^2\right)^{n-1}=\frac{1}{1+x^2}\quad x\in(-1,1).$$

从而有

$$S(x)=S(0)+\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan x,\quad x\in(-1,1).$$

由和函数的连续性知 $S(x)$ 在收敛域 $[-1,1]$ 上是连续的，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x)=x\cdot\arctan x,\quad x\in[-1,1].$$

19.（本题满分 10 分）

设 P 为椭球面 $S:x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若 S 在点 P 处的切平面与 xOy 面垂直，求点 P 的轨迹 C，并计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\,dS$，其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

解. (I) 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-yz-1$，故动点 $P(x,y,z)$ 的切平面的法向量为 $(2x,2y-z,2z-y)$. 由切平面垂直 xOy，得所求曲线 C 的方程为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2-yz=1,\\ 2z-y=0.\end{cases}$$

(II) 由曲线 C 的方程可得它在 xOy 平面上的投影区域为

$$D:\left\{(x,y)|x^2+\frac{3}{4}y^2\leqslant 1\right\}.$$

由 $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 可求得

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}\,dx\,dy.$$

故所求的积分为

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}\,dS=\iint_D\left(x+\sqrt{3}\right)dx\,dy\\&=\iint_D x\,dx\,dy+\iint_D\sqrt{3}\,dx\,dy=0+\iint_D\sqrt{3}\,dx\,dy=\sqrt{3}\pi\cdot1\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}=2\pi.\end{aligned}$$

20.（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=b$ 存在两个不同的解.

(I) 求 λ, a； (II) 求方程组 $Ax=b$ 的通解.

解. (I) 已知 $Ax=b$ 有两个不同的解，故 $r(A)=r(A,b)<3$，因此 $|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0.$$

解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$. 当 $\lambda=1$ 时，$r(A)=1\neq r(A,b)=2$，此时 $Ax=b$ 无解. 因此 $\lambda=-1$. 对 (A,b) 作初等行变换得

$$(A,b)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & a\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & a-2\end{pmatrix}.$$

由 $r(A)=r(A,b)$，可得 $a=-2$.

(II) 已知 $a=-2$，对增广矩阵作初等行变换得

$$(A,b)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & \frac{3}{2}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因此 $Ax=b$ 的通解为 $x=k(1,0,1)^T+\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2},0\right)^T$，其中 k 为任意常数.

21. (本题满分 11 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，且 Q 的第 3 列为 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

(I) 求矩阵 A； (II) 证明 $A+E$ 为正定矩阵，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

解. (I) 由于二次型在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=0$. 由于 Q 的第 3 列为 $\alpha_3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$，所以它就是 A 对应于 $\lambda_3=0$ 的特征向量. 由于 A 是实对称矩阵，所以对应于不同特征值的特征向量相互正交. 设属于 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$，则 $\alpha^T\alpha_3=0$，即 $x_1+x_3=0$. 求得该方程组的单位化的基础解系为 $\alpha_1=(0,1,0)^T$，

$\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T$．取

$$Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{2}\\1&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix},$$

则有

$$Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&0\end{pmatrix},\quad Q^{-1}=Q^T\quad\Rightarrow\quad A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}\\0&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

(II) $A+E$ 也是实对称矩阵，A 的特征值为 $1,1,0$，所以 $A+E$ 的特征值为 $2,2,1$．由于 $A+E$ 的特征值全大于零，故 $A+E$ 是正定矩阵.

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2},\quad -\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty.$$

求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

解. X 的边缘概率密度为

$$\begin{aligned}f_X(x)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f\left(x,y\right)\mathrm{d}y=A\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}\,\mathrm{d}y\\&=A\mathrm{e}^{-x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(y-x)^2}\,\mathrm{d}y=A\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-x^2},\quad -\infty<x<+\infty.\end{aligned}$$

根据概率密度性质有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\mathrm{d}x=A\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=A\pi\quad\Rightarrow\quad A=\pi^{-1}.$$

故 $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2},-\infty<x<+\infty$．当 $-\infty<x<+\infty$ 时，有条件概率密度

$$f_{Y|X}\left(y\,|x\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_X(x)}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2xy-y^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-(x-y)^2},\quad -\infty<y<+\infty.$$

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中参数 $\theta\in(0,1)$ 未知，以 N_i 表示来自总体 X 的简单随机样本（样本容量为 n）中等于 i 的个数（$i=1,2,3$）．试求常数 a_1,a_2,a_3，使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量，并求 T 的方差.

解. 由题设有 $N_1 \sim B(n, 1-\theta)$，$N_2 \sim B\left(n, \theta-\theta^2\right)$，$N_3 \sim B\left(n, \theta^2\right)$. 故有

$$
\begin{aligned}
E(T) &= E\left(\sum_{i=1}^{3} a_i N_i\right) = a_1 E(N_1) + a_2 E(N_2) + a_3 E(N_3) \\
&= a_1 n(1-\theta) + a_2 n\left(\theta-\theta^2\right) + a_3 n\theta^2 = n a_1 + n(a_2 - a_1)\theta + n(a_3 - a_2)\theta^2.
\end{aligned}
$$

因为 T 是 θ 的无偏估计量，所以 $E(T)=\theta$，由此解得 $a_1 = 0, a_2 = \frac{1}{n}, a_3 = \frac{1}{n}$. 所以统计量

$$
T = 0 \cdot N_1 + \frac{1}{n} \cdot N_2 + \frac{1}{n} \cdot N_3 = \frac{1}{n}(N_2 + N_3) = \frac{1}{n}(n - N_1).
$$

因为 $N_1 \sim B(n, 1-\theta)$，所以

$$
D(T) = D\left[\frac{1}{n}(n - N_1)\right] = \frac{1}{n^2} D(N_1) = \frac{1}{n}\theta(1-\theta).
$$

二〇一一年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的拐点是…………………………( )

(A) $(1,0)$. (B) $(2,0)$. (C) $(3,0)$. (D) $(4,0)$.

解. 应选 (C). 令 $g(x)=(x-1)(x-2)^2(x-4)^4$，则 $y=(x-3)^3g(x)$，且有

$$y'(3)=y''(3)=0,\quad y'''(3)=6g(3)\neq 0.$$

因此 $(3,0)$ 是曲线的拐点.

2. 设数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\ (n=1,2,\cdots)$ 无界，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域为…………………………( )

(A) $(-1,1]$. (B) $[-1,1)$. (C) $[0,2)$. (D) $(0,2]$.

解. 应选 (C). 由题设知 $a_n\geqslant 0$. 当 $x=2$ 时，由 S_n 无界知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，故幂级数在 $x=2$ 处发散. 当 $x=0$ 时，由莱布尼茨判别法知交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^na_n$ 收敛，故幂级数在 $x=0$ 处收敛.

3. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(x)>0$，$f'(0)=0$，则函数 $z=f(x)\ln f(y)$ 在点 $(0,0)$ 处取得极小值的一个充分条件是…………………………( )

(A) $f(0)>1$，$f''(0)>0$. (B) $f(0)>1$，$f''(0)<0$.

(C) $f(0)<1$，$f''(0)>0$. (D) $f(0)<1$，$f''(0)<0$.

解. 应选 (A). 首先求偏导数得

$$z'_x=f'(x)\cdot\ln f(y),\quad z'_y=f(x)\cdot\frac{f'(y)}{f(y)}.$$

因此 $(0,0)$ 是函数的驻点. 再求二阶偏导数得

$$A=z''_{xx}=f''(x)\cdot\ln f(y),$$

$$B=z''_{xy}=f'(x)\cdot\frac{f'(y)}{f(y)},$$

$$C=z''_{yy}=f(x)\cdot\frac{f''(y)f(y)-[f'(y)]^2}{f^2(y)}.$$

当 $f(0)>1$ 且 $f''(0)>0$ 时，在 $(0,0)$ 点有

$$A=f''(0)\cdot\ln f(0)>0,\quad \Delta=AC-B^2=[f''(0)]^2\cdot\ln f(0)>0,$$

故函数在点 $(0,0)$ 处取得极小值.

4. 设 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$，$J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot x\,\mathrm{d}x$，$K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$，则 I, J, K 的大小关系是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $I<J<K$. (B) $I<K<J$. (C) $J<I<K$. (D) $K<J<I$.

解. 应选 (B)．因为 $0<x<\frac{\pi}{4}$ 时，$0<\sin x<\cos x<1<\cot x$，又因为 $\ln x$ 单调递增，所以 $\ln\sin x<\ln\cos x<\ln\cot x$．从而由定积分的保号性可得 $I<K<J$.

5. 设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 列加到第 1 列得矩阵 B，再交换 B 的第 2 行与第 3 行得单位矩阵，记 $P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则 $A=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) P_1P_2. (B) $P_1^{-1}P_2$. (C) P_2P_1. (D) $P_2P_1^{-1}$.

解. 应选 (D)．由初等变换与初等矩阵的关系得

$$A\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=AP_1=B,\qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}B=P_2B=E.$$

因此 $P_2AP_1=E$，从而 $A=P_2^{-1}P_1^{-1}=P_2P_1^{-1}$.

6. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 是 4 阶矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，若 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，则 $A^*x=0$ 的基础解系可为$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) α_1,α_3. (B) α_1,α_2. (C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. (D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

解. 应选 (D). 由于 $(1,0,1,0)^T$ 是方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系, 所以 $A(1,0,1,0)^T=0$，且 $r(A)=4-1=3$，即 $\alpha_1+\alpha_3=0$，且 $|A|=0$．由此可得 $A^*A=|A|E=O$，即 $A^*(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=O$，这说明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $A^*x=0$ 的解．由于 $r(A)=3$，$\alpha_1+\alpha_3=0$，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关．又由于 $r(A)=3$，所以 $r(A^*)=1$，因此 $A^*x=0$ 的基础解系中含有 $4-1=3$ 个线性无关的解向量．而 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，且为 $A^*x=0$ 的解，所以 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 可作为 $A^*x=0$ 的基础解系.

7. 设 $F_1(x)$，$F_2(x)$ 为两个分布函数，其相应的概率密度 $f_1(x)$，$f_2(x)$ 是连续函数，则必为概率密度的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $f_1(x)f_2(x)$. (B) $2f_2(x)F_1(x)$.

(C) $f_1(x)F_2(x)$. (D) $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$.

解. 应选 (D)．因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)\right]\mathrm{d}x=\left[F_1(x)F_2(x)\right]_{-\infty}^{+\infty}=1,$$

所以 $f_1F_2(x)+f_2F_1(x)$ 为概率密度.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 $E(X)$ 与 $E(Y)$ 存在，记 $U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，则 $E(UV)=$ $\cdots\cdots$ ( )

(A) $E(U)\cdot E(V)$. (B) $E(X)\cdot E(Y)$. (C) $E(U)\cdot E(Y)$. (D) $E(X)\cdot E(V)$.

解. 应选 (B)．因为 $UV=XY$，且 X 与 Y 相互独立，所以

$$E(UV)=E(XY)=E(X)E(Y).$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 曲线 $y=\int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t$（$0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$）的弧长 $s=$ ________.

解. 应填 $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$．由弧长公式得

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\left(y'\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,\mathrm{d}x=[\ln|\sec x+\tan x|]_0^{\frac{\pi}{4}}=\ln(1+\sqrt{2}).$$

10. 微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$ ________.

解. 应填 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$．由通解公式得

$$y=\mathrm{e}^{-\int\mathrm{d}x}\left(\int\mathrm{e}^{-x}\cos x\cdot\mathrm{e}^{\int\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int\cos x\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}(\sin x+C).$$

由初始条件 $y(0)=0$ 得 $C=0$．所以 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$.

11. 设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$，则 $\left.\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ________.

解. 应填 4．依次求导得

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\sin xy}{1+(xy)^2}\cdot y,\quad \frac{\partial^2F}{\partial x^2}=y\cdot\frac{y\cos xy-\sin xy\cdot 2xy^2}{[1+(xy)^2]^2}.$$

故有 $\left.\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right|_{(0,2)}=4$.

12. 设 L 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L xz\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}z=$ ________.

解. 应填 π．设 $\Sigma: x+y-z=0, x^2+y^2\leqslant1$，取上侧，则由斯托克斯公式得

$$\oint_L xz\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y+\frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}z=\iint_\Sigma y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

由转换投影法得

$$\iint_\Sigma y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant1}[y\cdot(-1)+x(-1)+1]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{x^2+y^2\leqslant1}(-x-y+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{x^2+y^2\leqslant1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi.$$

13. 若二次曲面的方程为 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$，经过正交变换化为 $y_1^2+4z_1^2=4$，则 $a=$________.

解. 应填 $a=1$. 依题意，二次型 $f=x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz$ 经过正交变换后化为 $f=y_1^2+4z_1^2$，所以二次型对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&3&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ 的特征值为 $0,1,4$.

故由 $|A|=\prod_{i=1}^{3}\lambda_i=0$，解得 $a=1$.

14. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N\left(\mu,\mu;\sigma^2,\sigma^2;0\right)$，则 $E\left(XY^2\right)=$________.

解. 应填 $\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right)$. 因为 $\rho_{xy}=0$，所以随机变量 X,Y 独立，从而有

$$E\left(XY^2\right)=E(X)E\left(Y^2\right)=E(X)\left[D(Y)+E^2(Y)\right]=\mu\left(\mu^2+\sigma^2\right).$$

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解. 由等价无穷小量代换和泰勒公式可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}&=\exp\left(\lim_{x\to0}\left(\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right)\frac{1}{e^x-1}\right)=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\right)\\&=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-x}{x^2}\right)=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}\right)=e^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

16.（本题满分 9 分）

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

解. 令 $u=xy,v=yg(x)$，则由复合函数的求导法则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(u,v)\cdot y+f_2'(u,v)\cdot yg'(x),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}=&f_1'(u,v)+y\left[f_{11}''(u,v)x+f_{12}''(u,v)g(x)\right]\\&+g'(x)\cdot f_2'(u,v)+yg'(x)\left[f_{12}''(u,v)\cdot x+f_{22}''(u,v)g(x)\right]\end{aligned}$$

因为 $g(x)$ 在 $x=1$ 可导且有极值 $g(1)=1$，所以 $g'(1)=0$，从而

$$\left.\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

17.（本题满分 10 分）

求方程 $k\arctan x-x=0$ 不同实根的个数，其中 k 为参数.

解. 令 $f(x)=k\arctan x-x$，则有

$$f(0)=0,\quad f'(x)=\frac{k-1-x^2}{1+x^2}.$$

当 $k-1\leqslant 0$ 即 $k\leqslant 1$ 时，$f'(x)<0$（$x\neq 0$），时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调减少，方程 $f(x)=0$ 只有一个实根 $x=0$. 当 $k-1>0$ 即 $k>1$ 时，在 $(0,\sqrt{k-1})$ 内 $f'(x)>0$，$f(x)$ 单调增加；在 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调减少. 所以 $f(\sqrt{k-1})$ 是 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内的最大值，从而 $f(\sqrt{k-1})>f(0)=0$. 又因为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{kx}{\arctan x}-1\right]=-\infty,$$

所以由零值定理知，在 $(\sqrt{k-1},+\infty)$ 内方程 $f(x)=0$ 有一个实根 x_0. 由于 $f(x)$ 是奇函数，所以当 $k>1$ 时方程有三个根 $-x_0,0,x_0$.

18.（本题满分 10 分）

(I) 证明：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立.

(II) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$（$n=1,2,\cdots$），证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

解. (I) 对 $\ln(x)$ 在区间 $[n,n+1]$ 上应用拉格朗日中值定理，可得

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\ln(n+1)-\ln n=\frac{1}{\xi},\quad \xi\in(n,n+1).$$

当 $\xi\in[n,n+1]$ 时，$\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{\xi}<\dfrac{1}{n}$，所以 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$.

(II) 对于数列 $\{a_n\}$，首先有

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0,$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调递减；其次有

$$\begin{aligned}a_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)-\ln n\\&=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0,\end{aligned}$$

即数列 $\{a_n\}$ 有下界. 故由单调有界准则可知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

19.（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数，且

$$f(1,y)=0,\quad f(x,1)=0,\quad \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=a,$$

其中 $D=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分 $I=\iint_D xyf''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解. 因为 $f(x,1)=0$，所以 $f'_x(x,1)=0$. 从而有

$$
\begin{aligned}
I&=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 y f''_{xy}(x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 y\,\mathrm{d}(f'_x(x,y))\\
&=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\left[\left[y f'_x(x,y)\right]_{y=0}^{y=1}-\int_0^1 f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y\right]=-\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^1 f'_x(x,y)\,\mathrm{d}y\\
&=-\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 x f'_x(x,y)\,\mathrm{d}x=-\int_0^1 \mathrm{d}y\left[\left[x f(x,y)\right]_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\\
&=-\int_0^1 \mathrm{d}y\left[-\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=a.
\end{aligned}
$$

20.（本题满分 11 分）

设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T$, $\alpha_2=(0,1,1)^T$, $\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T$, $\beta_2=(1,2,3)^T$, $\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表示.

(I) 求 a 的值； (II) 将 β_1,β_2,β_3 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

解. (I) 由于 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq 0$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$. 由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不能由 β_1,β_2,β_3 线性表示，可得 $r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，从而 $|\beta_1,\beta_2,\beta_3|=0$，解得 $a=5$.

(II) 对 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 作初等行变换得

$$
(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1&3\\0&1&3&1&2&4\\1&1&5&1&3&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&2&1&5\\0&1&0&4&2&10\\0&0&1&-1&0&-2\end{pmatrix}.
$$

故 $\beta_1=2\alpha_1+4\alpha_2-\alpha_3$，$\beta_2=\alpha_1+2\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+10\alpha_2-2\alpha_3$.

21.（本题满分 11 分）

A 为三阶实对称矩阵，A 的秩 $r(A)=2$，且 $A\begin{pmatrix}1&1\\0&0\\-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求 A 的特征值与特征向量； (II) 求矩阵 A.

解. (I) 设 $\alpha_1=(1,0,-1)^T,\alpha_2=(1,0,1)^T$，则有

$$
A(\alpha_1,\alpha_2)=(-\alpha_1,\alpha_2)\quad\Rightarrow\quad A\alpha_1=-\alpha_1, A\alpha_2=\alpha_2.
$$

故 A 有特征值 $\lambda_1=-1,\lambda_2=1$,对应的特征向量分别为 $k_1\alpha_1(k_1\neq 0),k_2\alpha_2(k_2\neq 0)$. 由于 $r(A)=2$，故 $|A|=0$，所以 $\lambda_3=0$. 由于 A 是实对称矩阵，故不同特征值对应的特征向量相互正交，设 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，则有

$$
\begin{cases}\alpha_1^T\alpha_3=0,\\ \alpha_2^T\alpha_3=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1-x_3=0,\\ x_1+x_3=0.\end{cases}
$$

解此方程组，得 $\alpha_3=(0,1,0)^T$，故 $\lambda_3=0$ 对应的特征向量为 $k_3\alpha_3(k_3\neq 0)$.

(II) 令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}$，则 $A=P^{-1}\Lambda P$，从而

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$.

(I) 求二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(II) 求 $Z=XY$ 的概率分布；

(III) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}.

解. (I) 因为 $P\left\{X^2=Y^2\right\}=1$，所以 $P\left\{X^2\neq Y^2\right\}=0$. 即

$$P\{X=0,\ Y=-1\}=P\{X=0,\ Y=1\}=P\{X=1,\ Y=0\}=0.$$

由此求得 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0	$\frac{1}{3}$	0
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

(II) $Z=XY$ 的所有可能取值为 $-1,0,1$. 由 (X,Y) 的概率分布可得 $Z=XY$ 的概率分布为

Z	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(III) 因为 $E(XY)=E(Z)=0$，$E(Y)=0$. 所以

$$\mathrm{Cov}(XY)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=0,$$

从而 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=0$.

23.（本题满分 11 分）

设 $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ 为来自正态总体 $N(\mu_0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2>0$ 未知. $\overline{X}$ 和 S^2 分别表示样本均值和样本方差.

(I) 求参数 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$； (II) 计算 $E(\hat{\sigma}^2)$ 和 $D(\hat{\sigma}^2)$.

解. (Ⅰ) 设设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本观测值，则似然函数

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}.$$

取对数得

$$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}.$$

求导并令导数为零得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2(\sigma^2)^2}=0.$$

解得 $\sigma^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$. 故 σ^2 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$.

(Ⅱ) 令 $Y_i=X_i-\mu_0\sim N(0,\sigma^2)$，则 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Y_i^2$. 从而

$$E(\hat{\sigma}^2)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\right)=E(Y_i^2)=D(Y_i)+[E(Y_i)]^2=\sigma^2,$$

$$\begin{aligned}D(\hat{\sigma}^2)&=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_i^2\right)=\frac{1}{n^2}D(Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_n^2)=\frac{1}{n}D(Y_i^2)\\&=\frac{1}{n}\left\{E(Y_i^4)-[E(Y_i^2)]^2\right\}=\frac{1}{n}(3\sigma^4-\sigma^4)=\frac{2\sigma^4}{n}.\end{aligned}$$

二〇一二年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（　）

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

解. 应选 (C). $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直渐近线；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x^2-1}=1$，所以 $y=1$ 为水平渐近线；没有斜渐近线．总共有两条渐近线.

2. 设函数 $f(x)=(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=\cdots$（　）

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$.　　(B) $(-1)^n(n-1)!$.　　(C) $(-1)^{n-1}n!$.　　(D) $(-1)^n n!$.

解. 应选 (A)．可用导数的定义来计算或者用导数公式来计算．比如

$$f'(x)=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)+(\mathrm{e}^x-1)(2\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(\mathrm{e}^{nx}-n)$$

$$+\cdots+(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^{2x}-2)\cdots(n\mathrm{e}^{nx}-n),$$

所以 $f'(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

3. 如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（　）

(A) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(B) 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

(C) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

(D) 若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

解. 应选 (B)．由于 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，故

$$f(0,0)=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0.$$

这样就有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}=0,$$

也即

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=0\Delta x+0\Delta y+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right).$$

由可微的定义可知 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

4. 设 $I_k=\displaystyle\int_0^{k\pi}\mathrm{e}^{x^2}\sin x\,\mathrm{d}x$（$k=1,2,3$），则有$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$（　）

(A) $I_1<I_2<I_3$.　　(B) $I_3<I_2<I_1$.　　(C) $I_2<I_3<I_1$.　　(D) $I_2<I_1<I_3$.

解. 应选 (D). 令

$$S_1=\int_0^{\pi}e^{x^2}\sin x\,dx=\int_0^{\pi}e^{t^2}\sin t\,dt,$$

$$S_2=-\int_{\pi}^{2\pi}e^{x^2}\sin x\,dx=\int_0^{\pi}e^{(t+\pi)^2}\sin t\,dt,$$

$$S_3=\int_{2\pi}^{3\pi}e^{x^2}\sin x\,dx=\int_0^{\pi}e^{(t+2\pi)^2}\sin t\,dt.$$

则有 $S_3>S_2>S_1>0$，而且 $I_1=S_1$，$I_2=S_1-S_2$，$I_3=S_1-S_2+S_3$. 从而 $I_2<I_1<I_3$.

5. 设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是 · ( )

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$. (C) $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$. (D) $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$.

解. 应选 (C). 由 $|(\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4)|=\begin{vmatrix}0&1&-1\\0&-1&1\\c_1&c_3&c_4\end{vmatrix}=c_1\begin{vmatrix}1&-1\\-1&1\end{vmatrix}=0$，知 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关.

6. 设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$Q=(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3)$ 则 $Q^{-1}AQ=$ · ( )

(A) $\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}2&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&1\end{pmatrix}$.

解. 应选 (B). $Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则 $Q^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$，故

$$Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}AP\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}$$

7. 设随机变量 x 与 y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $P\{x<y\}=$ · ( )

(A) $\frac{1}{5}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{2}{3}$. (D) $\frac{4}{5}$.

解. 应选 (A). (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=4\begin{cases}e^{-x-4y}, & x>0,y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，则有

$$P\{x<y\}=4\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}e^{-x-4y}\,dx\,dy=\frac{1}{5}.$$

8. 将长度为 $1m$ 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为$\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) 1.　　(B) $\frac{1}{2}$.　　(C) $-\frac{1}{2}$.　　(D) -1.

解. 应选 (D). 设两段长度分别为 X 和 Y，则有 $Y=-X+1$，故两者是线性关系，且是负相关，所以相关系数为 -1.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$ ________.

解. 应填 e^x. 解微分方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$，得到通解为 $f(x)=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. 再由 $f'(x)+f(x)=2e^x$ 得 $2C_1e^x-C_2e^{-2x}=2e^x$，可知 $C_1=1,C_2=0$. 故 $f(x)=e^x$.

10. $\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=$ ________.

解. 应填 $\frac{\pi}{2}$. 令 $t=x-1$ 得

$$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}\,dx=\int_{-1}^1(t+1)\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_{-1}^1\sqrt{1-t^2}\,dt=\frac{\pi}{2}.$$

11. $\operatorname{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=$ ________.

解. 应填 $(1,1,1)$. $\operatorname{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=\left(y,x-\frac{z}{y^2},\frac{1}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}=(1,1,1)$.

12. 设 $\Sigma=\{(x,y,z)\,|\,x+y+z=1,x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0\}$，则 $\iint_\Sigma y^2\,dS=$ ________.

解. 应填 $\frac{\sqrt3}{12}$. 由曲面积分的计算公式，$D=\{(x,y)|x\geqslant0,y\geqslant0,x+y\leqslant1\}$，且

$$\iint_\Sigma y^2\,dS=\iint_D y^2\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dx\,dy=\sqrt3\iint_D y^2\,dx\,dy$$
$$=\sqrt3\int_0^1dy\int_0^{1-y}y^2\,dx=\sqrt3\int_0^1y^2(1-y)\,dy=\frac{\sqrt3}{12}.$$

13. 设 α 为 3 维单位列向量，E 为 3 阶单位矩阵，则矩阵 $E-\alpha\alpha^T$ 的秩为 ________.

解. 应填 2． 矩阵 $\alpha\alpha^T$ 的特征值为 0, 0, 1， 故 $E-\alpha\alpha^T$ 的特征值为 1, 1, 0． 又由于 $E-\alpha\alpha^T$ 为实对称矩阵，可相似对角化，故它的秩等于非零特征值的个数，即 $r\left(E-\alpha\alpha^T\right)=2$.

14. 设 A,B,C 是随机事件，A 与 C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})=$ ________.

解. 应填 $\frac{3}{4}$． 由于 A 与 C 互不相容，即 $AC=\emptyset$，$P(AC)=0$；又 $ABC\subset AC$，得 $P(ABC)=0$． 从而

$$P\left(AB|\overline{C}\right)=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}-0}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}\quad(-1<x<1)$.

解. 令 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，可得

$$\begin{aligned}f'(x)&=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{2}{(1-x)^2}-\sin x-x\\&=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x.\end{aligned}$$

当 $0<x<1$ 时，有 $\ln\frac{1+x}{1-x}>0$，$\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$，所以 $\frac{1+x^2}{1-x^2}\cdot x-\sin x>0$，故 $f'(x)>0$，则有 $f(x)>f(0)=0$. 又因为 $f(x)$ 是偶函数，所以当 $-1<x<0$ 时，也有 $f(x)>0$. 总之，当 $-1<x<1$ 时，有 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}$.

16.（本题满分 10 分）

求 $f\left(x,y\right)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$ 的极值.

解. 先求函数的驻点:

$$f'_x\left(x,y\right)=(1-x^2)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0,\qquad f'_y\left(x,y\right)=-xy\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}=0.$$

解得函数的驻点为 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$． 又

$$f''_{xx}\left(x,y\right)=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$f''_{xy}\left(x,y\right)=y(x^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$f''_{yy}\left(x,y\right)=x(y^2-1)\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}.$$

在驻点 $(1,0)$ 处，$B^2-AC=-2e^{-1}<0, A=-2e^{-\frac{1}{2}}<0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(1,0)$ 处取得极大值 $f(1,0)=e^{-\frac{1}{2}}$.

在驻点 $(-1,0)$ 处，$B^2-AC=-2e^{-1}<0, A=2e^{-\frac{1}{2}}>0$，故 $f(x,y)$ 在点 $(-1,0)$ 处取得极小值 $f(-1,0)=-e^{-\frac{1}{2}}$.

17. (本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

解. 因为 $\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，所以收敛半径 $R=1$. 又 $x=\pm1$ 时级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}$ 发散，所以收敛域为 $(-1,1)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+4n+3}{2n+1}x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}.$$

分别求这两个幂级数得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{2n+1}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}\right)'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}x^{2n}=\frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^{2n}\,dt=\frac{2}{x}\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}\,dt=\frac{2}{x}\int_0^x\frac{1}{1-t^2}\,dt=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),$$

其中后一个等式当 $0<|x|<1$ 时成立，所以

$$S(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), & 0<|x|<1;\\ 3, & x=0.\end{cases}$$

18. (本题满分 10 分)

已知曲线 $L:\begin{cases}x=f(t)\\ y=\cos t\end{cases}$ $(0\leqslant t<\frac{\pi}{2})$，其中函数 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(0)=0$，$f(t)>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$. 若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数 $f(t)$ 的表达式，并求以曲线 L 及 x 轴与 y 轴为边界的区域的面积.

解. (I) 曲线 L 在任一处 (x,y) 的切线斜率为 $\frac{dy}{dx}=\frac{-\sin t}{f'(t)}$，过该点 (x,y) 处的切线为

$$Y-\cos t=\frac{-\sin t}{f'(t)}\left(X-f(t)\right).$$

令 $Y=0$ 得 $X=f'(t)\cos t+f(t)$. 由于曲线 L 与 x 轴和 y 轴的交点到切点的距离恒为 1. 故有

$$\left[f'(t)\cot t+f(t)-f(t)\right]^2+\cos^2 t=1.$$

又因为 $f'(t)>0$ $(0<t<\frac{\pi}{2})$. 所以

$$f'(t)=\frac{\sin t}{\cot t}=\frac{1}{\cos t}-\cos t.$$

两边同时取不定积分得

$$f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t+C.$$

又由于 $f(0)=0$，所以 $C=0$. 故函数 $f(t)=\ln(\sec t+\tan t)-\sin t$.

(II) 此曲线 L 及 x 轴和 y 轴所围成的区域的面积为:

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\cdot f'(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.$$

19. (本题满分 10 分)

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分

$$I=\int_L 3x^2y\,\mathrm{d}x+\left(x^3+x-2y\right)\mathrm{d}y$$

解. 设 C_1 为圆 $x^2+y^2=2x$, C_2 为圆 $x^2+y^2=4$，补上直线 L_1 为 $x=0$（y 从 2 到 0），用格林公式得:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\int_{L+L_1}3x^2y\,\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y-\int_{L_1}3x^2y\,\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y\\&=\iint_D(3x^2+1-3x^2)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\int_2^0-2y\,\mathrm{d}y=\frac{1}{4}S_{C_2}-\frac{1}{2}S_{C_1}+4=\frac{\pi}{2}-4.\end{aligned}$$

20. (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$.

(I) 计算行列式 $|A|$.

(II) 当实数 a 为何值时，方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，并求其通解.

解. (I) 将行列式按第一列展开，得到

$$|A|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4.$$

(II) 对增广矩阵做初等行变换，得到

$$\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\a&0&0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&-a^2&0&1&-a\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&a^3&1&-a-a^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&a&0&0&1\\0&1&a&0&-1\\0&0&1&a&0\\0&0&0&1-a^4&-a-a^2\end{pmatrix}$$

若原线性方程组有无穷多解，则有 $1-a^4=0$ 及 $-a-a^2=0$，即 $a=-1$．此时，原线性方程组增广矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0&1\\0&1&-1&0&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1&0\\0&1&0&-1&-1\\0&0&1&-1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

可知导线性方程组的通解为 $x=k(1,1,1,1)^T+(0,-1,0,0)$.

21.（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TA^TAx$ 的秩为 2.

(I) 求实数 a 的值； (II) 求正交变换 $x=Qy$ 将二次型 f 化为标准型.

解. (I) 由 $r(A^TA)=r(A)=2$，以及

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\\0&a&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a+1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

求得 $a=-1$.

(II) 矩阵 $B=A^TA=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&2&2\\2&2&4\end{pmatrix}$，所以

$$|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&-2\\0&\lambda-2&-2\\-2&-2&\lambda-4\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-6)=0.$$

解得 B 矩阵的特征值为：$\lambda_1=0$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=6$．分别求得对应的特征向量

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\qquad \eta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad \eta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

将 η_1,η_2,η_3 单位化可得:

$$\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\qquad \alpha_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\qquad \alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

令 $Q=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,则 $x=Qy$ 就是所求的正交变换.

22. (本题满分 11 分)

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/4	0	1/4
1	0	1/3	0
2	1/12	0	1/12

(I) 求 $P(X=2Y)$; (II) 求 $\mathrm{Cov}(X-Y,Y)$.

解. (I) $P(X=2Y)=P(X=0,Y=0)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$.

(II) 由 (X,Y) 的概率分布知 X, Y, XY 的概率分布分别为

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	4
P	7/12	1/3	1/12

计算得 $EX=\frac{2}{3}, EY=1, EY^2=\frac{5}{3}, EXY=\frac{2}{3}$, 所以

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=EXY-EXEY=0,\quad DY=EY^2-(EY)^2=\frac{5}{3}-1=\frac{2}{3},$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X-Y,Y)=\mathrm{Cov}(X,Y)-DY=-\frac{2}{3}.$$

23. (本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 与 $N\left(\mu,2\sigma^2\right)$, 其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$, 设 $Z=X-Y$,

(I) 求 Z 的概率密度 $f\left(z,\sigma^2\right)$;

(II) 设 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本, 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$;

(III) 证明 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

解. (I) $X\sim N(\mu,\sigma^2),Y\sim N(\mu,2\sigma^2)$, 且 X 与 Y 相互独立, 故 $Z=X-Y\sim N(0,3\sigma^2)$,
所以 Z 的概率密度为

$$f(z,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{6\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{6\sigma^2}},(-\infty<z<+\infty)$$

(II) 写出似然函数并求导, 得到

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i,\sigma^2)=\frac{1}{(6\pi)^{\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}=(6\pi)^{-\frac{n}{2}}\left(\sigma^2\right)^{-\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2},$$

$$\Rightarrow \ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(6\pi)-\frac{n}{2}\ln\left(\sigma^2\right)-\frac{1}{6\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2.$$

对 σ^2 求导并令导数为零得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma^2)}{\mathrm{d}\sigma^2}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{6(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0.$$

解得最大似然估计值为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$，最大似然估计量为 $\hat{\sigma}^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2$.

(III) 计算 $\hat{\sigma}^2$ 的数学期望，得到

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right)=E\left(\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2\right)=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}EZ_i^2=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}\left[(EZ_i)^2+DZ_i\right]=\frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{n}3\sigma^2=\sigma^2.$$

故 $\hat{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量.

二〇一三年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 c,k 为常数，且 $c\neq 0$，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $k=2, c=-\frac{1}{2}$.　(B) $k=2, c=\frac{1}{2}$.　(C) $k=3, c=-\frac{1}{3}$.　(D) $k=3, c=\frac{1}{3}$.

解. 应选 (D). 由麦克劳林公式可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\left(x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)\right)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^3}{x^k}=c.$$

所以 $k=3, c=\frac{1}{3}$.

2. 曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $x-y+z=-2$.　(B) $x+y+z=2$.　(C) $x-2y+z=-3$.　(D) $x-y-z=0$.

解. 应选 (A). 设 $F(x,y,z)=x^2+\cos(xy)+yz+x$，则

$$F_x'(0,1,-1)=1,\quad F_y'(0,1,-1)=-1,\quad F_z'(0,1,-1)=1.$$

所以曲面在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为

$$(x-0)-(y-1)+(z+1)=0 \quad\Rightarrow\quad x-y+z=-2.$$

3. 设 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|$, $b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,\mathrm{d}x$ $(n=1,2,\cdots)$, 令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$, 则 $S\left(-\frac{9}{4}\right)=\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\frac{3}{4}$.　(B) $\frac{1}{4}$.　(C) $-\frac{1}{4}$.　(D) $-\frac{3}{4}$.

解. 应选 (C). 依题意, 傅里叶级数的和函数 $S(x)$ 是周期为 2 的奇函数, 且当 $0<x<1$ 时有 $S(x)=f(x)$. 因此

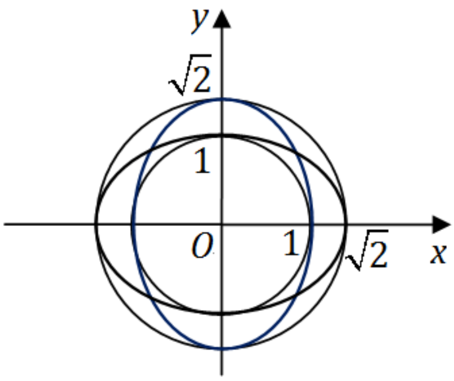
$$S\left(-\frac{9}{4}\right)=S\left(-\frac{9}{4}+2\right)=S\left(-\frac{1}{4}\right)=-S\left(\frac{1}{4}\right)=-f\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}.$$

4. 设 $L_1: x^2+y^2=1$, $L_2: x^2+y^2=2$, $L_3: x^2+2y^2=2$, $L_4: 2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针的平面曲线，记 $I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y$ $(i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) I_1.　(B) I_2.　(C) I_3.　(D) I_4.

解. 应选 (D). 令 D_i 是 L_i 围成的区域 $(i=1,2,3,4)$，则由格林公式有

$$I_i=\oint_{L_i}\left(y+\frac{y^3}{6}\right)\mathrm{d}x+\left(2x-\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{d}y=\iint_{D_i}\left(1-x^2-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$



利用二重积分的几何意义，比较积分区域以及函数的正负：在区域 D_4 内函数取正值，则由 $D_4 \supset D_1$ 得 $I_4 > I_1$. 在区域 D_4 之外函数取负值，因此 $I_4 > I_2$，$I_4 > I_3$. 综上所述，$\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} = I_4$.

5. 设矩阵 A, B, C 均为 n 阶矩阵，若 $AB = C$，且 C 可逆，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

(B) 矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价.

(C) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价.

(D) 矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价.

解. 应选 (B). 由 $AB = C$ 可知，C 的列向量组可由 A 的列向量组线性表示，又由 B 可逆，可得 $A = CB^{-1}$，从而 A 的列向量组也可由 C 的列向量组线性表示. 故 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价.

6. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $a = 0, b = 2$.

(B) $a = 0$, b 为任意常数.

(C) $a = 2, b = 0$.

(D) $a = 2$, b 为任意常数.

解. 应选 (B). 将题目中的两个矩阵分别记为 A 和 B. 由于 A 为实对称矩阵，可以相似对角化，从而 A 与 B 相似的充分必要条件为 A 的特征值为 $2, b, 0$. 又

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -a & -1 \\ -a & \lambda - b & -a \\ -1 & -a & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda[(\lambda - b)(\lambda - 2) - 2a^2],$$

从而 $a = 0$, b 为任意常数.

7. 设 X_1, X_2, X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0,2^2)$，$X_3 \sim N(5,3^2)$，

$p_j=P\{-2\leqslant X_j\leqslant 2\}$（$j=1,2,3$），则…………………………………（　）

(A) $p_1>p_2>p_3$.　(B) $p_2>p_1>p_3$.　(C) $p_3>p_1>p_2$.　(D) $p_1>p_3>p_2$.

解. 应选 (A). 设 $U\sim N(0,1)$，则由题设可得

$$p_1=P\{-2\leqslant X_1\leqslant 2\}=P\{-2\leqslant U\leqslant 2\},$$

$$p_2=P\{-2\leqslant X_2\leqslant 2\}=P\{-1\leqslant U\leqslant 1\},$$

$$p_2=P\{-2\leqslant X_3\leqslant 2\}=P\left\{-\frac{7}{3}\leqslant U\leqslant -1\right\}.$$

根据标准正态分布的密度函数的图形，比较面积可得 $p_1>p_2>p_3$.

8. 设随机变量 $X\sim t(n)$, $Y\sim F(1,n)$, 给定 $\alpha\,(0<\alpha<0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$, 则 $P\{Y>c^2\}=$…………………………………………………（　）

(A) α.　(B) $1-\alpha$.　(C) 2α.　(D) $1-2\alpha$.

解. 应选 (C). 由 $X\sim t(n)$ 得 $X^2\sim F(1,n)$，故有

$$P\left\{Y>c^2\right\}=P\left\{X^2>c^2\right\}=P\{X<-c\}+P\{X>c\}=2\alpha.$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=$________.

解. 应填 1. 方程两边取对数得 $\ln(y-x)=x(1-y)$. 两边同时对 x 求导得

$$\frac{1}{y-x}\left(y'-1\right)=(1-y)-xy'.$$

当 $x=0$ 时 $y=1$，代入上式得 $f'(0)=1$. 从而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=f'(0)=1.$$

10. 已知 $y_1=\mathrm{e}^{3x}-x\mathrm{e}^{2x}$，$y_2=\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$，$y_3=-x\mathrm{e}^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程的通解为 $y=$________.

解. 应填 $C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$. 由线性微分方程解的性质知 $y_1-y_2=\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{x}$ 对应的齐次线性微分方程的解, 从而对应的齐次线性微分方程的通解为 $Y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}$, 因此该方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$.

11. 设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________.

解. 应填 $\sqrt{2}$. 由参数方程的导数公式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=t\cos t,\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\cos t\quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{t\cos t}{\cos t}=t,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos t}\quad\Rightarrow\quad \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$$

12. $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=$________.

解. 应填 $\ln 2$．由分部积分法可得

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x=-\int_1^{+\infty}\ln x\,\mathrm{d}\Big(\frac{1}{1+x}\Big)=-\Big[\frac{\ln x}{1+x}\Big]_1^{+\infty}+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x(1+x)}\,\mathrm{d}x$$
$$=0+\int_1^{+\infty}\Big(\frac{1}{x}-\frac{1}{1+x}\Big)\mathrm{d}x=\Big[\ln\frac{x}{1+x}\Big]_1^{+\infty}=\ln 2.$$

13. 设 $A=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0$（$i,j=1,2,3$），则 $|A|=$________.

解. 应填 -1．由 $a_{ij}+A_{ij}=0$（$i,j=1,2,3$）可得 $A^T=-A^*$．取行列式可得

$$|A|=|A^T|=|-A^*|=-|A|^2.$$

从而 $|A|=0$ 或 $|A|=-1$．因为 A 非零，不妨设 $a_{11}\neq 0$，则有

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=-a_{11}^2-a_{12}^2-a_{13}^2<0.$$

因此只能有 $|A|=-1$.

14. 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则 $P\{Y\leqslant a+1|Y>a\}$________.

解. 应填 $1-\mathrm{e}^{-1}$．由指数分布的无记忆性得

$$P\{Y\leqslant a+1|Y>a\}=1-P\{Y>a+1|Y>a\}$$
$$=1-P\{Y>1\}=1-\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=1-\mathrm{e}^{-1}.$$

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$，其中 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t$.

解. 因为 $f(x)=\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}\,\mathrm{d}t$，所以 $f'(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$，$f(1)=0$．从而有

$$I=\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\big(\sqrt{x}\big)=2\big[f(x)\sqrt{x}\big]_0^1-2\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}\big(f(x)\big)$$
$$=-2\int_0^1\frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=-4\int_0^1\ln(x+1)\,\mathrm{d}\big(\sqrt{x}\big)=-4\big[\sqrt{x}\ln(x+1)\big]_0^1+4\int_0^1\frac{\sqrt{x}}{x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$=-4\ln 2+4\int_0^1\frac{\sqrt{t}}{t+1}\,\mathrm{d}t=-4\ln 2+4\int_0^1\frac{u}{u^2+1}\cdot 2u\,\mathrm{d}u$$
$$=-4\ln 2+8\int_0^1\Big(1-\frac{1}{u^2+1}\Big)\mathrm{d}u=-4\ln 2+8\big[u-\arctan u\big]_0^1=-4\ln 2+8-2\pi.$$

16.（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3$，$a_1=1$，$a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$（$n\geqslant 2$）．$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数．

(I) 证明：$S''(x)-S(x)=0$； (II) 求 $S(x)$ 的表达式．

解. (I) 由题设可得 $a_{2n}=\frac{3}{(2n)!}$，$a_{2n+1}=\frac{1}{(2n+1)!}$．所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}=0.\quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0.$$

于是幂级数的收敛半径为 $+\infty$，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$．设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，

则由 $a_{n-2}-n(n-1)a_n=0$ 可得

$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}a_nn(n-1)x^{n-2}=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=S(x),$$

即 $S''(x)-S(x)=0$．

(II) 方程 $S''(x)-S(x)=0$ 的特征方程为 $\lambda^2-1=0$．解得 $\lambda_1=-1,\lambda_1=1$，所以 $S(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{x}$，又由 $S(0)=a_0=3$，$S'(0)=a_1=1$，解得 $C_1=1$，$C_2=2$，所以 $S(x)=\mathrm{e}^{-x}+2\mathrm{e}^{x}$．

17.（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=\left(y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}$ 的极值．

解. 先求 $f(x,y)$ 的驻点：由

$$\begin{cases} f'_x=x^2\mathrm{e}^{x+y}+\left(y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}=\left(x^2+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}=0,\\ f'_y=\mathrm{e}^{x+y}+\left(y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}=\left(1+y+\frac{x^3}{3}\right)\mathrm{e}^{x+y}=0,\end{cases}$$

解得驻点为 $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ 和 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$．再求二阶偏导数得

$$A=f''_{xx}=\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+2x+y\right)\mathrm{e}^{x+y},$$

$$B=f''_{xy}=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+y+1\right)\mathrm{e}^{x+y},$$

$$C=f''_{yy}=\left(\frac{x^3}{3}+y+2\right)\mathrm{e}^{x+y}.$$

对于 $\left(1,-\frac{4}{3}\right)$ 点，因为 $\Delta=AC-B^2>0$，$A>0$．所以它为极小值点，极小值为 $-\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}$．对于 $\left(-1,-\frac{2}{3}\right)$ 点，因为 $\Delta=AC-B^2<0$，所以它不为极值点．

18.（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$．证明：

(I) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

(II) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

解. (I) 因为 $f(x)$ 为奇函数，所以 $f(0)=0$. 令 $F(x)=f(x)-x$，则有

$$F(0)=f(0)=0,\quad F(1)=f(1)-1=0.$$

则由罗尔中值定理，$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=1$.

(II) 令 $G(x)=\mathrm{e}^x(f'(x)-1)$，则 $G(\xi)=0$. 又由于 $f(x)$ 为奇函数，故 $f'(x)$ 为偶函数，可知 $G(-\xi)=0$. 则由罗尔中值定理. $\exists\eta\in(-\xi,\xi)\subset(-1,1)$，使得 $G'(\xi)=0$，即有

$$e^{\eta}[f'(\eta)-1]+\mathrm{e}^{\eta}f''(\eta)=0 \quad\Rightarrow\quad f''(\eta)+f'(\eta)=1.$$

19. (本题满分 10 分)

设直线 L 过 $A(1,0,0),B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体为 Ω.

(I) 求曲面 Σ 的方程；(II) 求 Ω 的形心坐标.

解. (I) 直线 L 过 A,B 两点，所以其方程为

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-0}{1}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=1-z,\\ y=z.\end{cases}$$

所以其绕着 z 轴旋转一周的曲面方程为

$$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2\quad\Rightarrow\quad x^2+y^2=2z^2-2z+1.$$

(II) 设形心坐标为 $(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，则由对称性可得 $\overline{x}=\overline{y}=0$. 由形心坐标公式有

$$\overline{z}=\frac{\iiint_{\Omega}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}=\frac{\pi\int_0^2 z\left[2z^2-2z+1\right]\mathrm{d}z}{\pi\int_0^2[2z^2-2z+1]\mathrm{d}z}=\frac{7}{5}.$$

所以形心坐标为 $\left(0,0,\frac{7}{5}\right)$.

20. (本题满分 11 分)

设 $A=\begin{pmatrix}1&a\\1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\1&b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C.

解. 设 $C=\begin{pmatrix}x_1&x_2\\x_3&x_4\end{pmatrix}$，则由 $AC-CA=B$ 可得线性方程组

$$\begin{cases}-x_2+ax_3=0,\\ -ax_1+x_2+ax_4=1,\\ x_1-x_3-x_4=1,\\ x_2-ax_3=b.\end{cases}$$

对增广矩阵作初等行变换得

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & a & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

因此当 $a=-1$ 且 $b=0$ 时方程组有解，通解为

$$\begin{cases} x_1 = k_1 + k_2 + 1, \\ x_2 = -k_1, \\ x_3 = k_1, \\ x_4 = k_2, \end{cases}$$

其中 k_1, k_2 为任意常数，从而有 $C = \begin{pmatrix} k_1+k_2+1 & -k_1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix}$，$k_1, k_2$ 为任意常数.

21.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = 2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2 + (b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2$，记

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

(I) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha + \beta^T\beta$；

(II) 若 α, β 正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变换下的标准形为二次型 $2y_1^2 + y_2^2$.

解. (I) 记 $x = (x_1, x_2, x_3)^T$，则有

$$f = 2(x^T\alpha)^2 + (x^T\beta)^2 = 2(x^T\alpha)(a^Tx) + (x^T\beta)(\beta^Tx) = x^T(2\alpha a^T + \beta\beta^T)x.$$

因此 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha + \beta^T\beta$.

(II) 令 $A = 2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T$，则有

$$A\alpha = 2\alpha\alpha^T\alpha + \beta\beta^T\alpha = 2\alpha, \quad A\beta = 2\alpha\alpha^T\beta + \beta\beta^T\beta = \beta.$$

所以 1 和 2 均为 A 的特征值，又因为

$$r(A) = r(2\alpha\alpha^T + \beta\beta^T) \leqslant r(\alpha\alpha^T) + r(\beta\beta^T) = 2,$$

所以 0 为 A 的特征值．故 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0<x<3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$，令随机变量

$$Y = \begin{cases} 2, & X \leqslant 1; \\ X, & 1 < X < 2; \\ 1, & X \geqslant 2. \end{cases}$$

(Ⅰ) 求 Y 的分布函数； (Ⅱ) 求概率 $P\{X\leqslant Y\}$.

解. (Ⅰ) 当 $y<1$ 时，$F_Y(y)=0$；当 $y>2$ 时，$F_Y(y)=1$；当 $1\leqslant y\leqslant 2$ 时，

$$F_Y(y)=P\left\{Y\leqslant y\right\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\leqslant y\}=P\{Y=1\}+P\{1<X\leqslant y\}$$

$$=P\{X\geqslant 2\}+P\{1<X\leqslant y\}=\int_2^3\frac{1}{9}x^2\,\mathrm{d}x+\int_1^y\frac{1}{9}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{27}(y^3+18).$$

(Ⅱ) $P\{X\leqslant Y\}=P\{X\leqslant 2\}=\displaystyle\int_0^2\frac{1}{9}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{8}{27}$.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & 其它,\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(Ⅰ) 求 θ 的矩估计量； (Ⅱ) 求 θ 的最大似然估计量.

解. (Ⅰ) X 的数学期望为

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x\frac{\theta^2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\,\mathrm{d}x=\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x}}\,\mathrm{d}\left(-\frac{\theta}{x}\right)=\theta.$$

令 $EX=\overline{X}$，得 θ 矩估计量为 $\hat{\theta}=\overline{X}$.

(Ⅱ) 设 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 为样本观测值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{i=1}^n\frac{\theta^2}{x_i^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x_i}}, & x_i>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}=\begin{cases}\displaystyle\theta^{2n}\prod_{i=1}^n\frac{1}{x_i^3}\mathrm{e}^{-\frac{\theta}{x_i}}, & x_i>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $x_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$）时，

$$\ln L(\theta)=2n\ln\theta-3\sum_{i=1}^n\ln x_i-\theta\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}.$$

求导并令导数等于零，得到

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{2n}{\theta}-\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}=0.$$

解得 $\theta=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{x_i}}$，所以得 θ 极大似然估计量 $\hat{\theta}=\dfrac{2n}{\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{X_i}}$.

二〇一四年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 下列曲线有渐近线的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $y=x+\sin x$.　　(B) $y=x^2+\sin x$.

(C) $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$.　　(D) $y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$.

解. 应选 (C)．对于 $y=x+\sin\dfrac{1}{x}$，可知

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}(y-x)=\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{x}=0.$$

所以有斜渐近线 $y=x$.

2. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 上 $\cdot$ (　)

(A) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.　　(B) 当 $f'(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

(C) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\geqslant g(x)$.　　(D) 当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$.

解. 应选 (D)．**方法 1**：显然 $g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$ 就是连接 $(0,f(0)),(1,f(1))$ 两点的直线方程．故当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，曲线是凹的，也就是 $f(x)\leqslant g(x)$.

方法 2：令 $h(x)=f(x)-g(x)=f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x$，则 $h(0)=h(1)=0$，且 $h''(x)=f''(x)$，故当 $f''(x)\geqslant 0$ 时，曲线是凹的，从而 $h(x)\leqslant h(0)=h(1)=0$，即 $h(x)=f(x)-g(x)\leqslant 0$，也就是 $f(x)\leqslant g(x)$.

3. 设 $f(x)$ 是连续函数，则 $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x,y)\,\mathrm{d}x=$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x-1}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(B) $\displaystyle\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0}f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(C) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$.

(D) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$.

解. 应选 (D)．在直角坐标中交换积分次序，得到

$$I=\int_{-1}^0\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

而化为极坐标后得到

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r.$$

4. 若 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(x-a_1\cos x-b_1\sin x)^2\,\mathrm{d}x=\min_{a,b\in\mathbb{R}}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\,\mathrm{d}x\right\}$,

则 $a_1\cos x+b_1\sin x=$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) $2\sin x$. (B) $2\cos x$. (C) $2\pi\sin x$. (D) $2\pi\cos x$.

解. 应选 (A). 令 $f(a,b)=\int_{-\pi}^{\pi}(x-a\cos x-b\sin x)^2\,dx$，则有

$$f'_a(a,b)=2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 x\,dx,$$

$$f'_b(a,b)=2b\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx-2\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,dx=2b\pi-4\pi.$$

由 $f'_a(a,b)=f'_b(a,b)=0$，解得 $a=0$，$b=2$.

5. 行列式 $\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) $(ad-bc)^2$. (B) $-(ad-bc)^2$. (C) $a^2d^2-b^2c^2$. (D) $b^2c^2-a^2d^2$.

解. 应选 (B). 行列式依次展开，可得

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&0&b\\0&d&0\\c&0&d\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}a&0&b\\0&c&0\\c&0&d\end{vmatrix}=-ad\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+bc\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=-(ad-bc)^2.$$

6. 设 a_1,a_2,a_3 均为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 a_1+ka_3,a_2+la_3 线性无关是向量组 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 线性无关的 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) 必要非充分条件. (B) 充分非必要条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分也非必要条件.

解. 应选 (A). 若向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则

$$(\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\k&l\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)M.$$

对任意的常数 k,l，矩阵 M 的秩都等于 2，所以向量 a_1+ka_3,a_2+la_3 一定线性无关. 而当 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 时，对任意的常数 k,l，向量 a_1+ka_3,a_2+la_3 线性无关，但 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关. 故选择 (A).

7. 设随机事件 A 与 B 相互独立，且 $P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则 $P(B-A)=$( )

(A) 0.1. (B) 0.2. (C) 0.3. (D) 0.4.

解. 应选 (B). 因为 A 与 B 相互独立，所以

$$0.3=P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)=0.5P(A).$$

于是 $P(A)=0.6$，从而

$$P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(B)-P(A)P(B)=0.2.$$

8. 设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，且方差均存在，X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$，则 $\cdots\cdots$ ( )

(A) $EY_1>EY_2$，$DY_1>DY_2$.　　(B) $EY_1=EY_2$，$DY_1=DY_2$.

(C) $EY_1=EY_2$，$DY_1<DY_2$.　　(D) $EY_1=EY_2$，$DY_1>DY_2$.

解. 应选 (D). 依题意可得

$$EY_1=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}y[f_1(y)+f_2(y)]\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(EX_1+EX_2)=EY_2,$$

$$EY_1^2=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2[f_1(y)+f_2(y)]\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(EX_1^2+EX_2^2).$$

从而得到

$$DY_1=EY_1^2-(EY_1)^2=\frac{1}{4}DX_1+\frac{1}{4}DX_2+\frac{1}{4}E(X_1-X_2)^2>\frac{1}{4}DX_1+\frac{1}{4}DX_2=DY_2.$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切平面方程为 ________.

解. 应填 $2x-y-z-1=0$. 因为

$$z'_x=2x(1-\sin y)-y^2\cos x,\quad z'_y=-x^2\cos y+2y(1-\sin x).$$

所以在点 $(1,0,1)$ 有法向量 $(2,-1,-1)$，从而切平面为 $2x-y-z-1=0$.

10. 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$, $x\in[0,2]$，则 $f(7)=$ ________.

解. 应填 1. 当 $x\in[0,2]$ 时，

$$f(x)=\int 2(x-1)\,\mathrm{d}x=x^2-2x+C.$$

由 $f(0)=0$ 可知 $C=0$，即 $f(x)=x^2-2x$；$f(x)$ 为周期为 4 的奇函数，故

$$f(7)=f(-1)=f(1)=1.$$

11. 微分方程 $xy'+y(\ln x-\ln y)=0$ 满足条件 $y(1)=\mathrm{e}^3$ 的解为 $y=$ ________.

解. 应填 xe^{2x+1}. 令 $u=\frac{y}{x}$，则原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(\ln u-1)}=\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

解得 $y=xe^{Cx+1}$. 代入初始条件得 $C=2$. 所以特解为 $y=xe^{2x+1}$.

12. 设 L 是柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $y+z=0$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分 $\oint_L z\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}z=$ ________.

解. 应填 π. L 的参数方程为 $x=\cos t, y=\sin t, z=-\sin t$，$t$ 从 0 到 2π. 从而

$$\oint_L z\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t-\sin t\cos t\right)\mathrm{d}t=\pi.$$

13. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1，则 a 的取值范围 ________.

解. 应填 $[-2,2]$. 由配方法可知

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)&=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3\\ &=(x_1+ax_3)^2-(x_2-2x_3)^2+(4-a^2)x_3^2. \end{aligned}$$

由于负惯性指数为 1，故必须要求 $4-a^2\geqslant 0$，所以 a 的取值范围是 $[-2,2]$.

14. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2}, & \theta<x<2\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数，X_1, $X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单样本，若 $c\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 是 θ^2 的无偏估计，则 $c=$ ________.

解. 应填 $\frac{2}{5n}$. 因为

$$\theta^2=E\left(c\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=cnE(X^2)=cn\int_\theta^{2\theta}x^2\frac{2x}{3\theta^2}\,\mathrm{d}\theta=\frac{5cn}{2}\theta^2,$$

所以 $c=\frac{2}{5n}$.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$.

解. 由洛必达法则和等价无穷小量代换可得

$$\text{原式} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\int_1^x t^2\,dt - \int_1^x t\,dt}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x\right] = \lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1-u}{u^2} = \lim_{u\to0^+}\frac{e^u-1}{2u} = \frac{1}{2}.$$

16. (本题满分 10 分)

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

解. 方程两边对 x 求导可得

$$3y^2y'+y^2+x\cdot 2yy'+2xy+x^2y'=0.$$

令 $y'=0$，得 $y=0$（舍去）或 $y=-2x$. 当 $y=-2x$ 时，解得 $x=1, y=-2$. 上式两边再对 x 求导可得

$$(x^2+2xy+3y^2)y''+(2x+6y)(y')^2+(4x+4y)y'+2y=0.$$

由此得 $y''(1)=\frac{9}{4}>0$，所以 $y(1)=-2$ 为极小值.

17. (本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数，$z=f\left(e^x\cos y\right)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\left(4z+e^x\cos y\right)e^{2x}.$$

若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

解. 设 $u=e^x\cos y$，则 $z=f(u)=f(e^x\cos y)$，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)e^x\cos y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''(u)e^{2x}\cos^2 y+f'(u)e^x\cos y;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)e^x\sin y, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x}\sin^2 y-f'(u)e^x\cos y.$$

因此由题设条件可得

$$(4f(u)+u)e^{2x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''(u)e^{2x} \quad\Rightarrow\quad f''(u)=4f(u)+u.$$

解得 $f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4}$（$C_1, C_2$ 为任意常数）. 由 $f(0)=0, f'(0)=0$ 得 $C_1=\frac{1}{16}, C_2=-\frac{1}{16}$. 所以 $f(u)=\frac{1}{16}e^{2u}-\frac{1}{16}e^{-2u}-\frac{1}{4}u$.

18. (本题满分 10 分)

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2 (z\leqslant 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma (x-1)^3\,dy\,dz+(y-1)^3\,dz\,dx+(z-1)\,dx\,dy.$$

解. 补上 $\Sigma_1:\left\{(x,y,z)\middle| z=1\right\}$ 的下侧，使之与 Σ 围成闭合区域 Ω. 则有

$$I=\iint_{\Sigma+\Sigma_1}(x-1)^3\,dy\,dz+(y-1)^3\,dz\,dx+(z-1)\,dx\,dy$$

$$
\begin{aligned}
&-\iint_{\Sigma_1}(x-1)^3\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y-1)^3\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
=&-\iiint_{\Omega}[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-0\\
=&-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1[3(\rho\cos\theta-1)^2+3(\rho\sin\theta-1)^2+1]\rho\,\mathrm{d}z\\
=&-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1[3\rho^2-6\rho^2\cos\theta-6\rho^2\sin\theta+7\rho]\mathrm{d}z\\
=&-2\pi\int_0^1(3\rho^3+7\rho)(1-\rho^2)\mathrm{d}\rho=-4\pi.
\end{aligned}
$$

19.（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.（I）证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.（II）证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

解.（I）由条件得 $\cos a_n-\cos b_n=a_n>0$, 故 $0<a_n<b_n$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛得 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(II) 由等价无穷小量代换 $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$（$x\to 0$）可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n^2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2(1-\cos b_n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2(1-\cos a_n+a_n)}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2(1-\cos a_n)/a_n+2}=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

所以由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

20.（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}$，$E$ 为 3 阶单位矩阵.

（I）求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；(II) 求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B.

解.（I）对系数矩阵 A 进行初等行变换得

$$
A=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&4&-3&1\end{pmatrix}
$$

$$
\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\0&0&1&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-2\\0&0&1&-3\end{pmatrix}.
$$

从而得到 $Ax=0$ 的一个基础解系为 $\alpha=(-1,2,3,1)^T$.

(II) 对矩阵 (A,E) 作初等行变换得

$$(A,E)=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\1&2&0&3&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&4&-3&1&-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&1&0&0\\0&1&-1&1&0&1&0\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&2&6&-1\\0&1&0&-2&-1&-3&1\\0&0&1&-3&-1&-4&1\end{pmatrix}$$

记 $E=(e_1,e_2,e_3)$，则 $Ax=e_1$ 的通解为 $x=(2,-1,-1,0)^T+k_1\alpha$，$k_1$ 为任意常数；$Ax=e_2$ 的通解为 $x=(6,-3,-4,0)^T+k_2\alpha$，$k_2$ 为任意常数；$Ax=e_3$ 的通解为 $x=(-1,1,1,0)^T+k_3\alpha$，k_3 为任意常数．于是所求矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}2&6&-1\\-1&-3&1\\-1&-4&1\\0&0&0\end{pmatrix}+(k_1\alpha,k_2\alpha,k_3\alpha)=\begin{pmatrix}-k_1+2&-k_2+6&-k_3-1\\2k_1-1&2k_2-3&2k_3+1\\3k_1-1&3k_2-4&3k_3+1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix},$$

其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

21.（本题满分 11 分）

证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$ 相似.

解. 记 $A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}$．则 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=(\lambda-n)\lambda^{n-1}$，

即 A 和 B 有相同的特征值 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=0$（$n-1$ 重）．因为 A 为实对称阵，所以 A 相似于 $\Lambda=\begin{pmatrix}n&&&\\&0&&\\&&\ddots&\\&&&0\end{pmatrix}$．因为 $r(\lambda_2E-B)=r(B)=1$，所以 B 对应于特征值 $\lambda_2=0$ 有 $n-1$ 个线性无关的特征向量，于是 B 也相似于 Λ．故 A 与 B 相似.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 的条件下，随机变量 Y 服从均匀分布 $U(0,i)$（$i=1,2$）.

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$； (II) 求 EY.

解. (I) 由分布函数的定义得

$$
\begin{aligned}
F_Y(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y|X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y|X=2\}\\
&=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y|X=2\}\\
&=\begin{cases}0, & y<0,\\ \frac{3}{4}y, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{4}y, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}
\end{aligned}
$$

(II) 随机变量 Y 的概率密度为

$$
f_Y(y)=\begin{cases}\frac{3}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \frac{1}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

因此 $EY=\frac{3}{4}$.

23. (本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 其中 θ 是未知参数且大于零. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(III) 是否存在实数 a, 使得对任何 $\epsilon>0$, 都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-a\right|\geqslant\epsilon\right\}=0$?

解. (I) 总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$ 所以

$$
EX=\int_0^{+\infty}x\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx=-\int_0^{+\infty}x\,d\left(e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi\theta},
$$

$$
EX^2=\int_0^{+\infty}x^2\frac{2x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{\theta}}\,dx=-\int_0^{+\infty}x^2\,d\left(e^{-\frac{x^2}{\theta}}\right)=\theta.
$$

(II) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为样本观测值, 则似然函数

$$
L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)=\begin{cases}\frac{2^n x_1x_2\cdots x_n}{\theta^n}e^{-\frac{1}{\theta}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}, & x_1,x_2,\cdots,x_n>0;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ 时,

$$
\ln L(\theta)=n\ln 2+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-n\ln\theta-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i^2.
$$

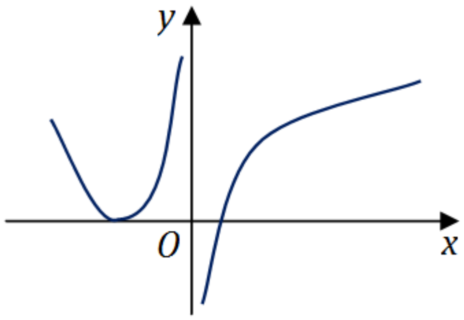
令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$, 解得 $\theta=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$, 所以 θ 的最大似然估计为 $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$.

(III) 存在 $a=\theta$. 因为 $\{X_n^2\}$ 是独立同分布的随机变量序列，且 $E(X_n^2)=\theta<+\infty$，所以根据辛钦大数定律, 当 $n\to\infty$ 时, $\hat{\theta}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $EX^2=\theta$. 因此对任何 $\epsilon>0$，都有 $\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\hat{\theta}_n-\theta\right|\geqslant\epsilon\right\}=0$.

二〇一五年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点的个数为 $\cdots\cdots$ ( )



(A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

解. 应选 (C). 拐点出现在二阶导数等于零或不存在的点处，且在该点左右两侧二阶导函数异号. 由 $f''(x)$ 的图形可得，曲线 $y=f(x)$ 存在两个拐点.

2. 设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解，则 $\cdots\cdots$ ( )

(A) $a=-3, b=2, c=-1$.

(B) $a=3, b=2, c=-1$.

(C) $a=-3, b=2, c=1$.

(D) $a=3, b=2, c=1$.

解. 应选 (A). 由题意可知，e^{2x} 和 e^x 为二阶常系数齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的解，所以 2 和 1 为特征方程 $r^2+ar+b=0$ 的根，从而 $a=-3$，$b=2$. 于是原方程变为 $y''-3y'+2y=ce^x$，再将特解 $y=xe^x$ 代入得 $c=-1$.

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的( )

(A) 收敛点，收敛点.

(B) 收敛点，发散点.

(C) 发散点，收敛点.

(D) 发散点，发散点.

解. 应选 (B). 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，即 $x=2$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的条件收敛点，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛半径为 1，收敛区间为 $(0,2)$. 而幂级数逐项求导不改变收敛区间，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛区间还是 $(0,2)$. 因此 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的收敛点，发散点.

4. 设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$，与直线 $y=x$，$y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$.

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r$.

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{2\sin2\theta}}^{\frac{1}{\sin2\theta}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$.

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\,\mathrm{d}r$.

解. 应选 (B)．由 D 的图形可得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r.$$

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$．若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解的充分必要条件为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $a\notin\Omega,d\notin\Omega$.　(B) $a\notin\Omega,d\in\Omega$.　(C) $a\in\Omega,d\notin\Omega$.　(D) $a\in\Omega,d\in\Omega$.

解. 应选 (D)．作初等行变换得

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{pmatrix}.$$

由 $r(A)=r(A,b)<3$，故 $a=1$ 或 $a=2$，而且 $d=1$ 或 $d=2$.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换为 $x=Py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.　(B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$.　(C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　(D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$.

解. 应选 (A)．依题意，有 $f=x^TAx=y^T(P^TAP)y=2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，且

$$P^TAP=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix},\quad Q=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}=PC.$$

由此可得

$$Q^TAQ=C^T(P^TAP)C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

所以 $f=x^TAx=y^T(Q^TAQ)y=2y_1^2-y_2^2+y_3^2$.

7. 若 A,B 为任意两个随机事件，则$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $P(AB)\leqslant P(A)P(B)$.　　(B) $P(AB)\geqslant P(A)P(B)$.

(C) $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.　　(D) $P(AB)\geqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

解. 应选 (C). 因为 $AB\subset A$ 且 $AB\subset B$，所以 $P(AB)\leqslant P(A)$ 且 $P(AB)\leqslant P(B)$. 从而 $P(AB)\leqslant\dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

8. 设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2$, $EY=1$, $DX=3$, 则 $E[X(X+Y-2)]=$( )

(A) -3.　　(B) 3.　　(C) -5.　　(D) 5.

解. 应选 (D). 直接计算可得

$$\begin{aligned}E[X(X+Y-2)]&=E(X^2+XY-2X)=E(X^2)+E(XY)-2E(X)\\&=D(X)+E^2(X)+E(X)E(Y)-2E(X)\\&=3+2^2+2\times1-2\times2=5.\end{aligned}$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$________.

解. 应填 $-\dfrac{1}{2}$. 由等价无穷小量替换可得

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

10. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$________.

解. 应填 $\dfrac{\pi^2}{4}$. 由定积分的奇偶对称性可得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}.$$

11. 若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$________.

解. 应填 $-\mathrm{d}x$. 令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z+xyz+x+\cos x-2$，则

$$F'_x(x,y,z)=yz+1-\sin x,\quad F'_y=xz,\quad F'_z(x,y,z)=\mathrm{e}^z+xy.$$

当 $x=0,y=1$ 时，$z=0$. 所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=-\frac{F'_x(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)}=-1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=-\frac{F'_y(0,1,0)}{F'_z(0,1,0)}=0.$$

因此 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=-\mathrm{d}x$.

12. 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面平面所围成的空间区域, 则 $\iiint_\Omega (x+2y+3z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=$________.

解. 应填 $\frac{1}{4}$. 由轮换对称性，并由平行 xOy 面的截面为直角三角形，可得

$$\iiint_\Omega (x+2y+3z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=6\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=6\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\mathrm{d}z=3\int_0^1(z^3-2z^2+z)\mathrm{d}z=\frac{1}{4}.$$

13. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2\\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}=$________.

解. 应填 $2^{n+1}-2$. 将行列式按第一行展开得

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2\\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2\\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}=2D_{n-1}+(-1)^{n+1}2(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2$$

$$=2(2D_{n-2}+2)+2=2^2D_{n-2}+2^2+2=2^n+2^{n-1}+\cdots+2=2^{n+1}-2.$$

14. 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1,0)$,则 $P\{XY-Y<0\}=$________.

解. 应填 $\frac{1}{2}$. 由题设知 $X\sim N(1,1)$，$Y\sim N(0,1)$；且由相关系数为 0 知 X 和 Y 相互独立，从而

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1>0,Y<0\}+P\{X-1<0,Y>0\}$$

$$=P\{X>1\}P\{Y<0\}+P\{X<1\}P\{Y>0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

三、解答题（15～23 题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

解. 由常用函数的泰勒公式得

$$\begin{aligned}1&=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\ln(1+x)+bx\sin x}{kx^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{x+a\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)+bx\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)}{kx^3}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{(1+a)x+\left(b-\frac{a}{2}\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o\left(x^3\right)}{kx^3}\end{aligned}$$

所以有 $1+a=0, b-\frac{a}{2}=0, \frac{a}{3k}=1$．解得 $a=-1, b=-\frac{1}{2}, k=-\frac{1}{3}$.

16.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零, 若对任意的 $x_0\in I$, 由线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0,f(x_0)\right)$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f(0)=2$，求 $f(x)$ 的表达式.

解. 由线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0,f(x_0)\right)$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

该切线与 x 轴交点为 $x_1=-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}+x_0$．依题意有

$$\frac{1}{2}|f(x_0)|\cdot|x_0-x_1|=4 \quad\Rightarrow\quad f'(x_0)=\frac{1}{8}\left[f(x_0)\right]^2.$$

即 $f(x)$ 满足一阶微分方程 $y'=\frac{y^2}{8}$．分离变量后可得通解 $\frac{1}{y}=-\frac{1}{8}x+C$．再由 $y(0)=2$ 可得 $C=\frac{1}{2}$，因此 $\frac{1}{y}=-\frac{1}{8}x+\frac{1}{2}$，即 $f(x)=\frac{8}{4-x}$.

17.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C: x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解. 函数 $f(x,y)$ 沿梯度方向的方向导数最大, 且最大值为梯度的模. 因为 $f'_x(x,y)=1+y$，$f'_y(x,y)=1+x$，所以

$$|\operatorname{grad} f(x,y)|=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}.$$

问题转化为求 $g(x,y)=\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ 在约束条件 $C: x^2+y^2+xy=3$ 下的最大值．构造函数

$$F(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda\left(x^2+y^2+xy-3\right),$$

解方程组

$$\begin{cases} F_x' = 2(1+x)+\lambda(2x+y)=0, \\ F_y' = 2(1+y)+\lambda(2y+x)=0, \\ F_\lambda' = x^2+y^2+xy-3=0, \end{cases}$$

得到四个可能的极值点 $(1,1),(-1,-1),(2,-1),(-1,2)$. 因为

$$|\operatorname{grad} f(1,1)| = 2\sqrt{2}, \qquad |\operatorname{grad} f(-1,-1)| = 0,$$

$$|\operatorname{grad} f(2,-1)| = 3, \qquad |\operatorname{grad} f(-1,2)| = 3,$$

所以最大方向导数为 3.

18. (本题满分 10 分)

(I) 设函数 $u(x), v(x)$ 可导,利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

(II) 设函数 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ 可导, $f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$, 写出 $f(x)$ 的求导公式.

解. (I) 因为 $u(x), v(x)$ 可导, 所以

$$\begin{aligned} [u(x)v(x)]' &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)[v(x+h)-v(x)]+[u(x+h)-u(x)]v(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x) \\ &= u(x)v'(x)+u'(x)v(x). \end{aligned}$$

(II) 由题意得

$$\begin{aligned} f'(x) &= [u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)]' \\ &= u_1'(x)u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)u_2(x)\cdots u_n'(x). \end{aligned}$$

19. (本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$ 起点为 $A\left(0,\sqrt{2},0\right)$,终点为 $B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$,

计算曲线积分 $I=\int_L (y+z)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2+y\right)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$.

解. 曲线的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \\ z=\cos\theta, \end{cases}$ (θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 $-\frac{\pi}{2}$). 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left[-(\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta+2\sin\theta\cos\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left[-\sqrt{2}\sin^2\theta+\sin\theta\cos\theta+(1+\sin^2\theta)\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

$$=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi.$$

20.（本题满 11 分）设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 R^3 的一个基,

$$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3,\quad \beta_2=2\alpha_2,\quad \beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3.$$

(I) 证明向量组 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基;

(II) 当 k 为何值时, 存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同, 并求所有的 ξ.

解. (I) 依题意有

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(2\alpha_1+2k\alpha_3,2\alpha_2,\alpha_1+(k+1)\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P,$$

其中 $P=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$. 因为 $|P|=4\neq0$, 所以 β_1,β_2,β_3 为 R^3 的一个基.

(II) 设 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标向量为 x, 则有

$$\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)x=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)x=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)Px.$$

所以 $(P-E)x=0$. 对 $P-E$ 作初等行变换得

$$P-E=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&-k\end{pmatrix}.$$

所以当 $k=0$ 时 $(P-E)x=0$ 有非零解 $x=c(1,0,-1)^T$, c 为任意非零常数. 此时 $\xi=c(\alpha_1-\alpha_3)$, $c\neq0$.

21.（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

(I) 求 a,b 的值; (II) 求可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解. (I) 由 $A\sim B$ 可得

$$\begin{cases}\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(B),\\|A|=|B|.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3+a=2+b,\\2a-b=3.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=4,\\b=5.\end{cases}$$

(II) 由 $|\lambda E-A|=0$ 可得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=5$. 当 $\lambda=0$ 时, 求得基础解系为 $\xi_1=(2,1,0)^T$, $\xi_2=(-3,0,1)^T$; 当 $\lambda=5$ 时, 求得基础解系为 $\xi_3=(-1,-1,1)^T$. 因此令

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&5\end{pmatrix}.$$

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止．记 Y 为观测次数．

(I) 求 Y 的概率分布；(II) 求 EY．

解. (I) 记 p 为观测值大于 3 的概率，则

$$p=P(X>3)=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln 2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8},$$

从而 Y 的概率分布为

$$P\{Y=n\}=C_{n-1}^1 p(1-p)^{n-2}p=(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2},\quad n=2,3,\cdots$$

(II) 由离散型数学期望的公式得

$$E(Y)=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot P\{Y=n\}=\sum_{n=2}^{\infty}n\cdot(n-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{n-2}$$

$$=\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}=\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}=\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{2}{(1-x)^3}\Bigg|_{x=\frac{7}{8}}=16.$$

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计量；(II) 求 θ 的最大似然估计量.

解. (I) 总体的数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)\,\mathrm{d}x=\int_\theta^1 x\cdot\frac{1}{1-\theta}\,\mathrm{d}x=\frac{1+\theta}{2}.$$

令 $E(X)=\overline{X}$，即 $\dfrac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，解得 $\widehat{\theta}=2\overline{X}-1$ 为 θ 的矩估计量.

(II) 似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i;\theta)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{1-\theta}\right)^n, & \theta\leqslant x_i\leqslant 1\,(i=1,2,\cdots,n);\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

当 $\theta\leqslant x_i\leqslant 1$（$i=1,2,\cdots,n$）时，$\ln L(\theta)=-n\ln(1-\theta)$．从而

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{1-\theta}>0,$$

即 $\ln L(\theta)$ 关于 θ 单调增加．所以当 $\theta=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 时 $L(\theta)$ 达到最大值，故 θ 的最大似然估计量为 $\widehat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

二〇一六年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\,\mathrm{d}x$ 收敛，则 ( )

(A) $a<1$ 且 $b>1$.　　(B) $a>1$ 且 $b>1$.

(C) $a<1$ 且 $a+b>1$.　　(D) $a>1$ 且 $a+b>1$.

解. 应选 (C). 由积分的区间可加性有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\,\mathrm{d}x=\int_0^{1}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\,\mathrm{d}x.$$

由积分 $\int_0^1\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 仅在 $p<1$ 时收敛，可知 $a<1$，此时 $(1+x)^b$ 不影响敛散性. 同理，因为

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}\,\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{a+b}\left(1+\frac{1}{x}\right)^b}\,\mathrm{d}x,$$

所以由 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 仅在 $p>1$ 时收敛，可知 $a+b>1$，此时 $\left(1+\frac{1}{x}\right)^b$ 不影响敛散性.

2. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ( )

(A) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1), & x\geqslant 1\end{cases}$.　　(B) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x+1)-1, & x\geqslant 1\end{cases}$.

(C) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x+1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$.　　(D) $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1\\ x(\ln x-1)+1, & x\geqslant 1\end{cases}$.

解. 应选 (D). 由题设，分段积分可得

$$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2+C_1, & x<1;\\ x(\ln x-1)+C_2, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

由原函数的连续性有 $C_2=C_1+1$. 取 $C_1=0$，即得选项 (D).

3. 若 $y_1=\left(1+x^2\right)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y_2=\left(1+x^2\right)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$ ( )

(A) $3x\left(1+x^2\right)$.　　(B) $-3x\left(1+x^2\right)$.　　(C) $\frac{x}{1+x^2}$.　　(D) $-\frac{x}{1+x^2}$.

解. 应选 (A). 由解的结构性质，$y_2-y_1=2\sqrt{1+x^2}$ 是 $y'+p(x)y=0$ 的解，代入方程解得 $p(x)=-\frac{x}{1+x^2}$. 又 $\frac{y_1+y_2}{2}=2\left(1+x^2\right)^2$ 是 $y'+p(x)y=q(x)$ 的解，代入方程解得 $q(x)=3x\left(1+x^2\right)$.

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\leqslant 0, \\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots, \end{cases}$ 则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. (B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导. (D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

解. 应选 (D). 首先求左导数:

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-0}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x-0}{x-0}=1.$$

其次求右导数：当 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$ 时有 $f(x)=\dfrac{1}{n}$，故 $1<\dfrac{f(x)}{x}<\dfrac{n+1}{n}$. 当 $x\to 0^+$ 时 $n\to\infty$，从而令 $x\to 0^+$ 即得 $f'_+(0)=1$. 因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

5. 设 A，B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) A^T 与 B^T 相似. (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似.

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似. (D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似.

解. 应选 (C). 由 A 与 B 相似可知，存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$. 则有

$$B^T=(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^T)^{-1} \quad\Rightarrow\quad A^T\sim B^T,$$

$$B^{-1}=(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}P \quad\Rightarrow\quad A^{-1}\sim B^{-1},$$

$$B+B^{-1}=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=P^{-1}(A+A^{-1})P \quad\Rightarrow\quad A+A^{-1}\sim B+B^{-1},$$

因此 (A)，(B)，(D) 选项的结论都是正确的.

6. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) 单叶双曲面. (B) 双叶双曲面. (C) 椭球面. (D) 柱面.

解. 应选 (B). 二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$. 由 $|\lambda E-A|=0$，可得其特征值为 $\lambda_1=5,\lambda_2=\lambda_3=-1$，因此二次型的规范形为 $f=z_1^2-z_2^2-z_3^2$，即曲面可表示为 $z_1^2-z_2^2-z_3^2=2$，即 $\dfrac{z_1^2}{(\sqrt{2})^2}-\dfrac{z_2^2}{(\sqrt{2})^2}-\dfrac{z_3^2}{(\sqrt{2})^2}=1$，它是双叶双曲面.

7. 设随机变量 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ $(\sigma>0)$，记 $p=P\left\{X\leqslant\mu+\sigma^2\right\}$，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) p 随着 μ 的增加而增加. (B) p 随着 σ 的增加而增加.

(C) p 随着 μ 的增加而减少. (D) p 随着 σ 的增加而减少.

解. 应选 (B). 因为 $P\{X\leqslant\mu+\sigma^2\}=P\left\{\dfrac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\sigma\right\}=\Phi(\sigma)$，所以概率 p 随着 σ 的增加而增加.

8. 随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1, A_2, A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为…………………（　）

(A) $-\frac{1}{2}$.　　(B) $-\frac{1}{3}$.　　(C) $\frac{1}{3}$.　　(D) $\frac{1}{2}$.

解. 应选 (A). 由题设 $X \sim B\left(2, \frac{1}{3}\right)$，$Y \sim B\left(2, \frac{1}{3}\right)$，从而

$$EX = EY = \frac{2}{3}, \quad DX = DY = \frac{4}{9}.$$

由因为 XY 仅当 $X = 1$ 且 $Y = 1$ 时非零，所以

$$E(XY) = 1 \cdot 1 \cdot P\{X = 1, Y = 1\} = \frac{2}{9}.$$

所以 X 与 Y 的相关系数为

$$\rho_{XY} = \frac{E(XY) - EX \cdot EY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}} = -\frac{1}{2}.$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x^2} =$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{2}$. 由等价无穷小与洛必达法则得

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{1-\cos x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{2}x^4}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{x\sin x}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

10. 向量场 $A(x,y,z) = (x+y+z)\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathrm{rot}\,A =$ ________.

解. 应填 $(0,1,y-1)$. 由旋度公式得

$$\mathrm{rot}\,A = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0,1,y-1).$$

11. 设函数 $f(u,v)$ 可微，$z = z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z,y)$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)} =$ ________.

解. 应填 $-\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y$. 在方程两边分别关于 x, y 求导得

$$z + (x+1)z'_x = 2xf(x-z,y) + x^2 f'_1(x-z,y)(1-z'_x),$$

$$(x+1)z'_y - 2y = x^2[f'_1(x-z,y)(-z'_y) + f'_2(x-z,y)].$$

将 $x = 0, y = 1, z = 1$ 代入得 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)} = -\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}y$.

12. 设函数 $f(x)=\arctan x-\frac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{2}$. 由麦克劳林公式可得

$$f(x)=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)-x\left(1-ax^2+o(x^2)\right)=\left(a-\frac{1}{3}\right)x^3+o(x^3),$$

所以 $a-\frac{1}{3}=\frac{f'''(0)}{3!}=\frac{1}{6}$，解得 $a=\frac{1}{2}$.

13. 行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$ ________.

解. 应填 $\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$. 将行列式按第一列展开计算:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} &= \lambda\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}+4\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4.\end{aligned}$$

14. 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 ________.

解. 应填 $(8.2,10.8)$. 因为 μ 的双侧置信区间关于样本均值对称，所以置信下限为 $9.5\times2-10.8=8.2$，从而置信区间为 $(8.2,10.8)$.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15. （本题满分 10 分）

已知平面区域 $D=\left\{(r,\theta)\middle|2\leqslant r\leqslant 2(1+\cos\theta),-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，

计算二重积分 $\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解. 化为极坐标来计算:

$$\begin{aligned}\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_2^{2(1+\cos\theta)} r^2\cos\theta\,\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\left[\frac{r^3}{3}\right]_2^{2(1+\cos\theta)}\mathrm{d}\theta \\ &=\frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &=\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(3\cos^2\theta+3\cos^3\theta+\cos^4\theta\right)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$=\frac{16}{3}\left(3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}+3\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=5\pi+\frac{32}{3}.$$

16.（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

(I) 证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(II) 若 $y(0)=1$，$y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x$ 的值.

解. (I) 特征方程为 $r^2+2r+k=0$，由 $0<k<1$ 可知，特征方程有两个不相同的特征根 $r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k}$ 且 $r_{1,2}<0$. 故通解为 $y(x)=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$，进而

$$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}[C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}]\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} C_1\mathrm{e}^{r_1x}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty} C_2\mathrm{e}^{r_2x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{C_1}{r_1}\left[\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{r_1x}-1\right]+\frac{C_2}{r_2}\left[\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{r_2x}-1\right]=-\frac{C_1}{r_1}-\frac{C_2}{r_2}.$$

故反常积分收敛.

(II) 由 $y(x)=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}$，$y(0)=1$，$y'(0)=1$，可得

$$\begin{cases}C_1+C_2=1,\\ C_1r_1+C_2r_2=1,\\ r_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-k}.\end{cases}$$

解得 $C_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{1-k}}$，$C_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{1-k}}$. 代入可得

$$\int_0^{+\infty} y(x)\mathrm{d}x=-\frac{C_1}{r_1}-\frac{C_2}{r_2}=\frac{3}{k}.$$

17.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$. L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$ 的最小值.

解. 由 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$ 可知

$$f(x,y)=\mathrm{e}^{-y}\left(\int 2x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\right)+\varphi(y)$$
$$=\mathrm{e}^{-y}\left(\int 2x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\right)+\varphi(y)$$
$$=\mathrm{e}^{-y}\left(x\mathrm{e}^{2x}-\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+\int\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x\right)+\varphi(y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+\varphi(y).$$

又 $f(0,y)=y+1$，可知 $\varphi(y)=y+1$，因此 $f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+y+1$. 从而

$$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y=\int_{L_t}\mathrm{d}\big(f(x,y)\big)$$
$$=f(1,t)-f(0,0)=\mathrm{e}^{2-t}+t.$$

令 $I'(t)=-e^{2-t}+1=1$ 得 $t=2$. 又 $I''(t)=e^{2-t}$，故 $I''(2)=1>0$. 因此 $t=2$ 时 $I(t)$ 有最小值 $I(2)=3$.

18.（本题满分 10 分）

设有界区域 Ω 由平面 $2x+y+2z=2$ 与三个坐标平面围成，Σ 为 Ω 整个表面的外侧，计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解. 由高斯公式可知

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-2y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+3z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}(2x+1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{1-x-\frac{y}{2}}(2x+1)\mathrm{d}z=\iint_{D_{xy}}\left(2x^2+x-xy-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-2x}\left(2x^2+x-xy-\frac{y}{2}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

19.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=1$，$0<f'(x)<\frac{1}{2}$，设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f(x_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：

(I) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛；(II) $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在，且 $0<\lim_{n\to\infty}x_n<2$.

解. (I) 因为 $x_{n+1}=f(x_n)$. 所以由拉格朗日中值定理得

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-x_n|&=\left|f(x_n)-f(x_{n-1})\right|=\left|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})\right|\\&<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}|<\frac{1}{2^2}|x_{n-1}-x_{n-2}|<\cdots<\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|.\end{aligned}$$

故由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ 收敛可知 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 绝对收敛.

(II) 记 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_n=x_{n+1}-x_1$，由 (I) 可知 $\lim_{n\to\infty}S_n$ 存在，则 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=A$. 对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边取极限，可得 $A=f(A)$. 由拉格朗日中值定理可得

$$f(A)-f(0)=f'(\xi)(A-0)\quad\Rightarrow\quad A-1=f'(\xi)A\quad\Rightarrow\quad f'(\xi)=\frac{A-1}{A}.$$

由已知 $0<f'(\xi)<\frac{1}{2}$，故 $0<\frac{A-1}{A}<\frac{1}{2}$，解得 $1<A<2$，即 $1<\lim_{n\to\infty}x_n<2$.

20.（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix}$. 当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

解. 对 $AX=B$ 的增广矩阵作初等变换

$$(A,B)\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&a+2&3&-3&a-4\\0&0&a-1&1-a&0\end{pmatrix}.$$

(I) 当 $|A|=(a+2)(a-1)\neq 0$，即 $a\neq -2$ 且 $a\neq 1$ 时，方程有唯一解．此时

$$(A,B)\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&\frac{3a}{a+2}\\0&1&0&0&\frac{a-4}{a+2}\\0&0&1&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\quad X=\begin{pmatrix}1&\frac{3a}{a+2}\\0&\frac{a-4}{a+2}\\-1&0\end{pmatrix}.$$

(II) 当 $a=-2$ 时，代入并继续作初等变换得

$$(A,B)\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&-3&3&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&0&3&-3&-6\\0&0&0&0&-6\end{pmatrix}.$$

此时 $r(A)=2<r(A,B)=3$，方程无解.

(III) 当 $a=1$ 时，代入并继续作初等变换得

$$(A,B)\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&2&2\\0&3&3&-3&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1&1\\0&1&1&-1&-1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

此时方程有无穷多解，且 $X=\begin{pmatrix}1&1\\-k_1-1&-k_2-1\\k_1&k_2\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

21. (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(I) 求 A^{99};

(II) 设 3 阶矩阵 $B=(\alpha,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$，记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

解. (I) 由 $|\lambda E-A|=0$，可得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$．对这三个特征值，分别求得它们各自对应的一个特征向量

$$\gamma_1=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix},\quad\gamma_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad\gamma_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

令 $P=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}$，则由 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$，可得 $A=P\Lambda P^{-1}$，故有

$$A^{99}=(P\Lambda P^{-1})^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\2&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2^{99}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{2}\\2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

(II) 由 $B^2=BA$ 得 $B^{100}=BA^{99}$，由 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ 得

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{99}$$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

由此得到

$$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2,$$

$$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2,$$

$$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2.$$

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\middle|0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，令 $U=\begin{cases}1, & X\leqslant Y;\\0, & X>Y.\end{cases}$

(I) 写出 (X,Y) 的概率密度；

(II) 问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

(III) 求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

解. (I) 区域 D 的面积 $S_D=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}$，因为 (X,Y) 服从区域 D 上的均匀分布，所以概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}3, & x^2<y<\sqrt{x};\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(II) U 与 X 不相互独立．因为

$$P\left\{U\leqslant\frac{1}{2}\right\}=P\{X>Y\}=\int_0^1 3\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

$$P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}3\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{8},$$

$$P\left\{U\leqslant\frac{1}{2},X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=P\left\{U=0,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=P\left\{X>Y,X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}3\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

所以 $P\left\{U\leqslant\frac{1}{2},X\leqslant\frac{1}{2}\right\}\neq P\left\{U\leqslant\frac{1}{2}\right\}P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$，故 U 与 X 不独立.

(III) 由分布函数的定义可得

$$F(z)=P\{U+X\leqslant z\}=P\{U+X\leqslant z,U=0\}+P\{U+X\leqslant z,U=1\}$$

$$=P\{X\leqslant z,X>Y\}+P\{1+X\leqslant z,X\leqslant Y\}.$$

分情形讨论可求得

$$P\{X\leqslant z,X>Y\}=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\ \frac{1}{2}, & z\geqslant 1;\end{cases}$$

$$P\{X+1\leqslant z,X\leqslant Y\}=\begin{cases}0, & z<1,\\ 2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2,\\ \frac{1}{2}, & z\geqslant 2.\end{cases}$$

因此所求的分布函数

$$F(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\leqslant z<1,\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2, & 1\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$$

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3}, & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max\{X_1,X_2,X_3\}$.

(I) 求 T 的概率密度；(II) 确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计.

解. (I) 根据题意，X_1,X_2,X_3 独立同分布，T 的分布函数为

$$F_T(t)=P\{\max\{X_1,X_2,X_3\}\leqslant t\}=P\{X_1\leqslant t,X_2\leqslant t,X_3\leqslant t\}$$

$$=P\{X_1\leqslant t\}P\{X_2\leqslant t\}P\{X_3\leqslant t\}=(P\{X\leqslant t\})^3.$$

当 $t<0$ 时，$F_T(t)=0$；当 $t\geqslant 0$ 时，$F_T(t)=1$；当 $0<t<\theta$ 时，

$$F_T(t)=\left(\int_0^t\frac{3x^2}{\theta^3}\mathrm{d}\theta\right)^3=\frac{t^9}{\theta^9}.$$

所以 T 的概率密度

$$f_T(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(II) 欲使 aT 为 θ 的无偏估计，得有

$$\theta=E(aT)=aET=a\int_0^{\theta}t\frac{9t^8}{\theta^9}\,\mathrm{d}t=\frac{9}{10}a\theta,$$

解得 $a=\dfrac{10}{9}$.

二〇一七年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\leqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则…………………（　）

(A) $ab=\frac{1}{2}$.　　(B) $ab=-\frac{1}{2}$.　　(C) $ab=0$.　　(D) $ab=2$.

解. 应选 (A)．由连续的定义可得 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$，即

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2}{ax}=\frac{1}{2a}=b,$$

从而 $ab=\frac{1}{2}$.

2. 若函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$，则……………………………（　）

(A) $f(1)>f(-1)$.　　(B) $f(1)<f(-1)$.

(C) $\left|f(1)\right|>\left|f(-1)\right|$.　　(D) $\left|f(1)\right|<\left|f(-1)\right|$.

解. 应选 (C)．令 $F(x)=f^2(x)$，则有 $F'(x)=2f(x)f'(x)$，故 $F(x)$ 单调递增，从而 $F(1)>F(-1)$，即 $[f(1)]^2>[f(-1)]^2$，即 $\left|f(1)\right|>\left|f(-1)\right|$.

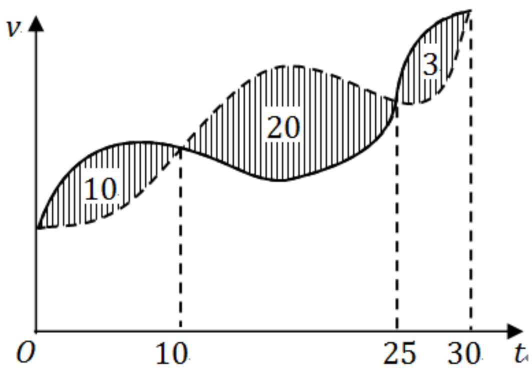
3. 函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $u=(1,2,2)$ 的方向导数为··（　）

(A) 12.　　(B) 6.　　(C) 4.　　(D) 2.

解. 应选 (D)．$\mathrm{grad}\,f=(2xy,x^2,2z)$，将点 $(1,2,0)$ 代入得 $\mathrm{grad}\,f\big|_{(1,2,0)}=(4,1,0)$，则

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\mathrm{grad}\,f\cdot\frac{u}{|u|}=(4,1,0)\cdot\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=2.$$

4. 甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：m）处，图中实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：m/s），虚线表示乙的速度 $v=v_2(t)$，三块阴影部分面积的数值依次为 10、20、3，计时开始后乙追上甲的时刻记为 t_0（单位：s），则………………………………………………（　）



(A) $t_0=10$.　　(B) $15<t_0<20$.　　(C) $t_0=25$.　　(D) $t_0>25$.

解. 应选 (C). 从 0 到 t_0 时刻，甲乙的位移分别为 $\int_0^{t_0} v_1(t)\mathrm{d}t$ 与 $\int_0^{t_0} v_2(t)\mathrm{d}t$. 要使乙追上甲，则有 $\int_0^{t_0}[v_2(t)-v_1(t)]\mathrm{d}t$，由定积分的几何意义可知

$$\int_0^{25}[v_2(t)-v_1(t)]\mathrm{d}t=20-10=10,$$

可知 $t_0=25$.

5. 设 α 是 n 维单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $E-\alpha\alpha^T$ 不可逆.　　(B) $E+\alpha\alpha^T$ 不可逆.

(C) $E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆.　　(D) $E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆.

解. 应选 (A). 因为 $\alpha\alpha^T$ 的秩为 1，所以它有 $n-1$ 个特征值为 0，而另一个特征值为 1. 从而 $E-\alpha\alpha^T$ 的特征值为 $n-1$ 个 1 和 1 个 0，故 $E-\alpha\alpha^T$ 不可逆.

6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则$\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) A 与 C 相似，B 与 C 相似.　　(B) A 与 C 相似，B 与 C 不相似.

(C) A 与 C 不相似，B 与 C 相似.　　(D) A 与 C 不相似，B 与 C 不相似.

解. 应选 (B). 由 $|\lambda E-A|=0$ 可知 A 的特征值为 $2,2,1$. 因为 $3-r(2E-A)=2$，所以 A 可相似对角化，且与 C 相似. 由 $|\lambda E-B|=0$ 可知 B 的特征值为 $2,2,1$. 因为 $3-r(2E-B)=1$，所以 B 不可相似对角化，从而与 C 不相似.

7. 设 A,B 为随机概率，若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则 $P(A|B)>P(A|\bar{B})$ 的充分必要条件是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $P(B|A)>P(B|\bar{A})$.　　(B) $P(B|A)<P(B|\bar{A})$.

(C) $P(\bar{B}|A)>P(B|\bar{A})$.　　(D) $P(\bar{B}|A)<P(B|\bar{A})$.

解. 应选 (A). 由 $P(A|B)>P(A|\overline{B})$ 可得

$$\frac{P(AB)}{P(B)}>\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}\quad\Leftrightarrow\quad P(AB)>P(A)P(B).$$

由公式的对称性知 $P(B|A)>P(B|\overline{A})$ 也等价于 $P(AB)>P(A)P(B)$.

8. 设 $X_1,X_2\cdots X_n(n\geqslant 2)$ 为来自总体 $N(\mu,1)$ 的简单随即样本，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论中不正确的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.　　(B) $2(X_n-X_1)^2$ 服从 χ^2 分布.

(C) $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布.　　(D) $n(\overline{X}-\mu)^2$ 服从 χ^2 分布.

解. 应选 (B). 因为 $X_i-\mu\sim N(0,1)$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n)$, 即选项 (A) 结论正确. 因为 $X_n-X_1\sim N(0,2)$, 所以 $\dfrac{(X_n-X_1)^2}{2}=\left(\dfrac{X_n-X_1}{\sqrt{2}}\right)^2\sim\chi^2(1)$, 即选项 (B) 结论错误. 由 $\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2=(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$, 知选项 (C) 结论正确. 因为 $\overline{X}-\mu\sim N\left(0,\dfrac{1}{n}\right)$, 所以 $n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1)$, 即选项 (D) 结论正确.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 则 $f^{(3)}(0)=$ ________.

解. 应填 0. 因为由麦克劳林公式有

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+o(x^6),$$

所以 $\dfrac{f^{(3)}(0)}{3!}=0$, 即 $f^{(3)}(0)=0$.

10. 微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为 $y=$ ________.

解. 应填 $\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$. 因为微分方程的特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+3=0$, 其解为 $\lambda=\pm\sqrt{2}i-1$, 所以通解为 $y=\mathrm{e}^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$.

11. 若曲线积分 $\displaystyle\int_L\frac{x\,\mathrm{d}x-ay\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关, 则 $a=$ ________.

解. 应填 -1. 因为 $P(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2-1}$, $Q(x,y)=\dfrac{-ay}{x^2+y^2-1}$, 所以

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2},\quad \frac{\partial P}{\partial x}=\frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}.$$

由 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial P}{\partial x}$, 得 $a=-1$.

12. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)=$ ________.

解. 应填 $\dfrac{1}{(1+x)^2}$. 这是因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n\right]'=\left[\dfrac{x}{1+x}\right]'=\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

13. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量组, 则向量组 $A\alpha_1$, $A\alpha_2,A\alpha_3$ 的秩为 ________.

解. 应填 2．依题意矩阵 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，所以

$$r(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=r(A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3))=r(A)=2.$$

14. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$________.

解. 应填 2．因为 $f(x)=F'(x)=0.5\varphi(x)+0.25\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)$，所以

$$\begin{aligned}EX&=0.5\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi(x)\mathrm{d}x+0.25\int_{-\infty}^{+\infty}x\varphi\left(\frac{x-4}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=0+\int_{-\infty}^{+\infty}(t+2)\varphi(t)\mathrm{d}t=2\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(t)\mathrm{d}t=2.\end{aligned}$$

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解. 由复合函数求导法则，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_1'\mathrm{e}^x+f_2'(-\sin x)\quad\Rightarrow\quad\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f_1'(1,1).$$

继续求导可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}&=\mathrm{e}^xf_1'+\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}(f_1')}{\mathrm{d}x}-\cos x f_2'-\sin x\frac{\mathrm{d}(f_2')}{\mathrm{d}x}\\&=\mathrm{e}^xf_1'+\mathrm{e}^x(f_{11}''\mathrm{e}^x-f_{12}''\sin x)-\cos x f_2'-\sin x(f_{21}''\mathrm{e}^x-f_{22}''\sin x)\\&=\mathrm{e}^xf_1'-\cos x f_2'+\mathrm{e}^{2x}f_{11}''-2\mathrm{e}^x\sin x f_{21}''+\sin^2 x f_{22}'',\end{aligned}$$

故有

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=f_1'(1,1)-f_2'(1,1)+f_{11}''(1,1).$$

16.（本题满分 10 分）

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

解. 由定积分的定义和分部积分法可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1x\ln(1+x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\ln(1+x)\mathrm{d}\left(x^2-1\right)=\left[\frac{x^2-1}{2}\ln(1+x)\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2-1}{2}\mathrm{d}(\ln(1+x))$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\left[(x-1)^2\right]_0^1=\frac{1}{4}.$$

17. (本题满分 10 分)

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.

解. 等式两边同时对 x 求导可得

$$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0.$$

令 $y'=0$ 可得 $x=\pm 1$. 对上式两边继续求导可得

$$6x+6y\left(y'\right)^2+3y^2y''+3y''=0.$$

当 $x=1$ 时，$y=1$，$y'=0$；代入上式可得 $y''=-2$，故 $y(1)=1$ 是函数的极大值. 当 $x=-1$ 时，$y=0$，$y'=0$；代入上式可得 $y''=2$，故 $y(-1)=0$ 是函数的极小值.

18. (本题满分 11 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$. 证明：

(I) 方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根.

(II) 方程 $f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

解. (I) 由于 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$，则由保号性可知：$\exists\delta>0$，使得当 $x\in(0,\delta)$ 时，$\dfrac{f(x)}{x}<0$，也即 $f(x)<0$. 又由于 $f(1)>0$，则由零值定理可知，$f(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内至少有一个实根.

(II) 令 $F(x)=f(x)f'(x)$. 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$ 可知 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}\cdot x=0$. 又由 (I) 可知：$\exists x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=0$. 由罗尔定理可知：$\exists\xi_1\in(0,x_0)$ 使 $f'(\xi_1)=0$，从而 $F(0)=F(\xi_1)=F(x_0)=0$. 再由罗尔定理可知：$\exists\xi_2\in(0,\xi_1)$，$\xi_3\in(\xi_1,x_0)$ 使得 $F'(\xi_2)=F'(\xi_3)=0$. 也即 $F'(x)=f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在 $(0,x_0)\subset(0,1)$ 内有两个不同的实根.

19. (本题满分 10 分)

设薄片型物体 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，记圆锥面与柱面的交线为 C.

(I) 求 C 在 xOy 面上的投影曲线的方程； (II) 求 S 的质量 M.

解. (I) 交线 C 的方程为

$$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x. \end{cases}$$

从中消去 z 可得 $x^2+y^2=2x$. 则 C 在 xOy 平面上的投影为 $\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ z=0. \end{cases}$.

(II) 由定积分的物理意义，S 的质量

$$M=\iint_S \mu(x,y,z)\,\mathrm{d}S=\iint_S 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S.$$

将 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 带入可得

$$dS=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\sqrt{2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

曲面在 xOy 面的投影区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2x\}$，所以

$$M=\iint_D 9\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=18\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=18\iint_D r^2\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r=\frac{144}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=64.$$

20.（本题满分 11 分）

设 3 阶矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.

(I) 证明：$r(A)=2$；(II) 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

解. (I) 因为 A 有三个不同的特征值，其中最多只有一个 0，故 $r(A)\geqslant 2$，又因为 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$，所以 $r(A)\leqslant 2$，即 $r(A)=2$.

(II) 因为 $r(A)=2$, 所以 $Ax=0$ 的基础解系只有一个解向量, 又因为 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$, 即 $\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0$, 即基础解系的解向量为 $(1,2,-1)^T$, 又因为 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, 故 $Ax=\beta$ 的特解为 $(1,1,1)^T$，所以 $Ax=\beta$ 的通解为 $k(1,2,-1)^T+(1,1,1)^T$，$k\in\mathbb{R}$.

21.（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

解. 二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$, 因为标准型为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$, 所以 $|A|=0$,

从而 $a+4=6$，即 $a=2$，从而由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=0,$$

可解得 $\lambda=0,-3,6$. 当 $\lambda=0$ 时，对应的特征向量为 $k_1(1,2,1)^T$；当 $\lambda=-3$ 时，对应的特征向量为 $k_2(1,-1,1)^T$；当 $\lambda=6$ 时，对应的特征向量为 $k_3(-1,0,1)^T$；从而正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}\end{pmatrix}.$$

22.（本题满分 11 分）

设随机变量为 X，Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{2}$，Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(I) 求 $P(Y\leqslant EY)$；(II) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解. (I) 由数字特征的公式可知

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 2y^2\mathrm{d}y=\frac{2}{3},$$

则有

$$P\{Y\leqslant EY\}=P\left\{Y\leqslant\frac{2}{3}\right\}=\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}} f(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{2}{3}} 2y\,\mathrm{d}y=\frac{4}{9}.$$

(II) Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{X+Y\leqslant z\}\\&=P\{X=0\}P\{X+Y\leqslant z|X=0\}+P\{X=1\}P\{X+Y\leqslant z|X=1\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant z-1\}=\frac{1}{2}F_Y(z)+\frac{1}{2}F_Y(z-1).\end{aligned}$$

因此 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}f_Y(z)+\frac{1}{2}f_Y(z-1)=\begin{cases}z, & 0<z<1;\\ z-2, & 2<z<3;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

23.（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|\,(i=1,2,\cdots,n)$，利用 $Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$ 估计 σ.

(I) 求 Z_i 的概率密度；

(II) 利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

(III) 求 σ 的最大似然估计量.

解. (I) 因为 $X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$，所以 $Y_i=\frac{X_i-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$. 设 Z_i 的分布函数为 $F(z)$，则当 $z<0$ 时，$F(z)=0$；当 $z\geqslant 0$ 时，

$$\begin{aligned}F(z)=P\{Z_i\leqslant z\}&=P\left\{-\frac{z}{\sigma}\leqslant Y_i\leqslant\frac{z}{\sigma}\right\}\\&=\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{z}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1.\end{aligned}$$

则 Z_i 的概率密度为

$$f(z)=F'(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sigma}\varphi\left(\frac{z}{\sigma}\right), & z\geqslant 0\\ 0, & z<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z\geqslant 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

(II) 因为

$$EZ_i=\int_0^{+\infty} z\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}z=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}},$$

所以 $\sigma=\sqrt{\frac{\pi}{2}}EZ_i$，从而 σ 的矩估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\overline{Z}$.

(III) 由题设知对应的似然函数为

$$L(z_1,z_2,\cdots,z_n,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}},$$

取对数得

$$\ln L=\sum_{i=1}^{n}\left(\ln\sqrt{\frac{2}{\pi}}-\ln\sigma-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}\right).$$

所以由

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\sigma)}{\mathrm{d}\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{\sigma}+\frac{z_i^2}{\sigma^3}\right)=0,$$

得 $\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}z_i^2}$，所以 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}Z_i^2}$.

二〇一八年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是 · ( )

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$.　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.

解. 应选 (D)．由定义得

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=-\frac{1}{2},\quad \lim_{x\to0^-}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=\frac{1}{2}.$$

因此 $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$ 在 $x=0$ 处不可导.

2. 过点 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面为 · · · · · · · · · · · · · · · · ( )

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$.　　(B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$.

(C) $y=x$ 与 $x+y-z=1$.　　(D) $y=x$ 与 $2x+2y-z=2$.

解. 应选 (B)．设切点坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则曲面 $z=x^2+y^2$ 在该点的法向量为 $(2x_0,2y_0,-1)$，因此切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

利用 $z_0=x_0^2+y_0^2$，整理得

$$2x_0x+2y_0y-z-z_0=0.$$

已知平面过 $(1,0,0)$ 和 $(0,1,0)$ 两点，代入平面方程可得 $2x_0=z_0$ 和 $2y_0=z_0$．利用 $z_0=x_0^2+y_0^2$ 可解得 $x_0=y_0=z_0=0$ 或 $x_0=y_0=1,z_0=2$，对应的平面方程为 $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$.

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}=$ · ( )

(A) $\sin1+\cos1$.　　(B) $2\sin1+\cos1$.

(C) $2\sin1+2\cos1$.　　(D) $3\sin1+2\cos1$.

解. 应选 (B)．这是因为

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+3}{(2n+1)!}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+2)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{(2n+1)!}=2\sin1+\cos1.\end{aligned}$$

4. 设 $M=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$, $N=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$, $K=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\sqrt{\cos x}\right)\mathrm{d}x$，则 · · · · · · ( )

(A) $M>N>K$.　　(B) $M>K>N$.　　(C) $K>M>N$.　　(D) $K>N>M$.

解. 应选 (C). 这是因为

$$M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}x=\pi,$$

$$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}x=\pi,$$

$$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\,\mathrm{d}x\geqslant\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1\,\mathrm{d}x=\pi.$$

5. 下列矩阵中，与矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ 相似的为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

解. 应选 (A). 若矩阵相似，则不同特征值对应的矩阵 $\lambda E-A$ 的秩相等. 题设矩阵 M 有三重特征值 $\lambda=1$，而 $r(\lambda E-M)=r(E-M)=2=r(E-A)$.

6. 设 A,B 为 n 阶矩阵，记 $r(X)$ 为矩阵 X 的秩，(X,Y) 表示分块矩阵，则 $\cdots$ (　　)

(A) $r(A,AB)=r(A)$.　(B) $r(A,BA)=r(A)$.

(C) $r(A,B)=\max\{r(A),r(B)\}$.　(D) $r(A,B)=r(A^T,B^T)$.

解. 应选 (A). 因为 $(A,AB)=A(E,B)$，而且 (E,B) 为行满秩矩阵，所以 $r(A,AB)=r(A)$. 或者设 $AB=C$，则矩阵 A 的列向量组可以表示 C 的列向量组，所以 $(A,AB)\to(A,O)$，即 $r(A,AB)=r(A,O)=r(A)$.

7. 设 $f(x)$ 为某分布的概率密度函数，$f(1+x)=f(1-x)$，$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则 $P\{X<0\}=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 0.2.　(B) 0.3.　(C) 0.4.　(D) 0.6.

解. 应选 (A). 由 $f(1+x)=f(1-x)$，可知 $f(x)$ 图像关于 $x=1$ 对称. 因此由 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$ 可得 $P(X\leqslant0)=P(X\geqslant2)=0.2$.

8. 给定总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，σ^2 已知，给定样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，对总体均值 μ 进行检验，令 $H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 若显著性水 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也拒绝 H_0.

(B) 若显著性水 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时拒绝 H_0.

(C) 若显著性水 $\alpha=0.05$ 时拒绝 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时接受 H_0.

(D) 若显著性水 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则 $\alpha=0.01$ 时也接受 H_0.

解. 应选 (D). 若显著性水平 $\alpha=0.05$ 时接受 H_0，则可知检验统计量 $|z|\leqslant z_{0.025}$，此时 $|z|\leqslant z_{0.005}$，从而 $\alpha=0.01$ 时也接受 H_0.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$，则 $k=$________.

解. 应填 -2. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\mathrm{e}$ 得

$$1=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin kx}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{kx}\cdot\frac{-2\tan x}{1+\tan x}\right)=-\frac{2}{k}\quad\Rightarrow\quad k=-2.$$

10. 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数，若曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$ 且与曲线 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切，则 $\displaystyle\int_0^1 xf''(x)\,\mathrm{d}x=$________.

解. 应填 $2\ln 2-2$. 由分部积分法得

$$\begin{aligned}\int_0^1 xf''(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1 x\,\mathrm{d}\big(f'(x)\big)=\big[xf'(x)\big]_0^1-\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\\&=f'(1)-\big[f(x)\big]_0^1=2\ln 2-f(1)+f(0)=2\ln 2-2.\end{aligned}$$

11. 设 $F(x,y,z)=xy\vec{i}-yz\vec{j}+zx\vec{k}$，则 $\operatorname{rot}\vec{F}(1,1,0)=$________.

解. 应填 $(1,0,-1)$. 由旋度定义

$$\operatorname{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy&-yz&xz\end{vmatrix}=(y,-z,-x),$$

所以 $\operatorname{rot}\vec{F}(1,1,0)=(1,0,-1)$.

12. 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\displaystyle\oint_L xy\,\mathrm{d}s=$________.

解. 应填 $-\frac{\pi}{3}$. 由轮换对称性有 $\displaystyle\oint_L xy\,\mathrm{d}s=\oint_L xz\,\mathrm{d}s=\oint_L yz\,\mathrm{d}s$，所以

$$\begin{aligned}\oint_L xy\,\mathrm{d}s=\frac{1}{3}\oint_L(xy+xz+yz)\,\mathrm{d}s&=\frac{1}{6}\oint_L\big[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\big]\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{6}\oint_L(-1)\,\mathrm{d}s=-\frac{1}{6}\cdot 2\pi=-\frac{\pi}{3},\end{aligned}$$

13. 设 2 阶矩阵 A 有两个不同特征值，α_1,α_2 是 A 的线性无关的特征向量，且满足 $A^2(\alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1+\alpha_2)$，则 $|A|=$________.

解. 应填 -1. 设 $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2$，则有

$$\alpha_1+\alpha_2=A^2(\alpha_1+\alpha_2)=AA(\alpha_1+\alpha_2)=A(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=\lambda_1^2\alpha_1+\lambda_2^2\alpha_2.$$

由 α_1 和 α_2 线性无关得 $\lambda_1^2=\lambda_2^2=1$，从而 $\lambda_1=\pm1, \lambda_2=\mp1$，因此 $|A|=-1$.

14. 设随机事件 A 与 B 相互独立，A 与 C 相互独立，$BC=\emptyset$，若

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\quad P(AC|AB\cup C)=\frac{1}{4},$$

则 $P(C)=$________.

解. 应填 $\frac{1}{4}$. 由 $BC=\emptyset$ 可得 $P(ABC)=0$，从而

$$\frac{1}{4}=P(AC|AB\cup C)=\frac{P[(AC)(AB\cup C)]}{P(AB\cup C)}=\frac{P(ABC\cup AC)}{P(AB)+P(C)-P(ABC)}$$

$$=\frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)-P(ABC)}=\frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)}.$$

解得 $P(C)=\frac{1}{4}$.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,dx$.

解. 由分部积分法可得

$$\begin{aligned}
I&=\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\arctan\sqrt{e^x-1}\,d\left(e^{2x}\right)\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\frac{1}{1+(e^x-1)}\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\,dx\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x-1}}\,dx\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\int\left(\sqrt{e^x-1}+\frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\right)d(e^x-1)\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}+2\sqrt{e^x-1}\right)+C\\
&=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{1}{6}(e^x-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}+C.
\end{aligned}$$

16.（本题满分 10 分）

将长为 $2m$ 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

解. 设圆的周长为 x，正三角周长为 y，正方形的周长 z，由题设 $x+y+z=2$. 则目标函数

$$S=\pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{y}{3}\right)^2+\left(\frac{z}{4}\right)^2=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z}{16}^2,$$

故拉格朗日函数为

$$L(x,y,z;\lambda)=\frac{x^2}{4\pi}+\frac{\sqrt{3}}{36}y^2+\frac{z}{16}^2+\lambda(x+y+z-2).$$

从而有

$$\begin{cases}L'_x=\dfrac{x}{2\pi}+\lambda=0,\\ L'_y=\dfrac{2\sqrt{3}y}{36}+\lambda=0,\\ L'_y=\dfrac{2\sqrt{3}y}{36}+\lambda=0,\\ L'_\lambda=x+y+z-2=0,\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x=\dfrac{2\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4},\\ y=\dfrac{6\sqrt{3}\pi}{\pi+3\sqrt{3}+4},\\ z=\dfrac{8}{\pi+3\sqrt{3}+4},\\ \lambda=\dfrac{-1}{\pi+3\sqrt{3}+4}.\end{cases}$$

此时面积和有最小值 $S=\dfrac{1}{\pi+3\sqrt{3}+4}$.

17.（本题满分 10 分）

设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧，计算曲面积分

$$\iint_\Sigma x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(y^3+z\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z+z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解. 构造平面 $\Sigma':\begin{cases}3y^2+3z^2\leqslant 1,\\ x=0,\end{cases}$ 取后侧；设 Σ' 与 Σ 所围成闭区域为 Ω. 记 $P=x$, $Q=y^3+z$, $R=z^3$，则由高斯公式有

$$\begin{aligned}I&=\iint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\oiint_{\Sigma+\Sigma'}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{\Sigma'}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iiint_\Omega(P'_x+Q'_y+R'_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-0=\iiint_\Omega(1+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

用投影法和极坐标计算上面的三重积分得

$$\begin{aligned}I&=\iint_{3y^2+3z^2\leqslant1}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\int_0^{\sqrt{1-3y^2-3z^2}}(1+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}x\\&=\iint_{3y^2+3z^2\leqslant1}\sqrt{1-3y^2-3z^2}\cdot(1+3y^2+3z^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}\cdot(1+3r^2)\cdot r\,\mathrm{d}r\\&=2\pi\left(-\frac{1}{6}\right)\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}\cdot(1+3r^2)\,\mathrm{d}(1-3r^2)\\&=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\sqrt{1-3r^2}\cdot(1-3r^2-2)\,\mathrm{d}(1-3r^2)\end{aligned}$$

$$=\frac{\pi}{3}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left[(1-3r^2)^{\frac{3}{2}}-2(1-3r^2)^{\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}(1-3r^2)$$

$$=\frac{\pi}{3}\left[\frac{2}{5}(1-3r^2)^{\frac{5}{2}}-\frac{4}{3}(1-3r^2)^{\frac{1}{2}}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{14\pi}{45}.$$

18.（本题满分 10 分）

已知微分方程 $y'+y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是 R 上的连续函数.

(I) 若 $f(x)=x$ 时，求微分方程的通解；

(II) 若 $f(x)$ 周期为 T 函数时，证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解.

解. (I) 由一阶线性微分方程的通解公式可得

$$y(x)=\mathrm{e}^{-\int 1\,\mathrm{d}x}\left(\int x\mathrm{e}^{\int 1\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-x}[(x-1)\mathrm{e}^{x}+C]=(x-1)+C\mathrm{e}^{-x}.$$

(II) 设 $f(x+T)=f(x)$，即 T 是 $f(x)$ 的周期. 则通解为

$$y(x)=\mathrm{e}^{-\int 1\,\mathrm{d}x}\left(\int f(x)\mathrm{e}^{\int 1\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int f(x)\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x+C\right).$$

不妨设 $y(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+C\right)$，则有

$$y(x+T)=\mathrm{e}^{-(x+T)}\left(\int_0^{x+T} f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-(x+T)}\left(\int_0^{T} f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_T^{x+T} f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-(x+T)}\left(\int_0^{T} f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_0^{x} f(u+T)\mathrm{e}^{u+T}\,\mathrm{d}u+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-(x+T)}\left(\int_0^{T} f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+\int_0^{x} f(u)\mathrm{e}^{u+T}\,\mathrm{d}u+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-x}\left(\left(\int_0^{T} f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+C\right)\mathrm{e}^{-T}+\int_0^{x} f(u)\mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u\right).$$

欲使 $y(x+T)=y(x)$，则有

$$\left(\int_0^{T} f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t+C\right)\mathrm{e}^{-T}=C \quad\Rightarrow\quad C=\frac{\int_0^T f(t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^T-1}.$$

因此方程存在唯一的以 T 为周期的解.

19.（本题满分 10 分）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$，$x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1$（$n=1,2,\cdots$）. 证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解. 设 $f(x)=e^x-1-x$（$x>0$），则有 $f'(x)=e^x-1>0$，因此 $f(x)>0$，即 $\dfrac{e^x-1}{x}>1$. 假设 $n=k$ 时，有 $x_k>0$，则 $n=k+1$ 时有 $e^{x_{k+1}}=\dfrac{e^{x_k}-1}{x_k}>1$，所以 $x_{k+1}>0$. 因此由数学归纳法知 $x_n>0$，即数列有下界. 又

$$x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n}-\ln e^{x_n}=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}.$$

设 $g(x)=e^x-1-xe^x$，则当 $x>0$ 时有

$$g'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x<0,$$

所以 $g(x)$ 单调递减，$g(x)<g(0)=0$，即有 $e^x-1<xe^x$，因此

$$x_{n+1}-x_n=\ln\frac{e^{x_n}-1}{x_n e^{x_n}}<\ln 1=0,$$

即数列单调递减. 由单调有界准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则有 $Ae^A=e^A-1$；因为 $g(x)=e^x-1-xe^x$ 只有唯一的零点 $x=0$，所以 $A=0$.

20.（本题满分 11 分）

设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$，其中 a 是参数. (I) 求 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解；(II) 求 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

解. (I) 由 $f(x_1,x_2,x_3)=0$ 得

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3=0,\\ x_2+x_3=0,\\ x_1+ax_3=0.\end{cases}$$

对系数矩阵作初等行变换得

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&1\\1&0&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}.$$

当 $a\neq 2$ 时，$r(A)=3$，方程组有唯一解 $x_1=x_2=x_3=0$. 当 $a=2$ 时，$r(A)=2$，方程组有无穷解：$x=k\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数.

(II) 当 $a\neq 2$ 时，令

$$\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3,\\ y_2=x_2+x_3,\\ y_3=x_1+ax_3,\end{cases}$$

这是一个可逆变换，因此其规范形为 $y_1^2+y_2^2+y_3^2$. 当 $a=2$ 时，

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+2x_3)^2\\ &=2x_1^2+2x_2^2+6x_3^2-2x_2x_3+6x_1x_3\\ &=2\left(x_1-\frac{x_2-3x_3}{2}\right)^2+\frac{3(x_2+x_3)^2}{2}.\end{aligned}$$

此时规范形为 $y_1^2+y_2^2$.

21. (本题满分 11 分)

已知 a 是常数,且矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(I) 求 a; (II) 求满足 $AP=B$ 的可逆矩阵 P.

解. (I) 依题意, A 与 B 等价, 则 $r(A)=r(B)$. 又

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&a\\1&3&0\\3&9&0\end{vmatrix}=0,\quad |B|=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&a&2\\0&1&1\\0&a+1&3\end{vmatrix}=2-a.$$

所以由 $|A|=0$ 得 $|B|=0$, 即 $a=2$.

(II) 寻找 P 使得 $AP=B$, 即解矩阵方程 $AX=B$. 作出初等行变换得

$$(A,B)=\begin{pmatrix}1&2&2&1&2&2\\1&3&0&0&1&1\\2&7&-2&-1&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&6&3&4&4\\0&1&-2&-1&-1&-1\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

由此解得

$$P=\begin{pmatrix}-6k_1+3&-6k_2+4&-6k_3+4\\2k_1-1&2k_2-1&2k_3-1\\k_1&k_2&k_3\end{pmatrix}.$$

又 P 可逆, 所以 $|P|\neq 0$, 故 k_1,k_2,k_3 为任意常数, 且 $k_2\neq k_3$.

22. (本题满分 11 分)

已知随机变量 X, Y 相互独立, 且 $P\{X=1\}=P\{X=-1\}=\frac{1}{2}$, Y 服从参数为 λ 的泊松分布, 令 $Z=XY$.

(I) 求 $\mathrm{Cov}(X,Z)$; (II) 求 Z 的概率分布.

解. (I) 由题设可得 $DX=1$, $EY=\lambda$. 所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z)&=\mathrm{Cov}(X,XY)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)\\&=E(X^2)E(Y)-[E(X)]^2E(Y)=D(X)E(Y)=\lambda.\end{aligned}$$

(II) 由条件可知 Z 的取值为所有整数, 则有

$$\begin{aligned}P\{Z=k\}&=P\{XY=k\}\\&=P\{X=1\}P\{XY=k|X=1\}+P\{X=-1\}P\{XY=k|X=-1\}\\&=P\{X=1\}P\{Y=k\}+P\{X=-1\}P\{Y=-k\}\\&=\frac{1}{2}P\{Y=k\}+\frac{1}{2}P\{Y=-k\}.\end{aligned}$$

因为 Y 服从参数为 λ 的泊松分布，所以当 $k=0$ 时有

$$P\{Z=0\}=\frac{1}{2}e^{-\lambda}+\frac{1}{2}e^{-\lambda}=e^{-\lambda};$$

当 $k>0$ 有

$$P\{Z=k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+0=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{2k!};$$

当 $k<0$ 有

$$P\{Z=k\}=0+\frac{1}{2}\frac{\lambda^{-k}e^{-\lambda}}{(-k)!}=\frac{\lambda^{-k}e^{-\lambda}}{2(-k)!}.$$

综上所述，Z 的概率分布为

$$P\{Z=k\}=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{|k|}e^{-\lambda}}{2|k|!}, & k=\pm1,\pm2\cdots;\\ e^{-\lambda}, & k=0.\end{cases}$$

23.（本题满分 11 分）

设 X 的概率密度为

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(I) 求 $\hat{\sigma}$；(II) 求 $E(\hat{\sigma})$，$D(\hat{\sigma})$.

解. (I) 由条件可知，似然函数为

$$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x_i|}{\sigma}}.$$

取对数得

$$\ln L(\sigma)=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[-\ln 2-\ln\sigma-\frac{|x_i|}{\sigma}\right].$$

求导并令导数为零得到

$$\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=\sum_{i=1}^{n}\left[-\frac{1}{\sigma}+\frac{|x_i|}{\sigma^2}\right]=-\frac{n}{\sigma}+\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_1|}{\sigma^2}=0.$$

解得 σ 得极大似然估计 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_1|$.

(II) 由前面已知 $\hat{\sigma}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}|X_1|$，所以

$$E(\hat{\sigma})=E(|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\,dx=\sigma,$$

$$D(\hat{\sigma})=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|X_1|\right)=\frac{1}{n}D(|X|)=\frac{1}{n}\left[E(X^2)-[E(|X|)]^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\frac{1}{2\sigma}e^{-\frac{|x|}{\sigma}}\,dx-\sigma^2\right]=\frac{1}{n}\left[2\sigma^2-\sigma^2\right]=\frac{\sigma^2}{n}.$$

二〇一九年考研数学试卷一解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 当 $x \to 0$ 时，若 $x - \tan x$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 $k = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

解. 应选 (C). 由泰勒公式有

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3) \quad (x \to 0).$$

所以 $x - \tan x = -\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$，从而 $k = 3$.

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leqslant 0; \\ x\ln x, & x > 0. \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 可导点，极值点.　　(B) 不可导的点，极值点.

(C) 可导点，非极值点.　　(D) 不可导点，非极值点.

解. 应选 (B). 因为 $f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x}{x} = -\infty$，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处不可导. 易知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续. 因为当 $x < 0$ 时，$f'(x) = -2x > 0$，$f(x)$ 单调递增；当 $0 < x < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时，$f'(x) = 1 + \ln x < 0$，$f(x)$ 单调减少，所以 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处取得极大值.

3. 设 $\{u_n\}$ 是单调增加的有界数列，则下列级数中收敛的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{u_n}{n}$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{u_n}$.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \dfrac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$.

解. 应选 (D). 由单调有界定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ 存在，从而 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^2$ 存在. 又因为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (u_{k+1}^2 - u_k^2) = u_{n+1}^2 - u_1^2,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1}^2 - u_n^2)$ 收敛.

4. 设函数 $Q(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$，如果对于上半平面 $(y > 0)$ 内任意有向光滑封闭曲线 C 都有 $\oint_C P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0$，那么函数 $P(x, y)$ 可取为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $y - \dfrac{x^2}{y^2}$.　　(B) $\dfrac{1}{y} - \dfrac{x^2}{y^2}$.　　(C) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$.　　(D) $x - \dfrac{1}{y}$.

解. 应选 (D). 由积分与路径无关条件可得

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{y^2} \quad \Rightarrow \quad P(x, y) = -\frac{1}{y} + C(x),$$

其中 $C(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处可导. 因此只有选项 (D)满足条件.

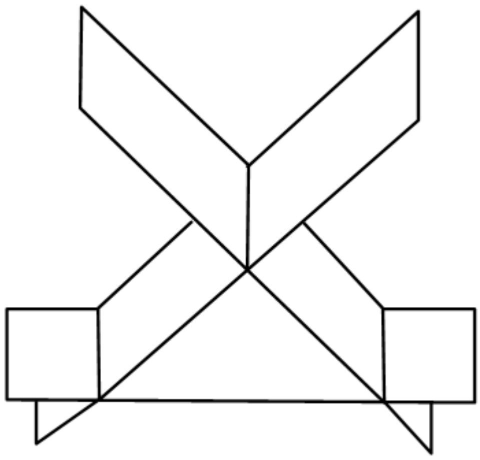
5. 设 A 是三阶实对称矩阵，E 是三阶单位矩阵，若 $A^2+A=2E$，且 $|A|=4$，则二次型 x^TAx 的规范形是$\cdots\cdots$( )

(A) $y_1^2+y_2^2+y_3^2$.　　(B) $y_1^2+y_2^2-y_3^2$.

(C) $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.　　(D) $-y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

解. 应选 (C). 由 $A^2+A=2E$ 可知, A 的特征值 λ 满足 $\lambda^2+\lambda-2=0$, 即 A 的特征值只可能是 1 和 -2. 再由 $|A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=4$ 可知, 三个特征值只能是 $\lambda_1=1,\lambda_2=\lambda_3=-2$. 因此二次型的规范型为 $y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

6. 如图所示, 有 3 张平面两两相交, 交线相互平行, 它们的方程 $a_{i1}x+a_{i2}y+a_{i3}z=d_i$ ($i=1,2,3$) 组成的线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别记为 $A,\overline{A}$，则$\cdot\cdot$( )



(A) $r(A)=2,r(\overline{A})=3$.　　(B) $r(A)=2,r(\overline{A})=2$.

(C) $r(A)=1,r(\overline{A})=2$.　　(D) $r(A)=1,r(\overline{A})=1$.

解. 应选 (A). 因为三个平面没有共同交点，所以非齐次方程组无解，故有 $r(A)<r(\overline{A})\leqslant 3$. 又因为任何两个平面都不平行或重合，所以 $r(A)\geqslant 2$. 从而 $r(A)=2$, $r(\overline{A})=3$.

7. 设 A,B 为随机事件，则 $P(A)=P(B)$ 的充分必要条件是$\cdots\cdots$( )

(A) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$.　　(D) $P(AB)=P(\overline{AB})$.

解. 应选 (C). 因为

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB),\quad P(B\overline{A})=P(B)-P(AB),$$

所以 $P(A\overline{B})=P(B\overline{A})$ 等价于 $P(A)=P(B)$.

8. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$. 则 $P\{|X-Y|<1\}$( )

(A) 与 μ 无关，而与 σ^2 有关.　　(B) 与 μ 有关，而与 σ^2 无关.

(C) 与 μ,σ^2 都有关.　　(D) 与 μ,σ^2 都无关.

解. 应选 (A). 由题设可得 $X-Y\sim N(0,2\sigma^2)$，从而

$$P\{|X-Y|<1\}=P\left\{\frac{-1}{\sqrt{2}\sigma}\leqslant\frac{X-Y}{\sqrt{2}\sigma}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right\}=2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\right)-1$$

与 μ 无关，而只与 σ^2 有关.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 设函数 $f(u)$ 可导，$z=f(\sin y-\sin x)+xy$，则 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

解. 应填 $\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$. 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\cos x\cdot f'(\sin y-\sin x)+y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\cos y\cdot f'(\sin y-\sin x)+x,$$

所以 $\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\cos y}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\cos x}+\frac{x}{\cos y}$.

10. 微分方程 $2yy'-y^2-2=0$ 满足条件 $y(0)=1$ 的特解为 $y=$ ________.

解. 应填 $y=\sqrt{3e^x-2}$. 分离变量并求解得

$$\frac{2y\,\mathrm{d}y}{y^2+2}=\mathrm{d}x\quad\Rightarrow\quad y^2+2=Ce^x.$$

由初始条件 $y(0)=1$ 可得 $C=3$，所以 $y=\sqrt{3e^x-2}$.

11. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n$ 在 $(0,+\infty)$ 内的和函数 $S(x)=$ ________.

解. 应填 $\cos\sqrt{x}$. 由余弦函数的泰勒展开式有

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

从而有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(\sqrt{x})^{2n}=\cos\sqrt{x},\quad x\in(0,+\infty).$$

12. 设 Σ 为曲面 $x^2+y^2+4z^2=4$（$z\geqslant0$）的上侧，则 $\iint_\Sigma\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ________.

解. 应填 $\frac{32}{3}$. 曲面 Σ 在 xOy 平面的投影区域为 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant4\}$，所以

$$\iint_\Sigma\sqrt{4-x^2-4z^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D|y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r=\frac{32}{3}.$$

13. 设 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 为三阶矩阵，若 α_1,α_2 线性无关，且 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$，则线性方程组 $Ax=0$ 的通解为 ________.

解. 应填 $k(1,-2,1)^T$， $k\in R$． 由题设知 A 的秩 $r(A)=2$． 由 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$ 可知

$$A\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}=\alpha_1-2\alpha_2+\alpha_3=0,$$

即 $(1,-2,1)^T$ 为方程组的基础解系，故通解为 $k(1,-2,1)^T$， $k\in R$.

14. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ $F(x)$ 为其分布函数， $E(X)$ 其数学期望，则 $P\{F(X)>E(X)-1\}=$________.

解. 应填 $\frac{2}{3}$． 由题设可得

$$E(X)=\int_0^2\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{3},\quad F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{1}{4}x^2, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

所以

$$P\{F(X)>E(X)-1\}=P\left\{F(X)>\frac{1}{3}\right\}=P\left\{X>\frac{2}{\sqrt{3}}\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

三、解答题（15～23 题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 是微分方程 $y'+xy=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 满足条件 $y(0)=0$ 的特解.

(I) 求 $y(x)$； (II) 求曲线 $y=y(x)$ 的凸凹区间及拐点.

解. (I) 这是一阶线性微分方程． 由通解公式求得 $y=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(x+C)$． 再由初始条件 $y(0)=0$ 可得 $C=0$，从而得到 $y(x)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

(II) 对 $y(x)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$，求导可得

$$y'(x)=\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2),\quad y''(x)=x(x^2-3)\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

令 $y''(x)=0$ 得 $x_1=-\sqrt{3},x_2=0,x_3=\sqrt{3}$. 当 $x<-\sqrt{3}$ 或 $0<x<\sqrt{3}$ 时, $y''<0$, 是曲线是凸的；当 $-\sqrt{3}<x<0$ 或 $x>\sqrt{3}$ 时， $y''>0$，是曲线是凹的． 曲线的拐点有三个，分别为 $\left(-\sqrt{3},-\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$， $(0,0)$， $\left(\sqrt{3},\sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}\right)$.

16.（本题满分 10 分）

设 a,b 为实数，函数 $z=2+ax^2+by^2$ 在点 $(3,4)$ 处的方向导数中，沿方向的方向导数最大，最大值为 10.

(I) 求常数 a,b 之值； (II) 求曲面 $z=2+ax^2+by^2$（$z\geqslant 0$）的面积.

解. (I) 多元函数在一点处方向导数的最大值是沿着梯度方向的方向导数，且最大值等于梯度的模．因为

$$\operatorname{grad} z(3,4)=\left(\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\bigg|_{(3,4)}=(6a,8b),\quad \left|\operatorname{grad} z(3,4)\right|=\sqrt{36a^2+64b^2},$$

所以由条件可得

$$\begin{cases}\dfrac{6a}{-3}=\dfrac{8b}{-4}>0,\\ \sqrt{36a^2+64b^2}=10.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=-1,\\ b=-1.\end{cases}$$

(II) 曲面的面积为

$$S=\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\iint_{x^2+y^2\leqslant 2}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4r^2}\,r\,\mathrm{d}r=\frac{13\pi}{3}.$$

17. (本题满分 10 分)

求曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x\ (x\geqslant 0)$ 与 x 轴之间图形的面积.

解. 由不定积分 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\sin x+\cos x)+C$ 可得所求面积为

$$S=\int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-x}\sin x\right|\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-(t+k\pi)}|\sin(t+k\pi)|\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-k\pi}=\frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+1}{2(\mathrm{e}^{\pi}-1)}.$$

18. (本题满分 10 分)

设 $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\ \ (n=0,1,2,\cdots)$.

(I) 证明：数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ \ (n=2,3,\cdots)$；

(II) 求极限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

解. (I) 当 $x\in(0,1)$ 时，$x^{n+1}<x^n$，所以

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^1(x^{n+1}-x^n)\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x<0,$$

即数列 $\{a_n\}$ 单调减少．设

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\mathrm{d}x,\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

则有 $I_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}I_n$．作积分换元 $x=\sin t$，$t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，则有

$$a_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+2}t\,\mathrm{d}t=I_n-I_{n+2}=\frac{1}{n+2}I_n.$$

同理当 $n\geqslant 2$ 时可得 $a_{n-2}=I_{n-2}-I_n=\frac{1}{n-1}I_n$. 从而有

$$a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}\quad (n=2,3,\cdots).$$

(II) 由 (I) 知数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $n\geqslant 2$ 时 $a_n=\frac{n-1}{n+2}a_{n-2}$. 因此

$$\frac{n-1}{n+2}=\frac{a_n}{a_{n-2}}<\frac{a_n}{a_{n-1}}<\frac{a_n}{a_n}=1.$$

由夹逼准则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n-1}}=1$.

19. (本题满分 10 分)

设 Ω 是由锥面 $x^2+(y-z)^2=(1-z)^2$ $(0\leqslant z\leqslant 1)$ 与平面 $z=0$ 围成的锥体，求 Ω 的形心坐标.

解. 设 $D_z=\left\{(x,y)\middle|x^2+(y-z)^2\leqslant(1-z)^2\right\}$，则由截面法求得

$$\iiint_\Omega 1\,\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\pi(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{3},$$

$$\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0,$$

$$\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{1-z}(z+r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{12},$$

$$\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v=\int_0^1 z\,\mathrm{d}z\iint_{D_z}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\pi z(1-z)^2\,\mathrm{d}z=\frac{\pi}{12}.$$

从而形心的各个坐标依次为

$$\overline{x}=\frac{\iiint_\Omega x\,\mathrm{d}v}{\iiint_\Omega\mathrm{d}v}=0,\quad \overline{y}=\frac{\iiint_\Omega y\,\mathrm{d}v}{\iiint_\Omega\mathrm{d}v}=\frac{1}{4},\quad \overline{z}=\frac{\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}v}{\iiint_\Omega\mathrm{d}v}=\frac{1}{4}.$$

20. (本题满分 11 分)

设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a\\3\end{pmatrix}$ 为 R^3 的一组基，$\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ 在这组基下的坐标为 $\begin{pmatrix}b\\c\\1\end{pmatrix}$.

(I) 求 a,b,c 之值；

(II) 证明：α_2,α_3,β 也为 R^3 的一组基，并求 α_2,α_3,β 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵.

解. (I) 由 $\beta=b\alpha_1+c\alpha_2+\alpha_3$ 可得

$$\begin{cases}b+c+1=1,\\2b+3c+a=1,\\b+2c+3=1.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a=3,\\b=2,\\c=-2.\end{cases}$$

(II) 因为

$$\left|(\alpha_2,\alpha_3,\beta)\right|=\begin{vmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&-2\\0&1&-1\end{vmatrix}=2\neq 0,$$

所以 α_2,α_3,β 线性无关,从而也是 R^3 空间的一组基.设 $(\alpha_2,\alpha_3,\beta)P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$,则从 α_2,α_3,β 到 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的过渡矩阵为

$$P=(\alpha_2,\alpha_3,\beta)^{-1}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\3&3&1\\2&3&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&-1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&3&3\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&1\\\frac{1}{2}&0&0\end{pmatrix}.$$

21.（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}-2&2&1\\2&x&-2\\0&0&-2\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&-1&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似.

(I) 求 x,y 之值; (II) 求可逆矩阵 P, 使得 $P^{-1}AP=B$.

解. (I) 由矩阵相似的性质可得

$$\begin{cases}|A|=|B|,\\\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x-8=-2y,\\-4+x=1+y.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3,\\y=-2.\end{cases}$$

(II) 由 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|=0$ 得矩阵 A 的三个特征值 $\lambda_1=2,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$. 求解 $(\lambda_i E-A)x=0$ $(i=1,2,3)$, 得到三个特征值各自对应的特征向量:

$$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix},\quad\xi_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}.$$

求解 $(\lambda_i E-B)x=0$ $(i=1,2,3)$, 得到三个特征值各自对应的特征向量:

$$\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix},\quad\eta_3=\begin{pmatrix}0\\0\\14\end{pmatrix}.$$

令 $P_1=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$, $P_2=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&3&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. 则 P_1 和

P_2 可逆，且有

$$P_1^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}=P_2^{-1}BP \quad\Rightarrow\quad PP_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=B.$$

因此令 $P=P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-2&-1&2\\0&0&4\end{pmatrix}$，则有 $P^{-1}AP=B$.

22.（本题满分 11 分）

设随机变量 X,Y 相互独立，X 服从参数为 1 的指数分布，Y 的概率分布为：$P\{Y=-1\}=p$，$P\{Y=1\}=1-p$，$(0<p<1)$. 令 $Z=XY$.

(Ⅰ) 求 Z 的概率密度；

(Ⅱ) p 为何值时，X 与 Z 不相关；

(Ⅲ) X 与 Z 是否相互独立?

解. (Ⅰ) X 的概率密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{XY\leqslant z\}&=P\{XY\leqslant z,Y=1\}+P\{XY\leqslant z,Y=-1\}\\&=P\{X\leqslant z\}P\{Y=1\}+P\{X\geqslant -z\}P\{Y=-1\}\\&=(1-p)P\{X\leqslant z\}+pP\{X\geqslant -z\}\\&=(1-p)F_X(z)+p(1-F_X(-z)).\end{aligned}$$

因此 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=pf_X(-z)+(1-p)f_X(z)=\begin{cases}pe^{z}, & z<0;\\ 0, & z=0;\\ (1-p)e^{-z}, & z>0.\end{cases}$$

(Ⅱ) 因为随机变量 X,Y 相互独立，且 $D(X)=1$，$E(Y)=1-2p$，所以

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,Z)&=E(XZ)-E(X)E(Z)=E(X^2Y)-E(X)E(XY)\\&=E(X^2)EY-(EX)^2EY=DX\cdot EY=1-2p.\end{aligned}$$

故 X,Z 不相关等价于 $\mathrm{Cov}(X,Z)=1-2p=0$，即 $p=0.5$.

(Ⅲ) 由 (Ⅱ) 可知，当 $p\neq 0.5$ 时，X 与 Z 是相关的，从而不相互独立. 而当 $p=0.5$ 时，因为

$$P\{X>1\}=\int_1^{+\infty}e^{-x}\,dx=e^{-1},$$

$$P\{Z<1\}=P\{X>-1,Y=-1\}+P\{X<1,Y=1\}=1-\frac{1}{2}e^{-1},$$

$$P\{X>1,Z<1\}=P\{X>1,XY<1\}=P\{X>1\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}e^{-1},$$

从而 X 与 Z 也是不相互独立的.

23.（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x\geqslant\mu,\\ 0, & x<\mu,\end{cases}$$

其中 μ 是已知参数，σ 是未知参数，A 是常数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求常数 A 的值； (II) 求 σ^2 的最大似然估计量.

解. (I) 由概率密度的归一性可知

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,dx=\int_{\mu}^{+\infty}\frac{A}{\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx=A\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}A,$$

所以 $A=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}$.

(II) 似然函数为

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\sigma)=\begin{cases}\dfrac{A^n}{\sigma^n}e^{-\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}, & x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant\mu;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant\mu$ 时，取对数得

$$\ln L(\sigma^2)=n\ln A-\frac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2.$$

对 σ^2 求导并令导数等于零得

$$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2}\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0.$$

解方程得 σ^2 的最大似然估计值为 $\widehat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$，故 σ^2 的最大似然估计量为 $\widehat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$.