一九八七年考研数学试卷四解答

一、判断题（本题满分 10 分，每小题 2 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}} = \infty$. $\cdots\cdots$ [ ]

解. 错误.

2. $\int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x \,dx = 0$. $\cdots\cdots$ [ ]

解. 正确.

3. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 也必发散. $\cdots\cdots$ [ ]

解. 错误.

4. 假设 D 是矩阵 A 的 r 阶子式，且 $D\neq 0$，但含 D 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0，那么矩阵 A 的一切 $r+1$ 阶子式都等于 0. $\cdots\cdots$ [ ]

解. 正确.

5. 连续型随机变量取任何给定实数值的概率都等于 0. $\cdots\cdots$ [ ]

解. 正确.

二、选择题（本题满分 10 分，每小题 2 分）

1. 函数 ( ) 在其定义域内连续.

(A) $f(x)=\ln x+\sin x$

(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0,\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x-1, & x>0\end{cases}$

(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

解. 应选 (A).

2. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，x_1 和 x_2 是区间 (a,b) 内任意两点，且 $x_1<x_2$，则至少存在一点 ξ，使 $\cdots\cdots$ ( )

(A) $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，其中 $a<\xi<b$.

(B) $f(b)-f(x_1)=f'(\xi)(b-x_1)$，其中 $x_1<\xi<b$.

(C) $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$，其中 $x_1<\xi<x_2$.

(D) $f(x_2)-f(a)=f'(\xi)(x_2-a)$，其中 $a<\xi<x_2$.

解. 应选 (C).

3. 广义积分 ( ) 收敛.

(A) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$. (B) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$. (C) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$. (D) $\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$.

解. 应选 (C).

4. 假设 A 是 n 阶方阵，其秩 $r<n$，那么在 A 的 n 个行向量中 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) 必有 r 个行向量线性无关.

(B) 任意 r 个行向量都线性无关.

(C) 任意 r 个行向量都构成极大线性无关向量组.

(D) 任意 r 个行向量都可以由其他 r 个行向量线性表示.

解. 应选 (A).

5. 若二事件 A 和 B 同时出现的概率 $P(AB)=0$，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) A 和 B 不相容（相斥）. (B) AB 是不可能事件.

(C) AB 未必是不可能事件. (D) $P(A)=0$ 或 $P(B)=0$.

解. 应选 (C).

三、计算题（本题满分 16 分，每小题 4 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$.

解. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\exp\left[\frac{\ln(1+x\mathrm{e}^x)}{x}\right]=\mathrm{e}$.

2. $y=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$，求 y'.

解. $\frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$.

3. $z=\arctan\frac{x+y}{x-y}$，求 $\mathrm{d}z$.

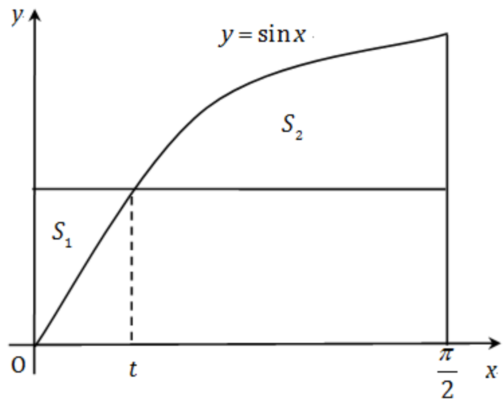
解. $\frac{-y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

4. 求不定积分 $\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x$.

解. $\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}+C$.

四、（本题满分 10 分）

考虑函数 $y=\sin x, 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$（如图），问：



(Ⅰ) t 取何值时，图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 最小？

(Ⅱ) t 取何值时，面积 $S=S_1+S_2$ 最大？

解. (Ⅰ) $t=\frac{\pi}{4}$ 时. $S\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-1$ 最小.

(Ⅱ) $t=0$ 时，$S(0)=1$ 最大.

五、（本题满分 6 分）

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ 展成 x 的幂级数，并指出其收敛区间.

解. $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)x^n$，收敛区间为 $(-1,1)$.

六、（本题满分 5 分）

计算二重积分 $I=\iint_D e^{x^2}\,dx\,dy$，其中 D 是第一象限中由直线 $y=x$ 和 $y=x^3$ 所围成的封闭区域.

解. $I=\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x} e^{x^2}\,dy=\int_0^1 (x-x^3)e^{x^2}\,dx=\dfrac{e}{2}-1.$

七、（本题满分 6 分）

已知某商品的需求量 x 对价格 p 的弹性为 $\eta=-3p^3$，而市场对该商品的最大需求量为 1（万件），求需求函数.

解. 需求函数为 $x=e^{-p^3}$.

八、（本题满分 8 分）

解线性方程组 $\begin{cases}2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4,\\ x_1+x_3-x_4=-3,\\ 3x_1+x_2+x_3=1,\\ 7x_1+7x_3-3x_4=3.\end{cases}$

解. 方程组的通解为 $x=(3,-8,0,6)^T+k(-1,2,1,0)^T$，其中 k 为任意常数.

九、（本题满分 7 分）

假设矩阵 A 和 B 满足如下关系式 $AB=A+2B$，其中 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

解. $B=\begin{pmatrix}3&-8&-6\\2&-9&-6\\-2&12&9\end{pmatrix}$.

十、（本题满分 6 分）

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}-3&-1&2\\0&-1&4\\-1&0&1\end{pmatrix}$ 的实特征值及对应的特征向量.

解. 实特征值为 $\lambda=1$．对应的特征向量为 $k(0,2,1)^T$，k 为任意非零常数.

十一、计算题（本题满分 8 分，每小题 4 分）

1. 已知随机变量 X 的概率分布为

$$P\{X=1\}=0.2,\ P\{X=2\}=0.3,\ P\{X=3\}=0.5,$$

试写出其分布函数 $F(x)$.

解. 分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\0.2, & 1\leqslant x<2;\\0.5, & 2\leqslant x<3;\\1, & x\geqslant 3.\end{cases}$

2. 已知随机变量 Y 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{a^2}e^{-\frac{u^2}{a^2}}, & y>0,\\0, & y\leqslant 0,\end{cases}$ 求随机变量 $Z=\dfrac{1}{Y}$ 的数学期望 EZ.

解. $EZ=\dfrac{\sqrt{2\pi}}{2a}$.

十二、（本题满分 8 分）

假设有两箱同种零件：第一箱内装 50 件，其中 10 件一等品；第二箱内装 30 件，其中 18 件一等品，现从两箱中任意挑出一箱，然后从该箱中先后随机取出两个零件（取出的零件均不放回）．试求：

(I) 先取出的零件是一等品的概率 p;

(II) 在先取出的是一等品的条件下，第二次取出的零件仍然是一等品的条件概率 q.

解. (I) 由全概率公式 $p=\frac{2}{5}$.

(II) 由贝叶斯公式 $q=\frac{690}{1421}$.

一九八七年考研数学试卷五解答

一、判断题（本题满分 10 分，每小题 2 分）

1. 同试卷四第一 [1] 题.

2. 同试卷四第一 [2] 题.

3. 若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内严格单调增加，则对于区间 (a,b) 内的任何一点 x 有 $f'(x)>0$.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$[　]

解. 错误.

4. 若 A 为 n 阶方阵，k 为常数，则 $|kA|=k|A|$.$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$[　]

解. 错误.

5. 同试卷四第一 [5] 题.

二、选择题（本题满分 10 分，每小题 2 分）

1. 函数 (　) 在其定义域内连续.

(A) $f(x)=\dfrac{1}{x}$

(B) $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\leqslant 0;\\ \cos x, & x>0\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ x-1, & x>0\end{cases}$

(D) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$

解. 应选 (A).

2. 同试卷四第二 [2] 题.

3. 同试卷四第二 [3] 题.

4. 同试卷四第二 [4] 题.

5. 对于任意二事件 A 和 B，有 $P(A-B)=$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　)

(A) $P(A)-P(B)$.

(B) $P(A)-P(B)+P(AB)$.

(C) $P(A)-P(AB)$.

(D) $P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})$.

解. 应选 (C).

三、计算题（本题满分 20 分，每小题 4 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\arctan x}$.

解. 极限为 0.

2. 同试卷四第三 [2] 题.

3. 同试卷四第三 [3] 题.

4. 计算定积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\,\mathrm{d}x$.

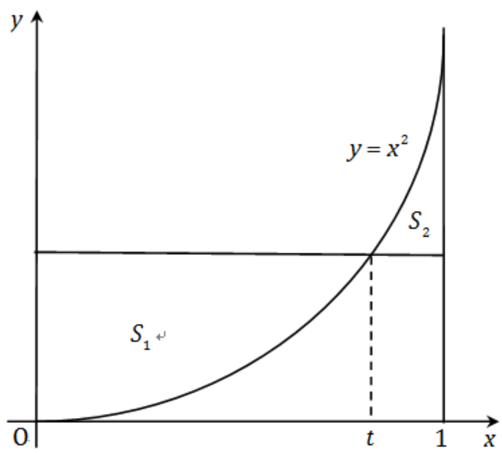
解. 原函数为 $\left(\sqrt{2x-1}-1\right)\mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}+C$，故定积分为 1.

5. 求不定积分 $\int\dfrac{x\,\mathrm{d}x}{x^4+2x^2+5}$.

解. $\dfrac{1}{4}\arctan\dfrac{x^2+1}{2}+C$.

四、（本题满分 10 分）

考虑函数 $y=x^2, 0\leqslant x\leqslant 1$（如图），问:



(I) t 取何值时，图中阴影部分的面积 S_1 与 S_2 之和 $S=S_1+S_2$ 最小?

(II) t 取何值时，面积之和 $S=S_1+S_2$ 最大?

解. (I) 当 $t=\dfrac{1}{2}$ 时，面积 $S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$ 最小.

(II) 当 $t=1$ 时，面积 $S(1)=\dfrac{2}{3}$ 最大.

五、（本题满分 5 分）

同试卷四第六题.

六、（本题满分 8 分）

假设某产品的总成本函数为 $C(x)=400+3x+\frac{1}{2}x^2$，而需求函数为 $p=\frac{100}{\sqrt{x}}$，其中 x 为产量（假定等于需求量），p 为价格．试求：

(Ⅰ) 边际成本； (Ⅱ) 边际效益； (Ⅲ) 边际利润： (Ⅳ) 收益的价格弹性.

解. (Ⅰ) 边际成本 $MC=C'(x)=3+x$；

(Ⅱ) 收益函数 $R(x)=100\sqrt{x}$，边际收益 $MR=R'(x)=\frac{50}{\sqrt{x}}$；

(Ⅲ) 利润函数 $L(x)=100\sqrt{x}-400-3x-\frac{1}{2}x^2$，边际利润 $ML=L'(x)=\frac{50}{\sqrt{x}}-3-x$；

(Ⅳ) 收益的价格函数 $R(x)=100\sqrt{x}=\frac{100^2}{p}$，收益的价格弹性 $\frac{p}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=-1$.

七、（本题满分 8 分）

同试卷四第八题.

八、（本题满分 7 分）

同试卷四第九题.

九、（本题满分 6 分）

同试卷四第十题.

十、（本题满分 8 分）

已知离散型随机变量 X 的概率分布为：

$$P\{X=1\}=0.2,\ P\{X=2\}=0.3,\ P\{X=3\}=0.5.$$

(Ⅰ) 写出 X 的分布函数 $F(x)$； (Ⅱ) 求 X 的数学期望和方差.

解. (Ⅰ) 分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<1;\\ 0.2, & 1\leqslant x<2;\\ 0.5, & 2\leqslant x<3;\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$

(Ⅱ) $EX=2.3$，$DX=0.61$.

十一、（本题满分 8 分）

同试卷四第十二 [1] 题.

一九八八年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题满分 12 分，每空 1 分）

1. 已知函数 $f(x)=\int_0^x e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$，$-\infty<x<+\infty$，则

(a) $f'(x)=$ ________;

(b) $f(x)$ 的单调性：________;

(c) $f(x)$ 的奇偶性：________;

(d) $f(x)$ 的图形的拐点：________;

(e) $f(x)$ 图形的凹凸性：________，________;

(f) $f(x)$ 图形的水平渐近线：________，________.

解. (a) $e^{-\frac{1}{2}x^2}$;

(b) 单调增加;

(c) 奇函数;

(d) $(0,0)$;

(e) 当 $x<0$ 时上凹（下凸），当 $x>0$ 时下凹（上凸）;

(f) $y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，$y=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$ ________.

解. 应填 -3.

3. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=$ ________.

解. 应填 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. 假设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，那么

(a) 若 A 与 B 互不相容，则 $P(B)=$ ________;

(b) 若 A 与 B 相互独立，则 $P(B)=$ ________.

解. (a) 0.3；(b) 0.5.

二、判断题（本题满分 10 分，每小题 2 分）

1. 若极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$ 都存在，则极限 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ 必存在.$\cdots\cdots$[ ]

解. 错误.

2. 若 x_0 是函数 $f(x)$ 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$.$\cdots\cdots$[ ]

解. 错误.

3. 等式 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ 对任何实数 a 都成立.$\cdots\cdots$[ ]

解. 错误.

4. 若 A 和 B 都是 n 阶非零方阵，且 $AB=0$，则 A 的秩必小于 n.$\cdots\cdots$[ ]

解. 正确.

5. 若事件 A, B, C 满足等式 $A\cup C=B\cup C$，则 $A=B$.$\cdots\cdots$[ ]

解. 错误.

三、计算题（本题满分 16 分，每小题 4 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$.

解. 用等价无穷小量代换或者洛必达法则，都可求得极限为 1.

2. 已知 $u+\mathrm{e}^u=xy$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解. $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^u}-\dfrac{xy\mathrm{e}^u}{(1+\mathrm{e}^u)^3}$.

3. 求定积分 $\displaystyle\int_0^3\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解. $\dfrac{2\pi}{3}$.

4. 求二重积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$.

解. 交换积分次序，求得 $\dfrac{1}{2}$.

四、解答题（本题满分 6 分，每小题 3 分）

1. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{(n+1)}}$ 的敛散性.

解. 由比值判别法，知级数收敛.

2. 已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都收敛，试证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛，

解. $|a_nb_n|\leqslant\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$，由比较判别法，知级数绝对收敛.

五、（本题满分 8 分）

已知某商品的需求量 D 和供给量 S 都是价格 p 的函数：

$$D=D(p)=\frac{a}{p^2},\qquad S=S(p)=bp,$$

其中 $a>0$ 和 $b>0$ 为常数；价格 p 是时间 t 的函数且满足方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=k[D(p)-S(p)]\qquad（k\text{ 为正的常数}）.$$

假设当 $t=0$ 时价格为 1，试求

(I) 需求量等于供给量时的均衡价格 p_e；

(II) 价格函数 $p(t)$；

(III) 极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)$.

解. (I) 均衡价格 $p_e=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$；

(II) 价格函数 $p(t)=\left[p_e^3+(1-p_e^3)\mathrm{e}^{-3kbt}\right]^{\frac{1}{3}}$；

(III) 极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}p(t)=p_e$.

六、（本题满分 8 分）

在曲线 $y=x^2$（$x>0$）上某点 A 处作一切线，使之与曲线以及 x 轴所围图形的面积为 $\frac{1}{12}$. 试求：

(I) 切点 A 的坐标；

(II) 过切点 A 的切线方程；

(III) 由上述所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积.

解. (I) 切点 A 的坐标为 $(1,1)$；

(II) 过切点 A 的切线方程为 $y=2x-1$；

(III) 旋转体的体积 $V=\frac{\pi}{30}$.

七、(本题满分 8 分)

已给线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1, \\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3, \\ 3x_1-x_2-k_1x_3+15x_4=3, \\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=k_2. \end{cases}$ 问 k_1 和 k_2 各取何值时, 方程组无解? 有唯一解? 有无穷多解? 在方程组有无穷多组解的情形下, 试求出一般解.

解. (I) 当 $k_1\neq 2$ 时, 方程组有唯一解.

(II) 当 $k_1=2$ 且 $k_2\neq 1$ 时, 方程组无解.

(III) 当 $k_1=2$ 且 $k_2=1$ 时, 方程组有无穷多解, 其一般解为

$$x=(-8,3,0,2)^T+c(0,-2,1,0)^T,\quad \text{其中 } c \text{ 为任意常数.}$$

八、(本题满分 7 分)

已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ $(s\geqslant 2)$ 线性无关. 设

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\quad \beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\quad \cdots,\quad \beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+\alpha_s,\quad \beta_s=\alpha_s+\alpha_1.$$

试讨论向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的线性相关性.

解. 若 s 为奇数, 则向量组线性无关. 若 s 为偶数, 则向量组线性相关.

九、(本题满分 6 分)

设 A 是三阶方阵, A^* 是 A 的伴随矩阵, A 的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$. 求行列式 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|$ 的值.

解. $-\frac{16}{27}$.

十、(本题满分 7 分)

玻璃杯成箱出售, 每箱 20 只, 假设各箱含 0, 1, 2 只残次品的概率相应为 0.8, 0.1 和 0.1. 一顾客欲购一箱玻璃杯, 在购买时, 售货员随意取一箱, 顾客开箱随机地察看 4 只: 若无残次品, 则买下该箱玻璃杯, 否则退回. 试求:

(I) 顾客买下该箱的概率 α;

(II) 在顾客买下的一箱中, 确实没有残次品的概率 β.

解. (I) 由全概率公式 $\alpha=\frac{448}{475}$;

(II) 由贝叶斯公式 $\beta=\frac{95}{112}$.

十一、(本题满分 6 分)

某保险公司多年的统计资料表明, 在索赔户中被盗索赔户占 20%, 以 X 表示在随意抽查的 100 个索赔户中因被盗向保险公司索赔的户数.

(Ⅰ) 写出 X 的概率分布;

(Ⅱ) 利用棣莫佛—拉普拉斯定理，求被盗索赔户不少于 14 户且不多于 30 户的概率的近似值.

[附表] 设 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

解. (Ⅰ) X 服从二项分布，$P\{X=k\}=C_{100}^{k}0.2^{k}0.8^{100-k}$.

(Ⅱ) 由棣莫佛—拉普拉斯定理，求得 $P\{14\leqslant X\leqslant 30\}=0.927$.

十二、(本题满分 6 分)

假设随机变量 X 在区间 $(1,2)$ 上服从均匀分布，试求随机变量 $Y=\mathrm{e}^{2X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

解. 概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2y}, & \mathrm{e}^2<y<\mathrm{e}^4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

一九八八年考研数学试卷五解答

一、填空题（本题满分 12 分，每空 1 分）

1. 同试卷四第一 [1] 题.

2. 同试卷四第一 [2] 题.

3. 同试卷四第一 [3] 题.

4. 同试卷四第一 [4] 题.

二、判断题（本题满分 10 分，每小题 2 分）

1. 同试卷四第二 [1] 题.

2. 同试卷四第二 [2] 题.

3. 同试卷四第二 [3] 题.

4. 同试卷四第二 [4] 题.

5. 同试卷四第二 [5] 题.

三、计算题（本题满分 16 分，每小题 4 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi x}{2}$.

解. $\dfrac{4}{\pi}$.

2. 已知 $u=\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$，求 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

解. $-\dfrac{x+y}{y^3}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$.

3. 同试卷四第三 [3] 题.

4. 同试卷四第三 [4] 题.

四、（本题满分 6 分）

确定常数 a 和 b，使函数 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>1, \\ x^2, & x\leqslant 1, \end{cases}$ 处处可导.

解. $a=2$，$b=-1$.

五、（本题满分 8 分）

同试卷三第五题.

六、（本题满分 8 分）

同试卷四第六题.

七、（本题满分 8 分）

同试卷四第七题.

八、（本题满分 6 分）

已知 n 阶方阵 A 满足矩阵方程 $A^2-3A-2E=O$，其中 A 是给定的，而 E 是单位矩阵．证明 A 可逆，并求了其逆矩阵 A^{-1}.

解. $A^{-1}=\frac{1}{2}(A-3E)$.

九、（本题满分 7 分）

同试卷四第八题.

十、（本题满分 7 分）

同试卷四第十题.

十一、（本题满分 7 分）

假设有十只同种电器元件，其中有两只废品，装配仪器时，从这批元件中任取一只，如是废品，则扔掉重新任取一只；如仍是废品，则扔掉再取一只．试求在取到正品之前，已取出的废品只数的分布、数学期望和方差.

解. (I) $P\{X=0\}=\frac{4}{5}$，$P\{X=1\}=\frac{8}{45}$，$P\{X=2\}=\frac{1}{45}$.

(II) 数学期望 $E(X)=\frac{2}{9}$.

(III) 方差 $D(X)=\frac{88}{405}$.

十二、（本题满分 5 分）

同试卷四第十二题.

一九八九年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 曲线 $y=x+\sin^2 x$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},1+\frac{\pi}{2}\right)$ 处的切线方程是________.

解. 对 $y=x+\sin^2 x$ 求导得 $y'=1+2\sin x\cos x$. 令 $x=\frac{\pi}{2}$ 得 $y'\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1$. 故切线方程是 $y-\left(1+\frac{\pi}{2}\right)=x-\frac{\pi}{2}$，即 $y=x+1$.

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛域是________.

解. 幂级数的收敛半径 $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}=1$. 当 $x=-1$ 时得交错级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$(条件收敛)；当 $x=1$ 时得正项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$(发散). 于是，幂级数的收敛域是 $[-1,1)$.

3. 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+x_3=0\end{cases}$ 只有零解，则 λ 应满足的条件是________.

解. 方程个数与未知量个数相等时，$Ax=0$ 只有零解的充分必要条件是 $|A|\neq 0$. 因为此时

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2,$$

所以此题应填 $\lambda\neq 1$.

4. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\sin x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 1, & x>\frac{\pi}{2},\end{cases}$$

则 $A=$________，$P\left\{|X|<\frac{\pi}{6}\right\}=$________.

解. 由于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 是右连续函数，令 $\lim\limits_{x\to\pi/2^+}F(x)=F(\pi/2)$，得到 $A=1$. 从而

$$P\left\{|X|<\frac{\pi}{6}\right\}=P\left\{-\frac{\pi}{6}<X\leqslant\frac{\pi}{6}\right\}=F\left(\frac{\pi}{6}\right)-F\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

5. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$, 则由切比雪夫 (Chebyshev) 不等式，有 $P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant$ ________.

解. 由切比雪夫不等式 $P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}$, 有 $P\{|X-\mu|\geqslant 3\sigma\}\leqslant\frac{\sigma^2}{(3\sigma)^2}=\frac{1}{9}$.

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 设 $f(x)=2^x+3^x-2$，则当 $x\to 0$ 时 ······························· (　)

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量.

(B) $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量.

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量.

(D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量.

解. 由洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x+3^x-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x\ln 2+3^x\ln 3}{1}=\ln 2+\ln 3=\ln 6.$$

所以 $f(x)$ 与 x 是同阶但非等价无穷小量．应选 (B).

2. 在下列等式中，正确的结果是 ······································ (　)

(A) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)$.　　(B) $\int \mathrm{d}f(x)=f(x)$.

(C) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.　　(D) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)$.

解. 由不定积分的概念和性质可知:

$\int f'(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}f(x)=f(x)+C$，故 (A) 和 (B) 错误;

$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$，故 (D) 错误;

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\mathrm{d}x=\left(\int f(x)\mathrm{d}x\right)'=f(x)$，故应选 (C).

3. 同试卷一第二 [5] 题.

4. 设 A 和 B 均为 $n\times n$ 矩阵，则必有 ································ (　)

(A) $|A+B|=|A|+|B|$.　　(B) $AB=BA$.

(C) $|AB|=|BA|$.　　(D) $(A+B)^{-1}=A^{-1}+B^{-1}$.

解. 由行列式乘法公式有 $|AB|=|A|\cdot|B|=|B|\cdot|A|=|BA|$，应选 (C).

5. 以 A 表示事件“甲种产品畅销，乙种产品滞销”，则其对立事件 $\overline{A}$ 为 ····· (　)

(A) “甲种产品滞销，乙种产品畅销”.

(B) “甲、乙两种产品均畅销”.

(C) “甲种产品滞销”.

(D) “甲种产品滞销或乙种产品畅销”.

解. 设事件 $B=$ “甲种产品畅销”，事件 $C=$ “乙种产品滞销”，则事件

$$A=\text{“甲种产品畅销，乙种产品滞销”}$$

可表示为 $A=BC$. 则

$$\overline{A}=\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=\text{“甲种产品滞销或乙种产品畅销”}.$$

因此应选 (D).

三、计算题（本题满分 15 分，每小题 5 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

解. 这是 1^∞ 型未定式求极限. 设 $u=\frac{1}{x}$，则当 $x\to\infty$ 时，$u\to 0$. 于是

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{u\to 0}(\sin u+\cos u)^{\frac{1}{u}}=\exp\left(\lim_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}\right).$$

由等价无穷小量代换以及洛必达法则得

$$\lim_{u\to 0}\frac{\ln(\sin u+\cos u)}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin u+\cos u-1}{u}=\lim_{u\to 0}\frac{\cos u-\sin u}{1}=1.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^1=\mathrm{e}$.

2. 已知 $z=f(u,v), u=x+y, v=xy$，且 $f(u,v)$ 的二阶偏导数都连续. 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. 由复合函数求导法则,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

继续求偏导数，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial u}+y\frac{\partial f}{\partial v}\right)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}+y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+x\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+\frac{\partial f}{\partial v}+y\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\\&=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(x+y)\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+xy\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

3. 求微分方程 $y''+5y'+6y=2\mathrm{e}^{-x}$ 的通解.

解. 微分方程 $y''+5y'+6y=2\mathrm{e}^{-x}$ 对应的齐次方程 $y''+5y'+6y=0$ 的特征方程为

$$r^2+5r+6=0.$$

特征根为 $r_1=-2, r_2=-3$，故对应齐次微分方程的通解为

$$C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{-3x}.$$

设所给非齐次方程的特解为 $y^*(x)=Ae^{-x}$，代入方程比较系数，得 $A=1$．故所求方程的通解为

$$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}+e^{-x},\quad C_1,C_2\text{为任意常数}.$$

四、（本题满分 9 分）

设某厂家打算生产一批商品投放市场．已知该商品的需求函数为

$$P=P(x)=10e^{-\frac{x}{2}},$$

且最大需求量为 6，其中 x 表示需求量，P 表示价格．

(I) 求该商品的收益函数和边际收益函数．

(II) 求使收益最大时的产量、最大收益和相应的价格．

(III) 画出收益函数的图形．

解. (I) 收益函数 $R(x)$ 和边际收益函数 MR 如下：

$$R(x)=xP=10xe^{-\frac{x}{2}},\quad MR=\frac{dR}{dx}=5(2-x)e^{-\frac{x}{2}},\quad 0\leqslant x\leqslant 6.$$

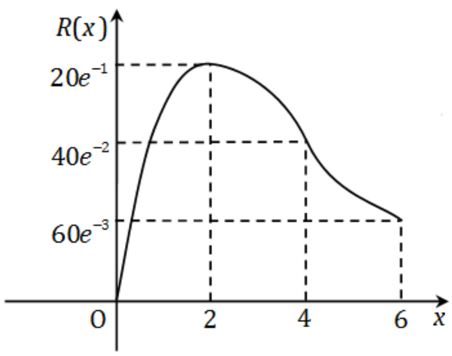
(II) 由 $\dfrac{dR}{dx}=5(2-x)e^{-\frac{x}{2}}=0$，得 $x=2$．又

$$\left.\frac{d^2R}{dx^2}\right|_{x=2}=\left.\frac{5}{2}(x-4)e^{-\frac{x}{2}}\right|_{x=2}=-\frac{5}{e}<0.$$

因此 $R(x)$ 在 $x=2$ 取极大值．又因为极值点惟一，故最大值就是 $R(2)=\dfrac{20}{e}$．于是，当生产量为 2 时，收益取最大值，收益最大值为 $\dfrac{20}{e}$．而相应的价格为 $\dfrac{10}{e}$．

(III) 由以上分析可列下表，并画出收益函数的图形．

x	$[0,2)$	2	$(2,4)$	4	$(4,6]$
R'	$+$	0	$-$	$-$	$-$
R''	$-$	$-$	$-$	0	$+$
R	$\uparrow$，凸	极大值 $\dfrac{20}{e}$	$\downarrow$，凸	拐点 $\left(4,\dfrac{40}{e^2}\right)$	$\downarrow$，凹



五、（本题满分 9 分）

已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2-x, & 1\leqslant x\leqslant 2. \end{cases}$ 试计算下列各题：

(Ⅰ) $S_0=\int_0^2 f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$；　(Ⅱ) $S_1=\int_2^4 f(x-2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$；

(Ⅲ) $S_n=\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x(n=2,3,\cdots)$；　(Ⅳ) $S=\sum\limits_{n=0}^{\infty} S_n$.

解. (Ⅰ) $f(x)$ 为分段函数，由定积分的性质，

$$S_0=\int_0^2 f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1 x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x+\int_1^2 (2-x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=(1-2\mathrm{e}^{-1})+\mathrm{e}^{-2}=(1-\mathrm{e}^{-1})^2.$$

(Ⅱ) 用定积分换元法，令 $x-2=t$，则有

$$S_1=\int_2^4 f(x-2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(t)\mathrm{e}^{-(t+2)}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-2}\int_0^2 f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=S_0\mathrm{e}^{-2}.$$

(Ⅲ) 用定积分换元法，令 $x-2n=t$，则有

$$S_n=\int_{2n}^{2n+2} f(x-2n)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^2 f(t)\mathrm{e}^{-(t+2n)}\,\mathrm{d}t=\int_0^2 f(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=S_0\mathrm{e}^{-2n}.$$

(Ⅳ) 利用以上结果，有

$$S=\sum_{n=0}^{\infty} S_n=\sum_{n=0}^{\infty} S_0\mathrm{e}^{-2n}=S_0\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-2}\right)^n=\frac{S_0}{1-\mathrm{e}^{-2}}=\frac{\mathrm{e}^2S_0}{\mathrm{e}^2-1}=\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}+1}.$$

六、（本题满分 6 分）

假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\leqslant 0$，记

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

证明在 (a,b) 内，$F'(x)\leqslant 0$.

解. 对 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 求导得

$$F'(x)=\frac{-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-a)^2}+\frac{f(x)}{x-a}=\frac{(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{(x-a)^2}.$$

方法一： 由积分中值定理，$\exists\xi\in(a,x)$ 使得 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t=f(\xi)(x-a)$，所以

$$F'(x)=\frac{(x-a)f(x)-f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}=\frac{f(x)-f(\xi)}{x-a}.$$

又因为 $f'(x)\leqslant 0, a<\xi<x$，故有 $f(x)-f(\xi)\leqslant 0$，所以 $F'(x)\leqslant 0$.

方法二： 令 $g(x)=(x-a)f(x)-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则

$$g'(x)=f(x)+(x-a)f'(x)-f(x)=(x-a)f'(x).$$

因为 $x>a$, $f'(x)\leqslant 0$，所以 $g'(x)\leqslant 0$，即 $g(x)$ 在 (a,b) 上单调递减，所以 $g(x)\leqslant g(a)=0$，从而 $F'(x)=\frac{g(x)}{(x-a)^2}\leqslant 0$.

七、（本题满分 5 分）

已知 $X=AX+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$，求矩阵 X.

解. 方法一：由 $X=AX+B$，得 $(E-A)X=B$．因为

$$(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\1&0&2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix},$$

所以

$$X=(E-A)^{-1}B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&2&1\\-3&2&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}.$$

方法二：由 $(E-A)X=B$，作初等行变换 $(E-A\vdots B)\to(E\vdots X)$,

$$(E-A\vdots B)=\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&2&5&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&3&3&-3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:cc}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)$$

所以 $X=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

八、（本题满分 6 分）

设 $\alpha_1=(1,1,1)$, $\alpha_2=(1,2,3)$, $\alpha_3=(1,3,t)$.

(I) 问当 t 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关?

(II) 问当 t 为何值时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关?

(III) 当向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关时，将 α_3 表示为 α_1 和 α_2 的线性组合.

解. n 个 n 维向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关的等价条件是 $|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n|=0$．由于

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&3&t\end{vmatrix}=t-5,$$

故当 $t\neq 5$ 时，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关；$t=5$ 时向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

当 $t=5$ 时，设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=\alpha_3$，将坐标代入得到

$$\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ x_1+2x_2=3, \\ x_1+3x_2=5. \end{cases}$$

解出 $x_1=-1, x_2=2$．即 $\alpha_3=-\alpha_1+2\alpha_2$.

九、（本题满分 5 分）

设 $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(I) 试求矩阵 A 的特征值;

(II) 利用 (I) 小题的结果，求矩阵 $E+A^{-1}$ 的特征值，其中 E 是 3 阶单位矩阵.

解. (I) 对矩阵 A 的特征行列式作若干次初等变换，得到

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ \lambda-1 & \lambda+1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda+3 & 4 \\ 0 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda+3 & 4 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+5),$$

故矩阵 A 的特征值为 $1, 1, -5$.

(II) 设 λ 为 A 的特征值，则存在非零向量 α 使 $A\alpha=\lambda\alpha$，从而

$$\left(E+A^{-1}\right)\alpha=\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)\alpha$$

即 $1+\frac{1}{\lambda}$ 是 $E+A^{-1}$ 的特征值．由 (1) 已知 A 的特征值是 $1, 1, -5$，因此 $E+A^{-1}$ 的特征值是 $2, 2, \frac{4}{5}$.

十、（本题满分 7 分）

已知随机变量 X 和 Y 的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)}, & 0<x<+\infty, 0<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

试求：(I) $P\{X<Y\}$；(II) $E(XY)$.

解. (I) 所求概率等于对应区域上的二重积分

$$P\{X<Y\}=\iint_{x<y} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\int_0^{y}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}(1-\mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}y=\left[-\mathrm{e}^{-y}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2y}\right]_0^{+\infty}=\frac{1}{2}.$$

(II) 由二维连续型随机变量的数学期望定义得

$$
\begin{aligned}
E(XY)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} xy\mathrm{e}^{-(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\int_{0}^{+\infty} y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}
$$

由分部积分法有

$$
\begin{aligned}
\int_{0}^{+\infty} y\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=-\int_{0}^{+\infty} y\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-y}\right)&=\left[-y\mathrm{e}^{-y}\right]_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y\\
&=\left[-y\mathrm{e}^{-y}\right]_{0}^{+\infty}+\left[-\mathrm{e}^{-y}\right]_{0}^{+\infty}.
\end{aligned}
$$

由洛必达法则，对 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限，有

$$
\lim_{y\to+\infty} y\mathrm{e}^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^{y}}=0.
$$

所以有 $E(XY)=1$.

十一、（本题满分 8 分）

设随机变量 X 在 $[2,5]$ 上服从均匀分布，现在对 X 进行三次独立观测，试求至少有两次观测值大于 3 的概率.

解. 以 A 表示事件“对 X 的观测值大于 3”. 依题意，X 的概率密度函数为

$$
f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 2\leqslant x\leqslant 5,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}
$$

因此 $p=P(A)=P\{X>3\}=\int_{3}^{5}\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$. 设随机变量 Y 表示三次独立观测中观测值大于 3 的次数. 则 Y 服从参数 $n=3,\ p=\frac{2}{3}$ 的二项分布. 因此所求的概率等于

$$
P\{Y\geqslant 2\}=P\{Y=2\}+P\{Y=3\}=C_3^2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{20}{27}.
$$

一九八九年考研数学试卷五解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷四第一 [1] 题.

2. 某商品的需求量 Q 与价格 p 的函数关系为 $Q=ap^b$，其中 a 和 b 为常数，且 $a\neq 0$，则需求量对价格 p 的弹性是 ________.

解. 应填 b.

3. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=$ ________.

解. 应填 x^4.

4. 设随机变量 X_1,X_2,X_3 相互独立，其中 X_1 在 $[0,6]$ 上服从均匀分布，X_2 服从正态分布 $N(0,2^2)$，X_3 服从参数为 $\lambda=3$ 的泊松分布，记 $Y=X_1-2X_2+3X_3$，则 $DY=$ ________.

解. 应填 46.

5. 同试卷四第一 [4] 题.

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷四第二 [1] 题.

2. 同试卷四第二 [2] 题.

3. 同试卷一第二 [5] 题.

4. 设 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的系数矩阵 A 的秩为 r，则 $AX=0$ 有非零解的充分必要条件是 $\cdots\cdots$ (　)

(A) $r=n$. (B) $r<n$. (C) $r\geqslant n$. (D) $r>n$.

解. 应选 (B).

5. 同试卷四第二 [5] 题.

三、计算题（本题满分 20 分，每小题 5 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$.

解. e.

2. 已知 $z=a^{\sqrt{x^2-y^2}}$，其中 $a>0, a\neq 1$，求 $\mathrm{d}z$.

解. $\dfrac{z\ln a}{\sqrt{x^2-y^2}}(x\,\mathrm{d}x-y\,\mathrm{d}y)$.

3. 求不定积分 $\displaystyle\int\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

解. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\ln(1-x)+C$.

4. 求二重积分 $\displaystyle\iint_D\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是 $x^2+y^2=1, x=0$ 和 $y=0$ 所围成的区域在第 I 象限部分.

解. $\dfrac{\pi}{2}\left(\ln 2-\dfrac{1}{2}\right)$.

四、（本题满分 6 分）

已知某企业的总收入函数为 $R=26x-2x^2-4x^3$，总成本函数为 $C=8x+x^2$，其中 x 表示产品的产量，求利润函数、边际收入函数、边际成本函数、以及企业获得最大利润时的产量和最大利润.

解. (I) 利润函数 $L=18x-3x^2-4x^3$.

(II) 边际收入函数 $MR=26x-4x-12x^2$.

(III) 边际成本函数 $MC=8+2x$.

(IV) 当产量为 1 时，获得最大利润 11.

五、（本题满分 12 分）

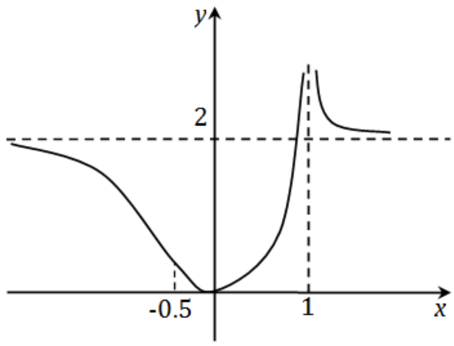
已知函数 $y=\dfrac{2x^2}{(1-x)^2}$，试求其单调区间、极值点、及图形的凹凸性、拐点和渐近线，并画出函数的图形.

解. (I) 区间 $(-\infty,0)$ 和 $(1,+\infty)$ 是函数的单调减区间；区间 $(0,1)$ 是函数的单调增区间；$x=0$ 是函数的极小值点，极小值为 0.

(II) 在 $(-\infty,-1/2)$ 上函数图形凸，在 $(-1/2,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上函数图形凹. 点 $(-1/2,2/9)$ 是该曲线的拐点.

(III) $y=2$ 为函数图形的水平渐近线；$x=1$ 为函数的图形的铅垂渐近线.

(IV) 函数图形如下：



六、（本题满分 5 分）

同试卷四第七题.

七、（本题满分 6 分）

同试卷四第八题.

八、（本题满分 5 分）

同试卷四第九题.

九、（本题满分 8 分）

已知随机变量 X 和 Y 的联合分布为

(x,y)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$
$P\{X=x,Y=y\}$	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.15

试求：

(Ⅰ) X 的概率分布；(Ⅱ) $X+Y$ 的概率分布；(Ⅲ) $Z=\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望.

解. (Ⅰ) X 的概率分布：

X	0	1	2
$P\{X=x\}$	0.25	0.45	0.30

(Ⅱ) $X+Y$ 的概率分布：

$X+Y$	0	1	2	3
$P\{X+Y=s\}$	0.10	0.40	0.35	0.15

(Ⅲ) $Z=\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}$ 的数学期望 $EZ=0.25$.

十、(本题满分 8 分)

某仪器装有三只独立工作的同型号电子元件，其寿命（单位：小时）都服从同一指数分布，分布密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{600}\mathrm{e}^{-x/600}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

试求：在仪器使用的最初 200 小时内，至少有一只电子元件损坏的概率 α.

解. 概率 $\alpha=1-\mathrm{e}^{-1}$.

一九九〇年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$________.

解. 对数列对恒等变形并求它的极限得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}}{1}\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\cdot\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3\sqrt{n}-n+\sqrt{n}}{\sqrt{n+3\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{3}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=\frac{4}{1+1}=2.\end{aligned}$$

2. 设函数 $f(x)$ 有连续的导函数，$f(0)=0, f'(0)=b$，若函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ A, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，则常数 A=________.

解. 由于 $F(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $A=F(0)=\lim\limits_{x\to 0}F(x)$. 又 $f(x)$ 在点 0 处导数存在，所以 $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+a\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+a\cos x}{1}=b+a$.

3. 曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$ 所围成的平面图形的面积为________.

解. 两条曲线的交点为 $x=-1$ 和 $x=2$，故所求面积为

$$S=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

4. 若线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=-a_1,\\x_2+x_3=a_2,\\x_3+x_4=-a_3,\\x_4+x_1=a_4\end{cases}$ 有解，则常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件________.

解. 方程组有解 $\Leftrightarrow r(A)=r(A\vdots b)$，对 $(A\vdots b)$ 作初等行变换，

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\1&0&0&1&a_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&-1&0&1&a_1+a_4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&-a_1\\0&1&1&0&a_2\\0&0&1&1&-a_3\\0&0&1&1&a_1+a_2+a_4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0&0&a_1\\&1&1&0&a_2\\&&1&1&-a_3\\&&&0&a_1+a_2+a_3+a_4\end{pmatrix}$$

为使 $r(A)=r(A\vdots b)$，常数 a_1,a_2,a_3,a_4 应满足条件：$a_1+a_2+a_3+a_4=0$.

5. 一射手对同一目标独立地进行四次射击，若至少命中一次的概率为 $\frac{80}{81}$，则该射手的命中率为________.

解. 用随机变量 X 表示射手独立地进行四次射击命中目标的次数，p 表示一次射击的命中率，则 $X\sim B(4,p)$. 依题意 $P\{X=0\}=1-\sum\limits_{k=1}^{4}P\{X=k\}=\frac{1}{81}$，从而 $(1-p)^4=\frac{1}{81}$，解得 $p=\frac{2}{3}$.

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是……………………………( )

(A) 偶函数. (B) 无界函数. (C) 周期函数. (D) 单调函数.

解. 由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}=+\infty$，故 $f(x)$ 无界. 或令 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{4}(n=1,2,\cdots)$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n e^{\sqrt{2}/2}=+\infty$，可见 $f(x)$ 是无界函数. 应选 (B).

2. 设函数 $f(x)$ 对任意 x 均满足等式 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a, b 为非零常数，则……………………………………………………( )

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导.

(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=a$.

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=b$.

(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $f'(1)=ab$.

解. 由导数的定义有

$$f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{af(h)-af(0)}{h}=a\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=ab.$$

应选 (D).

3. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分条件是……………………………( )

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均不为零向量.

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量的分量不成比例.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意一个向量均不能由其余 $s-1$ 个向量线性表示.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中有一部分向量线性无关.

解. (A), (B), (D) 均是必要条件非充分条件. 比如向量组 $(1,0),(0,1),(1,1)$ 线性相关, . 但 (A), (B), (D) 均成立. 故选 (C).

4. 设 A,B 为两随机事件, 且 $B\subset A$, 则下列式子正确的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $P(A+B)=P(A)$. (B) $P(AB)=P(A)$.

(C) $P(B|A)=P(B)$. (D) $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

解. (A) 因为 $B\subset A$, 所以 $A+B=A$, 于是有 $P(A+B)=P(A)$, 故 (A) 正确.

(B) 因为 $B\subset A$, 所以 $P(AB)=P(B)$, 而不是 $P(AB)=P(A)$, 故 (B) 错误.

(C) 因为 $B\subset A$, 由 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(A)}$, 未必等于 $P(B)$, 故 (C) 错误.

(D) 因为 $B\subset A$, 所以 $P(B-A)=0$, 未必等于 $P(B)-P(A)$, 故 (D) 错误.

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立, 其概率分布为

m	-1	1
$P\{X=m\}$	$1/2$	$1/2$

m	-1	1
$P\{Y=m\}$	$1/2$	$1/2$

则下列式子正确的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $X=Y$. (B) $P\{X=Y\}=0$. (C) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$. (D) $P\{X=Y\}=1$.

解. $P\{X=Y\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}$

$$=P\{X=-1\}\cdot P\{Y=-1\}+P\{X=1\}\cdot P\{Y=1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

故选 (C), 而 (B) 和 (D) 是错误的. 随机变量的概率分布相同, 并不能说事件 X 与事件 Y 是同一事件, 故 (A) 错误.

三、计算题（本题满分 20 分, 每小题 5 分）

1. 求函数 $I(x)=\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{x}\frac{\ln t}{t^2-2t+1}\,\mathrm{d}t$ 在区间 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上的最大值.

解. 在 $x\in[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上, $I'(x)=\dfrac{\ln x}{x^2-2x+1}=\dfrac{\ln x}{(x-1)^2}>0$, 因此函数 $I(x)$ 在 $[\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上单调增加, 最大值为 $I(\mathrm{e}^2)$.

$$I(\mathrm{e}^2)=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{\ln t}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t=-\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\ln t\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{t-1}\right)$$

$$=\left[-\frac{\ln t}{t-1}\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)}=-\frac{2}{\mathrm{e}^2-1}+\frac{1}{\mathrm{e}-1}+\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\mathrm{e}+1}+\ln(\mathrm{e}^2-1)-2-[\ln(\mathrm{e}-1)-1]=-\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}+\ln(\mathrm{e}+1).$$

2. 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是曲线 $y=4x^2$ 和 $y=9x^2$ 在第一象限所围成的区域.

解. 区域 D 是无界区域，从而

$$\iint_D x\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}/3}^{\sqrt{y}/2}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{4}y-\frac{1}{9}y\right)\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{5}{72}\int_0^{+\infty}y\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{5}{144}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\frac{5}{144}(1-0)=\frac{5}{144}.$$

3. 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^n}{n^2}$ 的收敛域.

解. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1/(n+1)^2}{1/n^2}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}=1$，所以当 $-1<x-3<1$，即 $2<x<4$ 时级数绝对收敛. 当 $x=2$ 时，得交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n^2}$，收敛；当 $x=4$ 时，得正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，也收敛. 于是原级数的收敛域为 $[2,4]$.

4. 求微分方程 $y'+y\cos x=(\ln x)\mathrm{e}^{-\sin x}$ 的通解.

解. 所给方程为一阶线性微分方程，它的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int\cos x\,\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{-\sin x}\ln x\,\mathrm{e}^{\int\cos x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\sin x}\left[\int\ln x\,\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-\sin x}[x\ln x-x+C].$$

四、（本题满分 9 分）

某公司可通过电台及报纸两种形式做销售某种商品的广告，根据统计资料，销售收入 R(万元) 与电台广告费用 x_1(万元) 及报纸广告费用 x_2(万元) 之间的关系有如下经验公式:

$$R=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2.$$

(I) 在广告费用不限的情况下，求最优广告策略；

(II) 若提供的广告费用为 1.5 万元，求相应的最优广告策略.

解. (I) 利润为销售收入减去成本，所以利润函数为

$$\pi=15+14x_1+32x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2-(x_1+x_2)$$

$$=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2.$$

由多元函数极值点的必要条件，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\pi}{\partial x_1}=-4x_1-8x_2+13=0,\\[2mm]\dfrac{\partial\pi}{\partial x_2}=-8x_1-20x_2+31=0,\end{cases}$$

解得 $x_1=0.75, x_2=1.25$. 因驻点惟一，且实际问题必有最大值，故投入电台广告费用 0.75 万元，报纸广告费用 1.25 万元可获最大利润.

(II) 若广告费用为 1.5 万元，则应当求利润函数在 $x_1+x_2=1.5$ 时的条件最大值. 拉格朗日函数

$$L(x_1,x_2,\lambda)=15+13x_1+31x_2-8x_1x_2-2x_1^2-10x_2^2+\lambda(x_1+x_2-1.5).$$

对它求各个偏导数得到方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x_1}=-4x_1-8x_2+13+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}=-8x_1-20x_2+31+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x_1+x_2-1.5=0\end{cases}$$

解得 $x_1=0, x_2=1.5$. 因驻点惟一，且实际问题必有最大值，故应将广告费 1.5 万元全部用于报纸广告，可使利润最大.

五、（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在闭区间 $[0,c]$ 上连续，其导数 $f'(x)$ 在开区间 $(0,c)$ 内存在且单调减少；$f(0)=0$，试应用拉格朗日中值定理证明不等式：$f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$，其中常数 ab 满足条件 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$.

解. 方法 1：由拉格朗日中值定理

$$f(a+b)-f(a)-f(b)=[f(a+b)-f(b)]-[f(a)-f(0)]$$

$$=f'(\xi_2)a-f'(\xi_1)a=a[f'(\xi_2)-f'(\xi_1)],$$

其中 $0<\xi_1<a\leqslant b<\xi_2<a+b$. 又 $f'(x)$ 单调减少，故 $f'(\xi_2)\leqslant f'(\xi_1)$. 从而有 $f(a+b)-f(a)-f(b)\leqslant 0$，即 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$.

方法 2：构造辅助函数

$$F(x)=f(x)+f(a)-f(a+x), x\in[0,b],$$

则 $F(0)=0$. 又因为

$$F'(x)=f'(x)-f'(a+x)$$

且 $a\geqslant 0$，$f'(x)$ 在 $(0,b)$ 单调减少，所以 $F'(x)\geqslant 0$，于是 $F(x)$ 在 $[0,b]$ 上单调递增，故 $F(b)\geqslant F(0)=0$，即 $f(a+b)\leqslant f(a)+f(b)$，其中 $0\leqslant a\leqslant b\leqslant a+b\leqslant c$.

六、（本题满分 8 分）

已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=a,\\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=b,\\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=2,\end{cases}$

(I) a,b 为何值时，方程组有解？

(II) 方程组有解时，求出方程组的导出组的一个基础解系；

(III) 方程组有解时，求出方程组的全部解.

解. 对增广矩阵作初等行变换有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & a \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & b \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & a \\ & 1 & 2 & 2 & 6 & \vdots & 3a \\ & & & & & \vdots & b-3a \\ & & & & & \vdots & 2-2a \end{pmatrix}$$

(I) 当 $b-3a=0$ 且 $2-2a=0$，即 $a=1,b=3$ 时方程组有解.

(II) 当 $a=1,b=3$ 时，方程组的同解方程组是

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \end{cases}$$

由 $n-r(A)=5-2=3$，即解空间的维数为 3．取自由变量为 x_3,x_4,x_5，则导出组的基础解系为 $\eta_1=(1,-2,1,0,0)^T,\eta_2=(1,-2,0,1,0)^T,\eta_3=(5,-6,0,0,1)^T$.

(III) 令 $x_3=x_4=x_5=0$，得方程组的特解为 $\xi=(-2,3,0,0,0)^T$．因此，方程组的所有解是 $\xi+k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3$，其中 k_1,k_2,k_3 为任意常数.

七、（本题满分 5 分）

已知对于 n 阶方阵 A，存在自然数 k，使得 $A^k=0$，试证明矩阵 $E-A$ 可逆，并写出其逆矩阵的表达式 (E 为 n 阶单位阵).

解. 因为 $(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=E^k-A^k=E$．所以 $E-A$ 可逆，且

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$$

八、（本题满分 6 分）

设 A 是 n 阶矩阵，λ_1 和 λ_2 是 A 的两个不同的特征值，x_1,x_2 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量．试证明 x_1+x_2 不是 A 的特征向量.

解. (反证法) 假设 x_1+x_2 是 A 的特征向量，它所对应的特征值为 λ，则由定义有

$$A(x_1+x_2)=\lambda(x_1+x_2).$$

由已知条件，又有

$$A(x_1+x_2)=Ax_1+Ax_2=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2.$$

两式相减得

$$(\lambda-\lambda_1)x_1+(\lambda-\lambda_2)x_2=0.$$

由 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 知 $\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2$ 不全为 0，于是 x_1,x_2 线性相关，这与不同特征值的特征向量线性无关相矛盾．所以 x_1+x_2 不是 A 的特征向量.

九、（本题满分 4 分）

从 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中任意选出三个不同数字，试求下列事件的概率：

$A_1=\{$三个数字中不含 0 和 5$\}$；　$A_2=\{$三个数字中不含 0 或 5$\}$.

解. 由古典型概率公式，$P(A_1)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{7}{15}$;$P(A_2)=\frac{2C_9^3-C_8^3}{C_{10}^3}=\frac{14}{15}$.

十、（本题满分 5 分）

一电子仪器由两个部件构成，以 X 和 Y 分别表示两个部件的寿命（单位：千小时），已知 X 和 Y 的联合分布函数为：

$$F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}-e^{-0.5y}+e^{-0.5(x+y)}, & x\geqslant 0, y\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(I) 问 X 和 Y 是否独立?

(II) 求两个部件的寿命都超过 100 小时的概率 α.

解. (I) X 和 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-0.5y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

由于对任意实数 x,y 都满足 $F(x,y)=F_X(x)F_Y(x)$. 因此 X 和 Y 相互独立.

(II) 因为 X 和 Y 相互独立，所以有

$$\alpha=P\{X>0.1,Y>0.1\}=P\{X>0.1\}\cdot P\{Y>0.1\}$$

$$=[1-F_X(0.1)][1-F_Y(0.1)]=e^{-0.05}\cdot e^{-0.05}=e^{-0.1}.$$

十一、（本题满分 7 分）

某地抽样调查结果表明，考生的外语成绩 (百分制) 近似服从正态分布，平均成绩为 72 分，96 分以上的占考生总数的 2.3%, 试求考生的外语成绩在 60 分至 84 分之间的概率.

[附表]（表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数.）

x	0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$\Phi(x)$	0.500	0.692	0.841	0.933	0.977	0.994	0.999

解. 设 X 为考生的外语成绩，依题意有 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，且 $\mu=72$，但 σ^2 未知. 所以可标准化得 $\frac{X-72}{\sigma}\sim N(0,1)$. 由标准正态分布函数概率的计算公式，有

$$P\{X>96\}=1-P\{X\leqslant 96\}=1-\Phi\left(\frac{96-72}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=0.023,$$

即 $\Phi\left(\frac{24}{\sigma}\right)=1-0.023=0.977$. 查表可得 $\frac{24}{\sigma}=2$，即 $\sigma=12$，从而 $X\sim N(72,12^2)$,

$$P\{60\leqslant X\leqslant 84\}=P\left\{\left|\frac{X-72}{12}\right|\leqslant 1\right\}=2\Phi(1)-1=0.682.$$

一九九〇年考研数学试卷五解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷四第一 [1] 题.

2. 同试卷四第一 [2] 题.

3. 同试卷四第一 [3] 题.

4. 同试卷四第一 [4] 题.

5. 已知随机变量 $X \sim N(-3,1)$，$Y \sim N(2,1)$，且 X, Y 相互独立，设随机变量 $Z = X - 2Y + 7$，则 $Z \sim$ ________.

解. 应填 $N(0,5)$.

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷四第二 [1] 题.

2. 同试卷四第二 [2] 题.

3. 同试卷四第二 [3] 题.

4. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，A^* 是 A 的伴随矩阵，则 $|A^*| =$ ····················( )

(A) $|A|^{n-1}$. (B) $|A|$. (C) $|A|^n$. (D) $|A|^{-1}$.

解. 应选 (A).

5. 已知随机变量 X 服从二项分布，且 $EX = 2.4$，$DX = 1.44$，则二项分布的参数 n, p 的值为 ··( )

(A) $n = 4$，$p = 0.6$. (B) $n = 6$，$p = 0.4$.

(C) $n = 8$，$p = 0.3$. (D) $n = 24$，$p = 0.1$.

解. 应选 (B).

三、计算题（本题满分 20 分，每小题 5 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x (1+t^2)\mathrm{e}^{t^2-x^2}\,\mathrm{d}t$.

解. $\dfrac{1}{2}$.

2. 求不定积分 $\int \frac{x\cos^4\frac{x}{2}}{\sin^3 x}\mathrm{d}x$.

解. 原式 $=\frac{1}{8}\int \frac{x\cos\frac{x}{2}}{\sin^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{8}\int x d\left(\sin^{-2}\frac{x}{2}\right)=-\frac{1}{8}x\csc^2\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\cot\frac{x}{2}+C$.

3. 设 $x^2+z^2=y\phi\left(\frac{z}{y}\right)$，其中 ϕ 为可微函数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解. $\dfrac{y\phi\left(\frac{z}{y}\right)-z\phi'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz-y\phi'\left(\frac{z}{y}\right)}$.

4. 同试卷四第三 [2] 题.

四、（本题满分 9 分）

同试卷四第四题.

五、（本题满分 6 分）

证明不等式 $1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\geqslant\sqrt{1+x^2}$（$-\infty<x<+\infty$）.

解. 构造函数 $f(x)=1+x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$，则 $f'(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，因此 $f(x)$ 有惟一的驻点 $x=0$. 又因为 $f''(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}>0$，所以 $x=0$ 是极小值点，也是最小值点. 故 $f(x)\geqslant f(0)=0$，结论成立.

六、（本题满分 4 分）

设 A 为 10×10 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 10^{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，计算行列式 $|A-\lambda E|$，其中 E 为 10 阶单位矩阵，λ 为常数.

解. $\lambda^{10}-10^{10}$.

七、（本题满分 5 分）

设方阵 A 满足 $A^TA=E$，其中 A^T 是 A 的转置矩阵，E 为单位阵. 试证明 A 所对应的特征值的绝对值等于 1.

解. 设 A 有特征值 λ 及对应的特征向量 x，则有 $Ax=\lambda x$，从而 $x^TA^T=\lambda x^T$. 因此 $x^Tx=x^TA^TAx=\lambda^2x^Tx$，即 $(\lambda^2-1)x^Tx=0$，所以 $|\lambda|=1$.

八、（本题满分 8 分）

同试卷四第六题.

九、（本题满分 5 分）

同试卷四第九题.

十、（本题满分 6 分）

甲乙两人独立地各进行两次射击，假设甲的命中率为 0.2，乙的为 0.5，以 X 和 Y 分别表示甲和乙的命中次数，试求 X 和 Y 的联合概率分布.

解. X 和 Y 的联合概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.16	0.32	0.16
1	0.08	0.16	0.08
2	0.01	0.02	0.01

.

十一、（本题满分 7 分）

同试卷四第十一题.

一九九一年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 设 $z=\mathrm{e}^{\sin(xy)}$，则 $\mathrm{d}z=$________.

解. 由全微分形式不变性和微分四则运算法则，有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{\sin(xy)}\right)=\mathrm{e}^{\sin(xy)}\,\mathrm{d}(\sin(xy))\\&=\mathrm{e}^{\sin(xy)}\cos(xy)\,\mathrm{d}(xy)=\mathrm{e}^{\sin(xy)}\cos(xy)(y\,\mathrm{d}x+x\,\mathrm{d}y).\end{aligned}$$

2. 设曲线 $f(x)=x^3+ax$ 与 $g(x)=bx^2+c$ 都通过点 $(-1,0)$，且在点 $(-1,0)$ 有公共切线，则 $a=$________, $b=$________, $c=$________.

解. 由于曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都通过点 $(-1,0)$，则

$$f(-1)=-1-a=0,\quad g(-1)=b+c=0.$$

又曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 $(-1,0)$ 有公共切线，则 $f'(-1)=g'(-1)$，即

$$f'(-1)=\left(3x^2+a\right)\Big|_{x=-1}=3+a=g'(-1)=2bx\Big|_{x=-1}=-2b.$$

解得 $a=-1,\ b=-1,\ c=1$.

3. 设 $f(x)=x\mathrm{e}^x$，则 $f^{(n)}(x)$ 在点 $x=$________ 处取极小值________ .

解. 由莱布尼兹公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$$

可知得 $f^{(n)}(x)=(x+n)\mathrm{e}^x$. 对函数 $g(x)=f^{(n)}(x)$ 求导，并令 $g'(x)=0$，得

$$g'(x)=f^{(n+1)}(x)=(x+n+1)\mathrm{e}^x=0.$$

解之得驻点 $x=-(n+1)$. 又由极值的第一判别法得 $x=-(n+1)$ 是函数 $g(x)=f^{(n)}(x)$ 的极小值点，极小值为

$$g(-n-1)=f^{(n)}(-n-1)=(-n-1+n)\mathrm{e}^{-n-1}=-\mathrm{e}^{-n-1}.$$

4. 设 A 和 B 为可逆矩阵，$X=\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}$ 为分块矩阵，则 $X^{-1}=$________.

解. 设矩阵 X_1,X_2,X_3,X_4 满足

$$\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1&X_2\\X_3&X_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E&0\\0&E\end{pmatrix},$$

解得 $X_3=A^{-1},X_4=0,X_1=0,X_2=B^{-1}$. 故应填 $\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$.

5. 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leqslant x<1,\\ 0.8, & 1\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

则 X 的概率分布为 ________.

解. 由于 $P\{X=x\}=P\{X\leqslant x\}-P\{X<x\}=F(x)-F(x^-)$，故有

$$P\{X=-1\}=F(-1)-F(-1^-)=0.4,$$

$$P\{X=1\}=F(1)-F(1^-)=0.8-0.4=0.4,$$

$$P\{X=3\}=F(3)-F(3^-)=1-0.8=0.2.$$

因此 X 的概率分布为

X	-1	1	3
$P\{X=x\}$	0.4	0.4	0.2

.

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 下列各式中正确的是 ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯（　）

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$.　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$.

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-\mathrm{e}$.　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=\mathrm{e}$.

解. 应选 (A). $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\exp\left[x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$，而由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+t)}{t}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+t}=0.$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}^0=1$，即选项 (A) 正确.

2. 设 $0\leqslant a_n<\dfrac{1}{n}\ (n=1,2,\cdots)$，则下列级数中肯定收敛的是 ⋯⋯⋯⋯⋯⋯（　）

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$.

解. 应选 (D). 因为 $\left|(-1)^n a_n^2\right|=a_n^2<\dfrac{1}{n^2}$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛及比较判别法可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ 绝对收敛，即 (D) 正确. 另外，设 $a_n=\dfrac{1}{2n}\ (n=1,2\cdots 4)$，则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{2n}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

故 (A) 和 (C) 都错误. 设 $a_{2n-1}=0,\ a_{2n}=\dfrac{1}{2n}(n=1,2\cdots)$，则可知 (B) 错误.

3. 设 A 为 n 阶可逆矩阵，λ 是 A 的一个特征根，则 A 的伴随矩阵 A^* 的特征根之一是…………………………………………………………………（ ）

(A) $\lambda^{-1}|A|^n$. (B) $\lambda^{-1}|A|$. (C) $\lambda|A|$. (D) $\lambda|A|^n$.

解. 应选 (B). 由 λ 为 A 的特征值可知，存在非零向量 x 使得 $Ax=\lambda x$. 从而有

$$A^*(\lambda x)=A^*Ax=|A| \quad\Rightarrow\quad xA^*x=\lambda^{-1}|A|x.$$

即 $\lambda^{-1}|A|$ 是伴随矩阵 A^* 的特征值.

4. 设 A 和 B 是任意两个概率不为零的不相容事件，则下列结论中肯定正确的是…………………………………………………………………（ ）

(A) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 不相容. (B) $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容.

(C) $P(AB)=P(A)P(B)$. (D) $P(A-B)=P(A)$.

解. 应选 (D). 这是因为 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)$.

$\overline{A}\,\overline{B}=\overline{A\cup B}$，如果 $A\cup B=\Omega$，则 $\overline{A}\,\overline{B}=\emptyset$，即 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 互不相容；如果 $A\cup B\neq\Omega$，则 $\overline{A}\,\overline{B}\neq\emptyset$，即 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相容. 故选项 (A) 和 (B) 都错误.

A 和 B 不相容,则有 $P(AB)=P(\emptyset)=0$;而 $P(A)$,$P(B)$ 均不为零,则有 $P(A)P(B)\neq 0$. 即 (C) 错误.

5. 对于任意两个随机变量 X 和 Y，若 $E(XY)=E(X)\cdot E(Y)$，则……………（ ）

(A) $D(XY)=D(X)\cdot D(Y)$. (B) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

(C) X 和 Y 独立. (D) X 和 Y 不独立.

解. 应选 (B). 由 $E(XY)=E(X)E(Y)$ 得 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$. 从而

$$D(X+Y)=D(X)+2\mathrm{Cov}(X,Y)+D(Y)=D(X)+D(Y).$$

三、（本题满分 5 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数.

解. 对幂指函数作恒等变形，得到

$$\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left[\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)\right].$$

由洛必达法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx})-\ln n}{x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^{2x}+\cdots+n\mathrm{e}^{nx}}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2}.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\cdots+\mathrm{e}^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{n+1}{2}}$.

四、（本题满分 5 分）

计算二重积分 $I=\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由 x 轴，y 轴与曲线 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ 所围成的区域，$a>0, b>0$.

解. 由 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$，得 $y=b\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^2$（$0\leqslant x\leqslant a$）. 因此

$$I=\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^a \mathrm{d}x\int_0^{b\left(1-\sqrt{x/a}\right)^2} y\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^a \mathrm{d}x\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^{b\left(1-\sqrt{x/a}\right)^2}=\frac{b^2}{2}\int_0^a\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^4\mathrm{d}x.$$

令 $t=1-\sqrt{\frac{x}{a}}$，有 $x=a(1-t)^2, \mathrm{d}x=-2a(1-t)\mathrm{d}t$. 从而

$$I=\frac{b^2}{2}\int_0^a\left(1-\sqrt{\frac{x}{a}}\right)^4\mathrm{d}x=\frac{b^2}{2}\int_1^0 t^4 2a(t-1)\mathrm{d}t$$

$$=ab^2\int_0^1(t^4-t^5)\mathrm{d}t=ab^2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^6}{6}\right)\Bigg|_0^1=\frac{ab^2}{30}.$$

五、（本题满分 5 分）

求微分方程 $xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$ 满足条件 $y\big|_{x=\mathrm{e}}=2\mathrm{e}$ 的特解.

解. 原方程是齐次微分方程. 令 $y=ux$，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$. 将其代入上式得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1+u^2}{u}.$$

化简得 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{u}$，即 $u\,\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}x}{x}$. 积分得

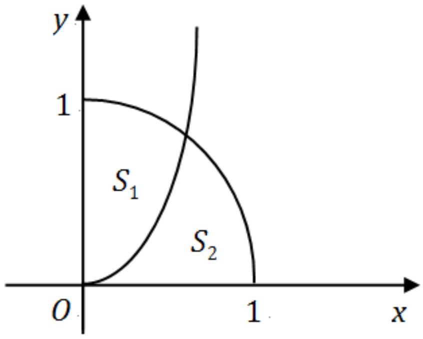
$$\frac{1}{2}u^2=\ln|x|+C.$$

将 $u=\frac{y}{x}$ 代入上式，得通解 $y^2=2x^2(\ln|x|+C)$. 由条件 $y\big|_{x=\mathrm{e}}=2\mathrm{e}$ 求得 $C=1$.
所以 $y^2=2x^2(\ln|x|+1)$ 是所求微分方程的特解.

六、（本题满分 6 分）

假设曲线 L_1：$y=1-x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$，$x$ 轴和 y 轴所围区域被曲线 L_2：$y=ax^2$ 分为面积相等的两部分，其中 a 是大于零的常数，试确定 a 的值.

解. 先求出曲线 L_1 和 L_2 的交点, 然后利用定积分求出平面图形面积 S_1 和 S_2, 如图:



由两曲线的方程，求得交点坐标为$\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}},\frac{a}{1+a}\right)$，所以

$$S=S_1+S_2=\int_0^1 y\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x^2)\mathrm{d}x=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2}{3},$$

$$S_1=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left[(1-x^2)-ax^2\right]\mathrm{d}x=\left[x-\frac{1+a}{3}x^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}=\frac{2}{3\sqrt{1+a}}.$$

又因为 $S=2S_1$，所以 $\frac{2}{3}=2\cdot\frac{2}{3\sqrt{1+a}}$，即 $\sqrt{1+a}=2$，解得 $a=3$.

七、（本题满分 8 分）

某厂家生产的一种产品同时在两个市场销售，售价分别为 p_1 和 p_2，销售量分别为 q_1 和 q_2，需求函数分别为 $q_1=24-0.2p_1$ 和 $q_2=10-0.05p_2$，总成本函数为 $C=35+40(q_1+q_2)$．试问：厂家如何确定两个市场的售价，能使其获得的总利润最大？最大利润为多少？

解. 总收入函数为

$$R=p_1q_1+p_2q_2=24p_1-0.2p_1^2+10p_2-0.05p_2^2,$$

总利润函数为

$$L=R-C=(p_1q_1+p_2q_2)-\left[35+40(q_1+q_2)\right]$$
$$=32p_1-0.2p_1^2+12p_2-0.05p_2^2-1395.$$

由极值的必要条件，得方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial p_1}=32-0.4p_1=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial p_2}=12-0.1p_2=0.\end{cases}$$

解得 $p_1=80,p_2=120$．因驻点的唯一，且由问题的实际含义可知必有最大利润．故当 $p_1=80,p_2=120$ 时，厂家所获得的总利润最大，其最大总利润为

$$L|_{p_1=80,p_2=120}=(32p_1-0.2p_1^2+12p_2-0.05p_2^2-1395)\Big|_{p_1=80,p_2=120}=605.$$

八、（本题满分 6 分）

试证明函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

解. 对 $f(x)=\exp\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$ 求导得

$$f'(x)=\exp\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]\cdot\left[\ln(1+\frac{1}{x})-\frac{1}{1+x}\right].$$

令 $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$，则当 $x>0$ 时

$$g'(x)=-\frac{1}{x(1+x)^2}<0,$$

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少．又

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]=0,$$

于是当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，从而 $f'(x)>0$．所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

九、（本题满分 7 分）

设有三维列向量

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1+\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\1+\lambda\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix},$$

问 λ 取何值时,

(I) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表达式唯一?

(II) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表达式不唯一?

(III) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示?

解. 设 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$，代入得到方程组 $\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0,\\x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda^2.\end{cases}$ 对方程组的增广矩阵作初等行变换，得到

$$\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&\vdots&0\\1&1+\lambda&1&\vdots&\lambda\\1&1&1+\lambda&\vdots&\lambda^2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+\lambda&1&1&\vdots&0\\-\lambda&\lambda&0&\vdots&\lambda\\-\lambda^2-3\lambda&0&0&\vdots&\lambda^2+\lambda\end{pmatrix}$$

(I) 若 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda^2+3\lambda\neq0$，即 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq-3$, 则 $r(A)=r\left(\overline{A}\right)=3$, 方程组有唯一解，即 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示且表达式唯一.

(II) 若 $\lambda=0$，则 $r(A)=r\left(\overline{A}\right)=1<3$, 方程组有无穷多解，$\beta$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表达式不唯一.

(III) 若 $\lambda=3$，则 $r(A)=2$, $r(\overline{A})=3$，方程组无解，从而 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

十、（本题满分 6 分）

考虑二次型 $f=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$．问 λ 取何值时，f 为正定二次型?

解. 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&4&2\\-1&2&4\end{pmatrix}$，其顺序主子式为 $\Delta_1=1$，$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&\lambda\\\lambda&4\end{vmatrix}=4-\lambda^2$，$\Delta_3=|A|=-4\lambda^2-4\lambda+8$. 正定的充分必要条件是各阶顺序主子式都大于 0，所以有 $\Delta_2=(2-\lambda)(2+\lambda)>0$，$\Delta_3=-4(\lambda-1)(\lambda+2)>0$. 解出其交集为 $(-2,1)$. 故 $\lambda\in(-2,1)$ 时，f 为正定二次型.

十一、（本题满分 6 分）

试证明 n 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是

$$D=\begin{vmatrix}\alpha_1^T\alpha_1&\alpha_1^T\alpha_2&\cdots&\alpha_1^T\alpha_n\\\alpha_2^T\alpha_1&\alpha_2^T\alpha_2&\cdots&\alpha_2^T\alpha_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_n^T\alpha_1&\alpha_n^T\alpha_2&\cdots&\alpha_n^T\alpha_n\end{vmatrix}\neq 0,$$

其中 α_i^T 表示列向量 α_i 的转置，$i=1,2,\cdots,n$.

解. 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $|A|\neq 0$. 由于

$$A^TA=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\\\vdots\\\alpha_n^T\end{pmatrix}[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]=\begin{pmatrix}\alpha_1^T\alpha_1&\alpha_1^T\alpha_2&\cdots&\alpha_1^T\alpha_n\\\alpha_2^T\alpha_1&\alpha_2^T\alpha_2&\cdots&\alpha_2^T\alpha_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_n^T\alpha_1&\alpha_n^T\alpha_2&\cdots&\alpha_n^T\alpha_n\end{pmatrix},$$

从而取行列式，有 $D=\left|A^TA\right|=\left|A^T\right||A|=|A|^2$. 由此可见 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是 $D\neq 0$.

十二、（本题满分 5 分）

一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等，以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数. 求 X 的概率分布.

解. 首先确定 X 的可能值是 $0,1,2,3$, 其次计算 X 取各种可能值的概率. 设事件 $A_i=$ "汽车在第 i 个路口首次遇到红灯"，$i=1,2,3$，且 A_i 相互独立.

$$P(A_i)=P\left(\overline{A_i}\right)=\frac{1}{2}.$$

事件 A_i 发生表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数为 $i-1$. 所以有

$$P\{X=0\}=P(A_1)=1/2,$$

$$P\{X=1\}=P\left(\overline{A_1}A_2\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)=1/4,$$

$$P\{X=2\}=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P(A_3)=1/8,$$

$$P\{X=3\}=P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)=1/8.$$

则 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
$P\{X=x\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

.

十三、(本题满分 6 分)

假设随机变量 X 和 Y 在圆域 $x^2+y^2\leqslant r^2$ 上服从联合均匀分布.

(I) 求 X 和 Y 的相关系数 ρ; (II) 问 X 和 Y 是否独立?

解. (I) 二维均匀分布 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases}$$

S_D 是区域 D 的面积, $S_D=\pi r^2$, 所以 (X,Y) 的联合密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2+y^2\leqslant r^2,\\ 0, & x^2+y^2>r^2.\end{cases}$$

由连续型随机变量边缘分布的定义, X 和 Y 的概率密度 $f_1(x)$ 和 $f_2(y)$ 为

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{\pi r^2}\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\mathrm{d}y=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-x^2}\quad(|x|\leqslant r),$$

$$f_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi r^2}\sqrt{r^2-y^2}\quad(|y|\leqslant r).$$

于是由定积分的奇偶对称性, 得到

$$EX=\frac{2}{\pi r^2}\int_r^{-r}x\sqrt{r^2-x^2}\,\mathrm{d}x=0,\quad EY=\frac{2}{\pi r^2}\int_r^{-r}y\sqrt{r^2-y^2}\,\mathrm{d}y=0.$$

再由二重积分的奇偶对称性, 得到

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2}\frac{xy}{\pi r^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.$$

于是 X 和 Y 的相关系数 $\rho=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=0.$

(II) 由于 $f(x,y)\neq f_1(x)f_2(y)$, 可见随机变量 X 和 Y 不独立.

十四、(本题满分 5 分)

设总体 X 的概率密度为

$$p(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda a x^{a-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^a}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $\lambda>0$ 是未知参数, $a>0$ 是已知常数. 试根据来自总体 X 的简单随机样本 $x_1,x_2,\cdots,x_n$, 求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$.

解. 写出似然函数并取对数得到

$$
\begin{aligned}
& L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \lambda) = (\lambda a)^n \mathrm{e}^{-\lambda \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^a} \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1} \\
\Rightarrow \quad & \ln L = n \ln(\lambda a) + \ln \prod_{i=1}^{n} x_i^{a-1} - \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i^a.
\end{aligned}
$$

由对数似然方程 $\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^a = 0$，解得 λ 的最大似然估计值 $\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^a}$.

一九九一年考研数学试卷五解答

一、填空题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷四第一 [1] 题.

2. 同试卷四第一 [2] 题.

3. 同试卷四第一 [3] 题.

4. n 阶行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

解. $a^n+(-1)^{n+1}b^n$.

5. 设 A 和 B 为随机事件，$P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$，则 $P(\overline{AB})=$ ________.

解. 0.6.

二、选择题（本题满分 15 分，每小题 3 分）

1. 同试卷四第二 [1] 题.

2. 设数列的通项为 $x_n=\begin{cases} \dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & 若\ n\ 为奇数; \\ \dfrac{1}{n}, & 若\ n\ 为偶数. \end{cases}$ 则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是 $\cdots\cdots$ ( )

(A) 无穷大量.　(B) 无穷小量.　(C) 有界变量.　(D) 无界变量.

解. 应选 (D). 因为数列的奇数项趋于无穷大，而偶数项趋于 0.

3. 设 A 与 B 为 n 阶方阵，且 $AB=O$，则必有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) $A=O$ 或 $B=O$.　(B) $AB=BA$.

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$.　(D) $|A|+|B|=0$.

解. 应选 (C). 由 $AB=O$ 得 $|AB|=|A|\cdot|B|=0$，从而 $|A|=0$ 或 $|B|=0$.

4. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，$Ax=0$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 所对应的齐次线性方程组，则下列结论正确的是…………………………………………( )

(A) 若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $Ax=b$ 有唯一解.

(B) 若 $Ax=0$ 有非零解，则 $Ax=b$ 有无穷多个解.

(C) 若 $Ax=b$ 有无穷多个解，则 $Ax=0$ 仅有零解.

(D) 若 $Ax=b$ 有无穷多个解，则 $Ax=0$ 有非零解.

解. 应选 (D). 若 $Ax=b$ 有无穷多个解，则 $r(A)=r(\bar{A})<n$，故排除 (C)，并选 (D). 若 $Ax=0$ 仅有零解，则 $r(A)=n$；若 $Ax=0$ 有非零解，则 $r(A)<n$. 这两种情形都无法保证 $r(A)=r(\bar{A})$，即无法保证 $Ax=b$ 有解，故 (A) 和 (B) 都错误.

5. 同试卷四第二 [4] 题.

三、（本题满分 5 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

解. 由洛必达法则，求得极限为 1.

四、（本题满分 5 分）

求定积分 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(2x+|x|+1|)^2\,\mathrm{d}x$.

解. $I=\displaystyle\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}(3x+1)^2\,\mathrm{d}x=\frac{22}{3}$.

五、（本题满分 5 分）

求不定积分 $I=\displaystyle\int\frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解. 由分部积分法和换元积分法，得到

$$\begin{aligned}I&=\int\arctan x\,\mathrm{d}x-\int\frac{1}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x\\&=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\arctan x)^2+C.\end{aligned}$$

六、（本题满分 5 分）

已知 $xy=xf(z)+yg(z)$，$xf'(z)+yg'(z)\neq0$，其中 $z=z(x,y)$ 是 x 和 y 的函数. 求证：$[x-g(z)]\dfrac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解. 将 $xy=xf(z)+yg(z)$ 两侧同时对 x 求偏导数，解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y-f(z)}{xf'(z)+yg'(z)}.$$

将 $xy=xf(z)+yg(z)$ 两侧同时对 y 求偏导数，解得

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x-g(z)}{xf'(z)+yg'(z)}.$$

从而得到 $[x-g(z)]\frac{\partial z}{\partial x}=[y-f(z)]\frac{\partial z}{\partial y}$.

七、（本题满分 6 分）

同试卷四第六题.

八、（本题满分 8 分）

同试卷四第七题.

九、（本题满分 6 分）

证明不等式 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}$ （$0<x<+\infty$）.

解. 令 $g(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$，则当 $x>0$ 时

$$g'(x)=-\frac{1}{x(1+x)^2}<0,$$

所以函数 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调减少. 又

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]=0,$$

于是当 $x>0$ 时，$g(x)>0$，即 $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)>\frac{1}{1+x}$.

十、（本题满分 5 分）

设 n 阶矩阵 A 和 B 满足条件 $A+B=AB$.

(I) 证明 $A-E$ 为可逆矩阵，其中 E 是 n 阶单位矩阵；

(II) 已知 $B=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

解. (I) 由 $A+B=AB$，有 $AB-A-B+E=(A-E)(B-E)=E$，由此可见 $A-E$ 为可逆矩阵.

(II) 由前面等式，解得 $A=E+(B-E)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1/2&0\\-1/3&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

十一、(本题满分 7 分)

同试卷四第九题.

十二、(本题满分 5 分)

已知向量 $\alpha=(1,k,1)^T$ 是矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 A^{-1} 的特征向量，求常数 k 的值.

解. 当 $k=-2$ 或 $k=1$ 时，α 是 A^{-1} 的特征向量.

十三、(本题满分 7 分)

一汽车沿一街道行驶，需要通过三个均设有红绿信号灯的路口，每个信号灯为红或绿与其他信号灯为红或绿相互独立，且红绿两种信号显示的时间相等，以 X 表示该汽车首次遇到红灯前已通过的路口的个数.

(I) 求 X 的概率分布. (II) 求 $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

解. (I) 首先确定 X 的可能值是 $0,1,2,3$，其次计算 X 取各种可能值的概率. 设事件 $A_i=$ "汽车在第 i 个路口首次遇到红灯"，$i=1,2,3$，且 A_i 相互独立.

$$P(A_i)=P\left(\overline{A_i}\right)=\frac{1}{2}.$$

事件 A_i 发生表示该汽车首次遇到红灯前已通过路口的个数为 $i-1$. 所以有

$$P\{X=0\}=P(A_1)=1/2,$$

$$P\{X=1\}=P\left(\overline{A_1}A_2\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P(A_2)=1/4,$$

$$P\{X=2\}=P\left(\overline{A_1A_2}A_3\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P(A_3)=1/8,$$

$$P\{X=3\}=P\left(\overline{A_1A_2A_3}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)=1/8.$$

则 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
$P\{X=x\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

.

(II) $E\left(\frac{1}{1+X}\right)=\frac{67}{96}$.

十四、(本题满分 6 分)

在电源电压不超过 200 伏、在 $200-240$ 伏和超过 240 伏三种情形下，某种电子元件损坏的概率分别为 0.1,0.001 和 0.2，假设电源电压 X 服从正态分布 $N(220,25^2)$，试求：

(I) 该电子元件损坏的概率 α;

(II) 该电子元件损坏时，电源电压在 $200-240$ 伏的概率 β.

[附表]（表中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数）

x	0.10	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40
$\Phi(x)$	0.530	0.579	0.655	0.726	0.788	0.841	0.885	0.919

解. (I) 由全概率公式，$\alpha = 0.0642$.

(II) 由贝叶斯公式，$\beta \approx 0.009$.

一九九二年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中 Q,P 分别表示为需求量和价格，如果商品需求弹性的绝对值大于 1，则商品价格的取值范围是________.

解. 由 $Q(P)=100-5P\geqslant 0$ 得价格 $P\leqslant 20$. 又由弹性的定义有

$$\varepsilon=P\cdot\frac{Q'(P)}{Q(P)}=-\frac{5P}{100-5P}.$$

令 $|\varepsilon|>1$，解得 $P>10$. 所以商品价格的取值范围是 $(10,20]$.

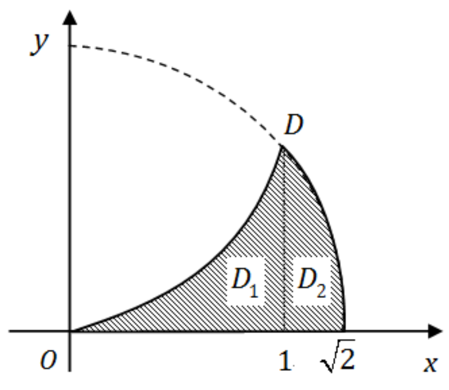
2. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$ 的收敛域为________.

解. 令 $t=(x-2)^2$ 后，则原幂级数变成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n4^n}$. 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n}{n+1}=4$，所以当 $|t|<4$ 即 $0<x<4$ 时级数绝对收敛. 又当 $t=4$ 即 $x=0$ 或 $x=4$ 时得到发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，所以级数收敛域是 $(0,4)$.

3. 交换积分次序 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$________.

解. 原式可写成二重积分 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中积分区域

$$D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant y\leqslant 1,\sqrt{y}\leqslant x\leqslant\sqrt{2-y^2}\right\}.$$



画出 D 的图形如图中的阴影部分，从图形可见 $D=D_1+D_2$，且

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x^2\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\middle|1\leqslant x\leqslant\sqrt{2},0\leqslant y\leqslant\sqrt{2-x^2}\right\}.$$

所以 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{\sqrt{2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

4. 设 A 为 m 阶方阵，B 为 n 阶方阵，且 $|A|=a,|B|=b,C=\begin{pmatrix}O & A\\ B & O\end{pmatrix}$，则 $|C|=$ ________.

解. 由拉普拉斯展开式，$|C|=\begin{vmatrix}0 & A\\ B & 0\end{vmatrix}=(-1)^{mn}|A||B|=(-1)^{mn}ab$.

5. 将 C, C, E, E, I, N, S 这七个字母随机地排成一行,那么恰好排成英文单词 SCIENCE 的概率为 ________.

解. 根据古典概型公式 $P(A)=\dfrac{2!\cdot 2!}{7!}=\dfrac{1}{1260}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数，则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于 ······(　　)

(A) a^2.　(B) $a^2f(a)$.　(C) 0.　(D) 不存在.

解. 应选 (B). 应用洛必达法则可得

$$\lim_{x\to a}F(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^2}{x-a}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to a}\frac{2x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)}{1}=a^2f(a).$$

2. 当 $x\to 0$ 时, 下面四个无穷小量中, 哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量?(　　)

(A) x^2.　(B) $1-\cos x$.　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$.　(D) $x-\tan x$.

解. 应选 (D). 由于 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，故 $x^2,1-\cos x$，$\sqrt{1-x^2}-1$ 是同阶无穷小，可见应选 (D).

3. 设 A 为 $m\times n$ 矩阵，齐次线性方程组 $Ax=0$ 仅有零解的充分条件是 ·····(　　)

(A) A 的列向量线性无关.　(B) A 的列向量线性相关.

(C) A 的行向量线性无关.　(D) A 的行向量线性相关.

解. 应选 (A). 齐次方程组 $Ax=0$ 只有零解等价于 $r(A)=n$. 现 A 是 $m\times n$ 矩阵，即 A 的共有 n 个列向量，故线性无关.

4. 设当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生，则 ·······················(　　)

(A) $P(C)\leqslant P(A)+P(B)-1$.　(B) $P(C)\geqslant P(A)+P(B)-1$.

(C) $P(C)=P(AB)$.　(D) $P(C)=P(A\cup B)$.

解. 应选 (B). 由“当事件 A 与 B 同时发生时，事件 C 必发生”得出 $AB\subset C$，故 $P(AB)\leqslant P(C)$，从而

$$P(C)\geqslant P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant P(A)+P(B)-1.$$

5. 设 n 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布,

$$D(X_1)=\sigma^2,\quad \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

则…………………………………………………………………………( )

(A) S 是 σ 的无偏估计量.

(B) S 是 σ 的最大似然估计量.

(C) S 是 σ 的相合估计量（即一致估计量）.

(D) S 与 $\overline{X}$ 相互独立.

解. 应选 (C). 由于样本方差 S^2 是 σ^2 的一致估计量，其连续函数 $S=\sqrt{S^2}$ 一定也是 σ 的一致估计量.

由于样本方差 S^2 是总体方差的无偏估计量，因此 $ES^2=\sigma^2, ES\neq\sigma$. 否则若 $ES=\sigma$，则 $(ES)^2=\sigma^2, DS=ES^2-(ES)^2=0$. 故不能选 (A).

对于正态总体，S 与 $\overline{X}$ 相互独立，由于总体 X 的分布未知，不能选 (D). 同样因总体分布未知，也不能选 (B).

三、（本题满分 5 分）

设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}, & x\neq1,\\ 1, & x=1.\end{cases}$ 问函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处是否连续? 若不连续，修改函数在 $x=1$ 处的定义使之连续.

解. 利用变量代换与等价无穷小代换，$x\to0$ 时，$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$; $\ln(1+x)\sim x$. 令 $x-1=t$，则有

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{\ln\cos t}{1-\cos\dfrac{\pi t}{2}}=\lim_{t\to0}\frac{\ln[1+(\cos t-1)]}{1-\cos\dfrac{\pi t}{2}}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi^2}{4}t^2}=\lim_{t\to0}\frac{-\dfrac{1}{2}t^2}{\dfrac{\pi^2}{8}t^2}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

而 $f(1)=1$，故 $\lim\limits_{x\to1}f(x)\neq1$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续. 若令 $f(1)=-\frac{4}{\pi^2}$，则函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

四、（本题满分 5 分）

计算 $I=\displaystyle\int\frac{\operatorname{arccot}e^x}{e^x}\,dx$.

解. 用分部积分法:

$$I=-\int\operatorname{arccot}e^x\,d(e^{-x})=-e^{-x}\operatorname{arccot}e^x-\int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$

$$
=-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{arccot}\mathrm{e}^x-\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{d}x
$$
$$
=-\mathrm{e}^{-x}\operatorname{arccot}\mathrm{e}^x-x+\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x})+C,
$$

其中 C 为任意常数.

五、（本题满分 5 分）

设 $z=\sin(xy)+\varphi(x,\frac{x}{y})$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$，其中 $\varphi(u,v)$ 有二阶偏导数.

解. 首先求 z'_x，由题设 $z'_x=y\cos(xy)+\varphi'_1+\frac{1}{y}\varphi'_2$. 再对 y 求偏导数得

$$
\begin{aligned}
z''_{xy}&=\cos(xy)-xy\sin(xy)+(\varphi'_1)'_y+\frac{1}{y}(\varphi'_2)'_y-\frac{1}{y^2}\varphi'_2\\
&=\cos(xy)-xy\sin(xy)+\varphi''_{12}\left(\frac{x}{y}\right)'_y+\frac{1}{y}\varphi''_{22}\left(\frac{x}{y}\right)'_y-\frac{1}{y^2}\varphi'_2\\
&=\cos(xy)-xy\sin(xy)-\frac{x}{y^2}\varphi''_{12}-\frac{x}{y^3}\varphi''_{22}-\frac{1}{y^2}\varphi'_2.
\end{aligned}
$$

六、（本题满分 5 分）

求连续函数 $f(x)$，使它满足 $f(x)+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=x^2$.

解. 两端对 x 求导，得 $f'(x)+2f(x)=2x$. 记 $P(x)=2,Q(x)=2x$，有通解

$$
\begin{aligned}
f(x)&=\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)\\
&=\mathrm{e}^{-2x}\left(\int 2x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x+C\right)=C\mathrm{e}^{-2x}+x-\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

其中 C 为任意常数. 由原方程易见 $f(0)=0$，代入求得参数 $C=\frac{1}{2}$. 从而所求函数 $f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}+x-\frac{1}{2}$.

七、（本题满分 6 分）

求证：当 $x\geqslant 1$ 时，$\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

解. 令 $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{4}$，则

$$
f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{2}{2}\cdot\frac{(1+x^2)(1-x^2)}{(x^2-1)(1+x^2)^2}\equiv 0\quad (x>1).
$$

因为 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 连续，所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上为常数，因为常数的导数恒为 0. 故 $f(x)=f(1)=0$，即 $\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}=\frac{\pi}{4}$.

八、（本题满分 9 分）

设曲线方程 $y=\mathrm{e}^{-x}$（$x\geqslant 0$）.

(Ⅰ) 把曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}$,x 轴，y 轴和直线 $x=\xi(\xi>0)$ 所围成平面图形绕 x 轴旋转一周，得一旋转体，求此旋转体体积 $V(\xi)$；求满足 $V(a)=\frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$ 的 a.

(Ⅱ) 在此曲线上找一点，使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大，并求出该面积.

解. (Ⅰ) 由旋转体体积公式

$$V(\xi)=\pi\int_0^{\xi}y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\xi}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\xi}),\qquad V(a)=\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a}).$$

$\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\lim\limits_{\xi\to+\infty}\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\xi})=\frac{\pi}{2}$. 由题设知 $\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a})=\frac{\pi}{4}$，得 $a=\frac{1}{2}\ln 2$.

(Ⅱ) 设切点为 (b,e^{-b})，则切线方程为

$$y-\mathrm{e}^{-b}=-\mathrm{e}^{-b}(x-b).$$

令 $x=0$，得 $y=\mathrm{e}^{-b}(1+b)$；令 $y=0$，得 $x=1+b$. 故切线与两个坐标轴夹的面积为 $S=\frac{1}{2}(1+b)^2\mathrm{e}^{-b}$. 求导得

$$S'=(1+b)\mathrm{e}^{-b}-\frac{1}{2}(1+b)^2\mathrm{e}^{-b}=\frac{1}{2}(1-b^2)\mathrm{e}^{-b}.$$

令 $S'=0$，得 $b_1=1$ 或 $b_2=-1$（舍去）. 由于当 $b<1$ 时 $S'>0$，当 $b>1$ 时 $S'<0$，故当 $b=1$ 时面积 S 有极大值，此问题中即为最大值. 故所求切点是 $(1,\mathrm{e}^{-1})$，最大面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\mathrm{e}^{-1}=2\mathrm{e}^{-1}$.

九、（本题满分 7 分）

设矩阵 A 与 B 相似，其中

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 求 x 和 y 的值. (Ⅱ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$.

解. (Ⅰ) 因为 $A\sim B$，故其特征多项式相同，即 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，即

$$(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+(x-2)]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y).$$

令 $\lambda=0$，得 $2(x-2)=2y$. 令 $\lambda=1$, 得 $3\cdot(-2)=-2(1-y)$. 由上两式解出 $y=-2$ 与 $x=0$.

(Ⅱ) 由于 $A\sim B$，且 B 是对角阵，所以 A 的特征值也是 $\lambda_1=-1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$.
当 $\lambda_1=-1$ 时，由 $(-E-A)x=0$,

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&-1&-2\\-3&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得到属于特征值 $\lambda=-1$ 的特征向量 $\alpha_1=(0,-2,1)^T$.

当 $\lambda_2=2$ 时，由 $(2E-A)x=0$,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到属于特征值 $\lambda=2$ 的特征向量 $\alpha_2=(0,1,1)^T$.

当 $\lambda_3=-2$ 时，由 $(-2E-A)x=0$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

得到属于特征值 $\lambda=-2$ 的特征向量 $\alpha_3=(1,0,-1)^T$.

那么令

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

有 $P^{-1}AP=B$.

十、(本题满分 6 分)

已知三阶矩阵 $B\neq 0$，且 B 的每一个列向量都是以下方程组的解:

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=0, \\ 2x_1-x_2+\lambda x_3=0, \\ 3x_1+x_2-x_3=0. \end{cases}$$

(I) 求 λ 的值； (II) 证明 $|B|=0$.

解. (I) 因为 $B\neq 0$, 故 B 中至少有一个非零列向量. 依题意, 所给齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解，得系数矩阵的列向量组线性相关，于是

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & \lambda \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

解得 $\lambda=1$.

(II) 反证法：对于 $AB=O$，若 $|B|\neq 0$，则 B 可逆，那么 $A=(AB)B^{-1}=O$．与已知条件 $A\neq 0$ 矛盾．故假设不成立，$|B|=0$.

十一、(本题满分 6 分)

设 A,B 分别为 m,n 阶正定矩阵, 试判定分块矩阵 $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 是否是正定矩阵.

解. (Ⅰ) 先说明对称性：A 和 B 为正定矩阵，故为对称矩阵，即 $A^T=A, B^T=B$，则

$$C^T=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}A^T & 0\\ 0 & B^T\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}=C,$$

即 C 是对称矩阵.

(Ⅱ) 再说明正定性：设 $m+n$ 维列向量 $Z^T=(X^T,Y^T)$，其中

$$X^T=(x_1,x_2,\cdots,x_m),\quad Y^T=(y_1,y_2,\cdots,y_n).$$

若 $Z\neq 0$，则 X,Y 不同时为 0，不妨设 $X\neq 0$，因为 A 是正定矩阵，所以 $X^TAX>0$. 又因 B 是正定矩阵，故对任意的 n 维向量 Y，恒有 $Y^TAY\geqslant 0$. 于是

$$Z^TCZ=(X^T,Y^T)\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix}=X^TAX+Y^TAY>0,$$

即 Z^TCZ 是正定二次型，因此 C 是正定矩阵.

(Ⅲ) 或者用特征值说明正定性：设 A 的特征值是 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，$B$ 的特征值是 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$. 由 A,B 均正定，知 $\lambda_i>0,\mu_j>0\ (i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n)$. 因为

$$|\lambda E-C|=\begin{vmatrix}\lambda E_m-A & 0\\ 0 & \lambda E_n-B\end{vmatrix}=|\lambda E_m-A|\cdot|\lambda E_n-B|$$
$$=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_m)(\lambda-\mu_1)\cdots(\lambda-\mu_m),$$

即矩阵 C 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$，且全部大于 0，所以矩阵 C 正定.

十二、（本题满分 7 分）

假设测量的随机误差 $X\sim N(0,10^2)$，试求 100 次独立重复测量中，至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α，并利用泊松分布求出 α 的近似值（要求小数点后取两位有效数字）.

[附表]

λ	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$
$e^{-\lambda}$	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	$\cdots$

解. 设事件 $A=$ “每次测量中测量误差的绝对值大于 19.6”，因为 $X\sim N(0,10^2)$，即 $EX=\mu=0, DX=\sigma^2=10^2$. 根据正态分布的性质有

$$p=P(A)=P\{|X|>19.6\}=P\left\{\frac{|X|}{10}>1.96\right\}$$
$$=1-P\left\{-1.96\leqslant\frac{X}{10}\leqslant 1.96\right\}=1-[\Phi(1.96)-\Phi(-1.96)]$$
$$=1-[\Phi(1.96)-(1-\Phi(1.96))]$$
$$=2[(1-\Phi(1.96)]=0.05.$$

设 Y 为 100 次独立重复测量中事件 A 出现的次数，则 Y 服从参数为 $n=100, p=0.05$ 的二项分布．根据二项分布的定义，

$$P\{Y=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,2\cdots),$$

则至少有三次测量误差的绝对值大于 19.6 的概率 α 为：

$$\begin{aligned}\alpha&=P\{Y\geqslant 3\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}-P\{Y=2\}\\&=1-0.95^{100}-100\times 0.95^{99}\times 0.05-\frac{100\times 99}{2}\times 0.95^{98}\times 0.05^2.\end{aligned}$$

根据泊松定理，当 n 充分大，p 相当小时，Y 近似服从参数为 $\lambda=np$ 的泊松分布，即有

$$P\{Y=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{(np)^k}{k!}\mathrm{e}^{-np}\quad(k=0,1,2\cdots).$$

故有

$$\begin{aligned}\alpha&=P\{Y\geqslant 3\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}-P\{Y=2\}\\&\approx 1-\frac{(\lambda)^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda}-\frac{(\lambda)^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda}-\frac{(\lambda)^2}{2!}\mathrm{e}^{-\lambda}=1-\mathrm{e}^{-\lambda}-\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}-\frac{\lambda^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda}\\&=1-\mathrm{e}^{-5}(1+5+\frac{5^2}{2})\approx 0.87.\end{aligned}$$

十三、（本题满分 5 分）

一台设备由三大部分构成，在设备运转中各部件需要调整的概率相应为 0.10, 0.20 和 0.30．假设各部件的状态相互独立，以 X 表示同时需要调整的部件数，试求 X 的概率分布，数学期望 EX 和方差 DX.

解. (I) 设 $A_i=$“第 i 个部件需要调整”（$i=1,2,3$），则 A_1,A_2,A_3 相互独立，于是 X 的概率分布如下：

$$P\{X=0\}=P\{\overline{A_1A_2A_3}\}=0.9\times 0.8\times 0.7=0.504,$$

$$\begin{aligned}P\{X=1\}&=P\{A_1\overline{A_2A_3}\}+P\{\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\}+P\{\overline{A_1A_2}A_3\}\\&=0.1\times 0.8\times 0.7+0.9\times 0.2\times 0.7+0.9\times 0.8\times 0.3=0.398,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{X=2\}&=P\{A_1A_2\overline{A_3}\}+P\{A_1\overline{A_2}A_3\}+P\{\overline{A_1}A_2A_3\}\\&=0.1\times 0.2\times 0.7+0.1\times 0.8\times 0.3+0.9\times 0.2\times 0.3=0.092,\end{aligned}$$

$$P\{X=3\}=P\{A_1A_2A_3\}=0.1\times 0.2\times 0.3=0.006.$$

(II) 令 X_i 表示 A_i 出现的次数（$i=1,2,3$），则 X_i 均服从 $0-1$ 分布且相互独立，故由数学期望与方差的性质

$$\begin{aligned}EX&=E(X_1+X_2+X_3)=EX_1+EX_2+EX_3\\&=0.1+0.2+0.3=0.6,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}DX&=D(X_1+X_2+X_3)=DX_1+DX_2+DX_3\\&=0.1\times 0.9+0.2\times 0.8+0.3\times 0.7=0.46.\end{aligned}$$

十四、（本题满分 4 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

(I) 求随机变量 X 的密度 $f_X(x)$； (II) 求概率 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

解. (I) 由边缘密度的公式，当 $x\leqslant 0$ 时，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0\,dy=0$；当 $x>0$ 时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{x}0\,dy+\int_{x}^{+\infty}e^{-y}\,dy=-e^{-y}\Big|_{x}^{+\infty}=e^{-x}.$$

因此 X 的密度为

$$f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

(II) 根据概率的计算公式：

$$\begin{aligned} P\{X+Y\leqslant 1\}&=\iint_{x+y\leqslant 1}f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}\,dy \\ &=-\int_0^{\frac{1}{2}}[e^{-(1-x)}-e^{-x}]\,dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}e^{x-1}\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx \\ &=1-2e^{-\frac{1}{2}}+e^{-1}. \end{aligned}$$

一九九二年考研数学试卷五解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty} t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$，则 $f'(t)=$ ________.

解. $f'(t)=\mathrm{e}^t(2t+1)$.

2. 同试卷四第一 [1] 题.

3. 设 $f(x)=\sin x$，$f[\phi(x)]=1-x^2$，则 $\phi(x)=$ ________；其定义域为 ________.

解. $\arcsin(1-x^2)$；$[-2,2]$.

4. 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的非零特征值是 ________.

解. 应填 4.

5. 设对于事件 A,B,C，有 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=P(BC)=0$，$P(AC)=\dfrac{1}{8}$，则 A,B,C 三个事件中至少出现一个的概率为 ________.

解. 应填 $\dfrac{5}{8}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷四第二 [1] 题.

2. 当 $x\to 0$ 时, 下列四个无穷小量中, 哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量?(　　)

(A) x^2.　　(B) $1-\cos x$.　　(C) $\sqrt{1-x^2}-1$.　　(D) $x-\sin x$.

解. 应选 (D). 由于 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，$\sqrt{1-x^2}-1\sim-\dfrac{1}{2}x^2$，故 $x^2, 1-\cos x$, $\sqrt{1-x^2}-1$ 是同阶无穷小，可见应选 (D).

3. 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 等于 $\cdots\cdots\cdot$ (　　)

(A) $A^{-1}+B^{-1}$.　　(B) $A+B$.　　(C) $A(A+B)^{-1}B$.　　(D) $(A+B)^{-1}$.

解. 应选 (C).

4. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 均为 n 维向量，那么下列结论正确的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) 若 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关.

(B) 若对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

(C) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性相关，则对任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$.

(D) 若 $0\alpha_1+0\alpha_2+\cdots+0\alpha_m=0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

解. 应选 (B).

5. 同试卷四第二 [4] 题.

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$.

解. 利用变量代换与等价无穷小代换，$x\to 0$ 时，$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$；$\ln(1+x)\sim x$. 令 $x-1=t$，则有

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln\cos t}{1-\cos\frac{\pi t}{2}}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln[1+(\cos t-1)]}{1-\cos\frac{\pi t}{2}}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{4}t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{-\frac{1}{2}t^2}{\frac{\pi^2}{8}t^2}=-\frac{4}{\pi^2}.$$

四、(本题满分 5 分)

同试卷四第四题.

五、(本题满分 6 分)

求连续函数 $f(x)$，使它满足 $\displaystyle\int_0^1 f(tx)\,\mathrm{d}t=f(x)+x\sin x$.

解. 令 $u=tx$，则原式变成

$$\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u=xf(x)+x^2\sin x.$$

两端对 x 求导，得

$$f'(x)=-2\sin x-x\cos x.$$

积分得

$$f(x)=\cos x-x\sin x+C,$$

其中 C 为任意常数.

六、（本题满分 5 分）

同试卷四第五题.

七、（本题满分 6 分）

设生产某产品的固定成本为 10，而当产量为 x 时的边际成本函数为 $MC = -40-20x+3x^2$，边际收入函数为 $MR=32+10x$，试求：

(I) 总利润函数； (II) 使总利润最大的产量.

解. (I) 总利润函数为 $-10+72x+15x^2-x^3$.

(II) 当产量为 12 时，总利润最大.

八、（本题满分 9 分）

求证：方程 $x+p+q\cos x=0$ 恰有一个实根，其中 p,q 为常数，且 $0<q<1$.

解. 令 $f(x)=x+p+q\cos x$，则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$，故由介值定理，$f(x)=0$ 至少存在一个实根. 又 $f'(x)=1-q\sin x>0$，故至多有一个实根.

九、（本题满分 7 分）

给定曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$.

(I) 求曲线在横坐标为 x_0 的点处的切线方程；

(II) 求曲线的切线被两坐标轴所截线段的最短长度.

解. (I) 切线方程为 $y-\dfrac{1}{x_0^2}=-\dfrac{2}{x_0^3}(x-x_0)$.

(II) 在 $x_0=\pm\sqrt{2}$ 时取得最短长度 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

十、（本题满分 5 分）

设 A,B 为 3 阶方阵, E 为 3 阶单位阵, 满足 $AB+E=A^2+B$, 又知 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$,

求矩阵 B.

解. $B=A+I=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$.

十一、（本题满分 5 分）

设线性方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵为 A, 三阶矩阵 $B\neq 0$, 且 $AB=0$.

试求求 λ 的值.

解. 由已知，B 的每一个列向量都是上面方程组的解．因为 $B\neq 0$，故 B 中至少有一个非零列向量．即所给齐次方程组 $Ax=0$ 有非零解，从而

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=0,$$

解得 $\lambda=1$.

十二、（本题满分 6 分）

已知实矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 满足条件:

(I) $A_{ij}=a_{ij}$ （$i,j=1,2,3$），其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式； (II) $a_{11}\neq 0$.

计算行列式 $|A|$.

解. $|A|=1$.

十三、（本题满分 7 分）

同试卷四第十二题.

十四、（本题满分 7 分）

同试卷四第十三题.

一九九三年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ ________.

解. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x^2+3x}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=2\cdot\dfrac{3}{5}\cdot 1=\dfrac{6}{5}.$

2. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right), f'(x)=\arctan x^2$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

解. 令 $g(x)=\dfrac{3x-2}{3x+2}$，则有 $g(0)=-1$，$g'(x)=\dfrac{12}{(3x+2)^2}$，$g'(0)=3$. 由复合函数求导法则知 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f'\big(g(0)\big)g'(0)=3f'(-1)=3\arctan 1=\dfrac{3\pi}{4}.$

3. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\ln 3)^n}{2^n}$ 的和为 ________.

解. 由几何级数求和公式得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\ln 3)^n}{2^n}=\dfrac{1}{1-\dfrac{\ln 3}{2}}=\dfrac{2}{2-\ln 3}.$

4. 设 4 阶方阵 A 的秩为 2，则其伴随矩阵 A^* 的秩为 ________.

解. 由于 $r(A)=2$，说明 A 中 3 阶子式全为 0, 于是 $|A|$ 的代数余子式 $A_{ij}\equiv 0$，故 $A^*=0$. 所以秩 $r(A^*)=0$. 若知道伴随矩阵 A^* 秩的关系式

$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n,\\ 1, & r(A)=n-1,\\ 0, & r(A)<n-1,\end{cases}$$

易知 $r(A^*)=0$.

5. 设总体 X 的方差为 1，根据来自 X 的容量为 100 的简单随机样本，测得样本均值为 5, 则 X 的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为 ________.

解. 由于样本容量较大，可以用正态总体作近似估计. 因的方差为 $\sigma=1$，设的期望为 μ，则有

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1).$$

当置信度为 $1-\alpha=0.95$，时 $\alpha=0.05$, 由正态分布表知 $u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96$. 因此用公式:

$$I=\left(\overline{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

将 $\overline{x}=5,\sigma=1,n=100,u_{\frac{\alpha}{2}}=1.96$ 代入上式，得到所求的置信区间为

$$I=(4.804,5.196).$$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 极限不存在.　　(B) 极限存在但不连续.

(C) 连续但不可导.　　(D) 可导.

解. 应选 (C). 先看连续性：当 $x\to 0$ 时，$\sin\dfrac{1}{x^2}$ 为有界变量，$\sqrt{|x|}$ 为无穷小量，则

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}=0=f(0),$$

于是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. 故 (A) 和 (B) 不正确. 再看可导性：因为

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x^2}$$

不存在，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，所以选 (C).

2. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $F(x)=\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^{\ln x}f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)$ 等于 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.　　(B) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

(C) $\dfrac{1}{x}f(\ln x)-\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.　　(D) $f(\ln x)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

解. 应选 (A). 因为 $F'(x)=f(\ln x)\dfrac{1}{x}-f\left(\dfrac{1}{x}\right)\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{f(\ln x)}{x}+\dfrac{1}{x^2}f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. n 阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分而非必要条件.

(C) 必要而非充分条件.　　(D) 既非充分也非必要条件.

解. 应选 (B). A 与对角阵相似 $\Leftrightarrow$ A 有 n 个线性无关的特征向量.

由于当特征值 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，特征向量 α_1,α_2 线性无关. 从而知，当 A 有 n 个不同特征值时，矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量，那么矩阵 A 可以相似对角化. 因为当 A 的特征值有重根时，矩阵 A 仍有可能相似对角化（当特征根的代数重数等于其几何重数的时候），所以特征值不同并非能相似对角化的必要条件.

4. 假设事件 A 和 B 满足 $P(B|A)=1$，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) A 是必然事件.　(B) $P(B|\overline{A})=0$.　(C) $A\supset B$.　(D) $A\subset B$.

解. 考题有误. 采用排除法：对样本空间为 $\Omega=[0,1]$ 的几何概型，取 $A=(0,1]$, $B=[0,1)$，有 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=1$，但 A 不是必然事件，且 $A\not\subset B$，$B\not\subset A$，故排除 (A)、(C)、(D)；另取 $A=\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$B=[0,1]$，有 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=1$，但 $P(B|\bar{A})=\dfrac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=1\neq 0$，可排除 (B)；因此本题没有正确选项.

5. 设随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x)$，且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有……………………………………………………( )

(A) $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$.　　(B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$.

(C) $F(-a)=F(a)$.　　(D) $F(-a)=2F(a)-1$.

解. 应选 (B). 由积分的性质，换元积分，并改变积分上下限有

$$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)\mathrm{d}x=-\int_{+\infty}^{a}\varphi(t)\mathrm{d}t=\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

随机变量 X 的密度函数为 $\varphi(x)$，则有 $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=1$. 又由于 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，所以

$$\int_{-\infty}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$

即有

$$\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{-a}^{0}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{a}\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}F(-a)&=\int_{-\infty}^{-a}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x-\int_{0}^{a}\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}-\int_{0}^{a}\varphi(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

三、（本题满分 5 分）

设 $z=f\left(x,y\right)$ 是由方程 $z-y-x+x\mathrm{e}^{z-y-x}=0$ 所确定的二元函数，求 $\mathrm{d}z$.

解. 利用一阶微分形式的不变性，将方程两端微分得

$$\mathrm{d}z-\mathrm{d}y-\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{z-y-x}\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{z-y-x}\left(\mathrm{d}z-\mathrm{d}y-\mathrm{d}x\right)=0.$$

整理得 $\mathrm{d}z=\dfrac{1+x\mathrm{e}^{z-y-x}-\mathrm{e}^{z-y-x}}{1+x\mathrm{e}^{z-y-x}}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$.

四、（本题满分 7 分）

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x$，求常数 a 的值.

解. 先求左边的极限:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2a}{x+a}\right)^x=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{-2ax}{x+a}\right)=e^{-2a}.$$

再求右边的积分:

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}\,dx&=-2\int_a^{+\infty}x^2\,d\left(e^{-2x}\right)=\left[-2x^2e^{-2x}\right]_a^{+\infty}+4\int_a^{+\infty}xe^{-2x}\,dx\\&=2a^2e^{-2a}+\left[-2xe^{-2x}\right]_a^{+\infty}+2\int_a^{+\infty}e^{-2x}\,dx\\&=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}+e^{-2a}.\end{aligned}$$

由 $e^{-2a}=2a^2e^{-2a}+2ae^{-2a}+e^{-2a}$，得 $a^2+a=0$，所以 $a=0$ 或 $a=-1$.

五、(本题满分 9 分)

设某产品的成本函数为 $C=aq^2+bq+c$，需求函数为 $q=\frac{1}{e}(d-p)$，其中 C 为成本，q 为需求量（即产量），p 为单价，a,b,c,d,e 都是正的常数，且 $d>b$，求:

(I) 利润最大时的产量及最大利润;

(II) 需求对价格的弹性;

(III) 需求对价格弹性的绝对值为 1 时的产量.

解. (I) 利润函数为

$$L=pq-C=(d-eq)q-(aq^2+bq+c)=(d-b)q-(e+a)q^2-c.$$

对 q 求导，并令 $\frac{dL}{dq}=0$，得

$$\frac{dL}{dq}=(d-b)-2(e+a)q=0,$$

解得 $q=\frac{d-b}{2(e+a)}$. 因为

$$\frac{d^2L}{dq^2}=-2(e+a)<0,$$

所以当 $q=\frac{d-b}{2(e+a)}$ 时为利润函数的极大值点，也是利润的最大值点，故有

$$L_{\max}=\frac{(d-b)^2}{4(e+a)}-c.$$

(II) 因为 $q(p)=\frac{1}{e}(d-p)$，所以 $q'(p)=-\frac{1}{e}$，故需求对价格的弹性为

$$\eta=-\frac{p}{q}q'=\frac{d-eq}{eq}.$$

(III) 由 $|\eta|=1$ 得 $q=\frac{d}{2e}$.

六、(本题满分 8 分)

假设:

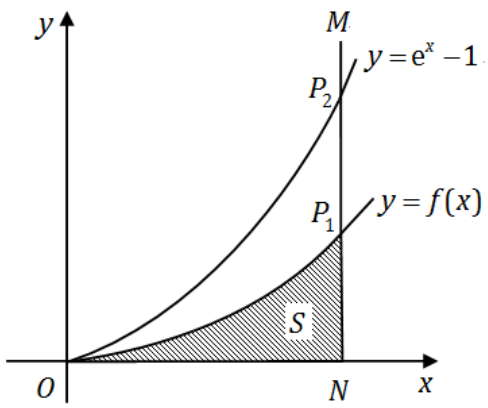
(Ⅰ) 函数 $y=f(x)$（$0\leqslant x<+\infty$）满足条件 $f(0)=0$ 和 $0\leqslant f(x)\leqslant \mathrm{e}^x-1$；

(Ⅱ) 平行于 y 轴的动直线 MN 与曲线 $y=f(x)$ 和 $y=\mathrm{e}^x-1$ 分别相交于点 P_1 和 P_2；

(Ⅲ) 曲线 $y=f(x)$，直线 MN 与 x 轴所围封闭图形面积 S 恒等于线段 P_1P_2 的长度.

求函数 $y=f(x)$ 的表达式.

解. 由题设可得示意图如下.



设 $P_1(x,f(x))$，$P_2(x,\mathrm{e}^x-1)$，则 $S=|P_1P_2|$，即

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x-1-f(x).$$

两端求导得 $f(x)=\mathrm{e}^x-f'(x)$，即 $f(x)+f'(x)=\mathrm{e}^x$．因此

$$\begin{aligned} f(x)&=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left(\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)\\ &=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\left(\int \mathrm{e}^x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+C\right)\mathrm{e}^{-x}=C\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x.\end{aligned}$$

由初始条件 $f(0)=0$，得 $C=-\frac{1}{2}$．因此所求函数为 $f(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})$.

七、（本题满分 6 分）

假设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内二阶可导，过点 $A(0,f(0))$ 与 $B(1,f(1))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于点 $C(c,f(c))$，其中 $0<c<1$．证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

解. 因为 $f(x)$ 分别在 $[0,c]$ 和 $[c,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，故存在 $\xi_1\in(0,c),\xi_2\in(c,1)$，使得

$$f'(\xi_1)=\frac{f(c)-f(0)}{c-0},\quad f'(\xi_2)=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}.$$

由于点 C 在弦 AB 上，故有

$$\frac{f(c)-f(0)}{c-0}=\frac{f(1)-f(c)}{1-c}=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f(1)-f(0),$$

从而

$$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f(1)-f(0).$$

这表明 $f'(x)$ 在区间 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理的条件, 于是存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,1)$, 使得 $f''(\xi)=0$.

八、（本题满分 10 分）

k 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+kx_3=4, \\ -x_1+kx_2+x_3=k^2, \\ x_1-x_2+2x_3=-4 \end{cases}$$

有惟一解、无解、有无穷多组解？在有解情况下，求出其全部解.

解. 对方程组的增广矩阵作初等行变换,

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & \vdots & 4 \\ -1 & k & 1 & \vdots & k^2 \\ 1 & -1 & 2 & \vdots & -4 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & -4 \\ -1 & k & 1 & \vdots & k^2 \\ 1 & 1 & k & \vdots & 4 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & -4 \\ 0 & k-1 & 3 & \vdots & k^2-4 \\ 0 & 2 & k-2 & \vdots & 8 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & -4 \\ 0 & 2 & k-2 & \vdots & 8 \\ 0 & k-1 & 3 & \vdots & k^2-4 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & -4 \\ 0 & 2 & k-2 & \vdots & 8 \\ 0 & 0 & \frac{(1+k)(4-k)}{2} & \vdots & k(k-4) \end{pmatrix}.$$

(I) 当 $k\neq-1$ 且 $k\neq4$ 时，$r(\overline{A})=r(A)=3$，方程组有唯一解，即

$$x_1=\frac{k^2+2k}{k+1},\quad x_2=\frac{k^2+2k+4}{k+1},\quad x_3=\frac{-2k}{k+1}.$$

(II) 当 $k=-1$ 时．$r(\overline{A})=3, r(A)=2$．方程组无解.

(III) 当 $k=4$ 时．有

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & -4 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $r(\overline{A})=r(A)=2<3$，方程组有无穷多解．取 x_3 为自由变量，得方程组的特解为 $\alpha=(0,4,0)^T$．又导出组的基础解系为 $\eta=(-3,-1,1)^T$，所以方程组的通解为 $\alpha+k\eta$，其中 k 为任意常数.

九、（本题满分 9 分）

设二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\alpha x_1x_2+2\beta x_2x_3+2x_1x_3$ 经正交变换 $X=PY$ 化成 $f=y_2^2+2y_3^2$，其中 $X=(x_1,x_2,x_3)^T$ 和 $Y=(y_1,y_2,y_3)^T$ 是三维列向量，P 是 3 阶正交矩阵．试求常数 α,β．

解. 经正交变换二次型 f 的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1&\alpha&1\\\alpha&1&\beta\\1&\beta&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&2\end{pmatrix}.$$

由于 P 是正交矩阵，有 $P^{-1}AP=B$，即知矩阵 A 的特征值是 $0,1,2$．那么有

$$\begin{cases}|A|=2\alpha\beta-\alpha^2-\beta^2=0,\\|E-A|=-2\alpha\beta=0.\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=0.$$

十、（本题满分 8 分）

设随机变量 X 和 Y 同分布，X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(I) 已知事件 $A=\{X>a\}$ 和 $B=\{Y>a\}$ 独立，且 $P(A\cup B)=\frac{3}{4}$．求常数 a．

(II) 求 $\frac{1}{X^2}$ 的数学期望．

解. (I) 因为随机变量 X 和 Y 同分布，则

$$P(A)=P(X>a)=P(Y>a)=P(B),$$

又事件 $A=\{X>a\}$和$B=\{Y>a\}$ 独立，故 $P(AB)=P(A)P(B)$．由加法公式，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=2P(A)-[P(A)]^2=\frac{3}{4}.$$

解以 $P(A)$ 为未知量的方程

$$[P(A)]^2-2P(A)+\frac{3}{4}=0,$$

得 $P(A)=\frac{3}{2}$（舍去）或 $P(A)=\frac{1}{2}$．再依题设条件得

$$\frac{1}{2}=P(A)=P\{X>a\}=\int_a^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^2\frac{3}{8}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}(8-a^3).$$

再解以 a 为未知量的方程 $8-a^3=4$，得 $a=\sqrt[3]{4}$．

(II) 由随机变量函数的数学期望公式，得到

$$E\left(\frac{1}{X^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3}{8}x^2\,\mathrm{d}x=\int_0^2\frac{3}{8}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{4}.$$

十一、(本题满分 8 分)

假设一大型设备在任何长为 t 的时间内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布.

(I) 求相继两次故障之间时间间隔 T 的概率分布;

(II) 求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下,再无故障运行 8 小时的概率 Q.

解. (I) 易见 T 是只取非负值的连续型随机变量. 当 $t<0$ 时, $F(t)=P\{T\leqslant t\}=0$; 当 $t\geqslant 0$ 时, 事件 $\{T>t\}$ 与 $\{N(t)=0\}$ 等价. 于是有

$$F(t)=P\{T\leqslant t\}=1-P\{T>t\}=1-P\{N(t)=0\}=1-\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

因此 $F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda t}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0,\end{cases}$ 即 T 服从参数为 λ 的指数分布.

(II) 由于指数分布具有“无记忆性”,因此

$$\begin{aligned}Q=P\{T\geqslant 16|T\geqslant 8\}&=P\{T\geqslant 8\}=1-P\{T<8\}\\&=1-F(8)=1-(1-\mathrm{e}^{-8\lambda})=\mathrm{e}^{-8\lambda}.\end{aligned}$$

一九九三年考研数学试卷五解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}\right]=$ ________.

解. 将分子有理化，并利用等差数列求和公式，可得 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arcsin x^2$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

解. 令 $g(x)=\dfrac{3x-2}{3x+2}$，则有 $g(0)=-1$，$g'(x)=\dfrac{12}{(3x+2)^2}$，$g'(0)=3$. 由复合函数求导法则知

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=f'\big(g(0)\big)g'(0)=3f'(-1)=3\arcsin 1=\frac{3\pi}{2}.$$

3. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}=$ ________.

解. 应填 $-2\arctan\sqrt{1-x}+C$.

4. 同试卷四第一 [4] 题.

5. 设 10 件产品有 4 件不合格品，从中任取两件，已知所取两件产品中有一件是不合格品，则另一件也是不合格品的概率为 ________.

解. 应填 $\dfrac{1}{5}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷四第二 [1] 题.

2. 同试卷四第二 [2] 题.

3. 若 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ 都是 4 维列向量，且 4 阶行列式

$$|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1|=m,\qquad |\alpha_1,\alpha_2,\beta_2,\alpha_3|=n,$$

则 4 阶行列式 $|\alpha_3,\alpha_2,\alpha_1,\beta_1+\beta_2|$ 等于 ································ (　　)

(A) $m+n$.　　(B) $-(m+n)$.　　(C) $n-m$.　　(D) $m-n$.

解. 应选 (C).

4. 设 $\lambda=2$ 是非奇异矩阵 A 的一个特征值，则矩阵 $\left(\frac{1}{3}A^2\right)^{-1}$ 有一特征值等于 ·· (　　)

(A) $\dfrac{4}{3}$.　　(B) $\dfrac{3}{4}$.　　(C) $\dfrac{1}{2}$.　　(D) $\dfrac{1}{4}$.

解. 应选 (B).

5. 设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布，$X\sim N(\mu,4^2)$，$Y\sim N(\mu,5^2)$，记

$$p_1=P\{X\leqslant\mu-4\},\qquad p_2=P\{Y\geqslant\mu+5\},$$

则 ·· (　　)

(A) 对任何实数 μ，都有 $p_1=p_2$.　　(B) 对任何实数 μ，都有 $p_1<p_2$.

(C) 只对 μ 的个别值，才有 $p_1=p_2$.　　(D) 对任何实数 μ，都有 $p_1>p_2$.

解. 应选 (A).

三、（本题满分 5 分）

同试卷四第三题.

四、（本题满分 7 分）

同试卷四第四题.

五、（本题满分 7 分）

已知某厂生产 x 件产品的成本为 $C=25000+200x+\frac{1}{40}x^2$（元）. 问:

(I) 要使平均成本最小，应生产多少件产品?

(II) 若产品以每件 500 元售出，要使利润最大，应生产多少件产品?

解. (I) 要使平均成本最小，应生产 1000 件产品.

(II) 要使利润最大，应生产 6000 件产品.

六、（本题满分 6 分）

设 p,q 是大于 1 的常数，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明：对于任意 $x>0$，有 $\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$.

解. 令 $f(x)=\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}-x$，则由 $f'(x)=x^{p-1}-1=0$，得惟一的驻点 $x=1$. 又由 $f''(1)=p-1>0$ 知 $f(1)$ 是极小值也是最小值，从而 $f(x)\geqslant f(1)=0$.

七、（本题满分 13 分）

运用导数的知识作函数 $y=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的图形.

解. (I) 显然定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

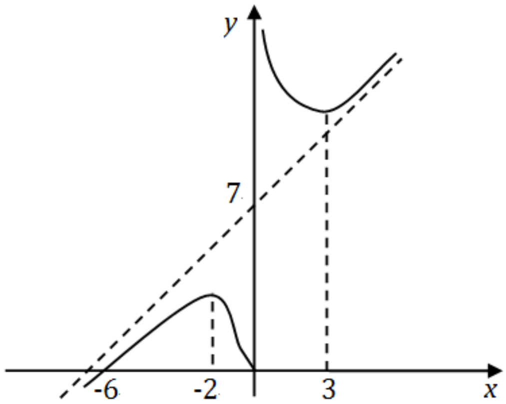
(II) 令 $y'=0$，求得极大值点 $x=-2$ 和极小值点 $x=3$.

(III) 令 $y''=0$，求得拐点 $\left(-\frac{6}{13},\frac{72}{13}e^{-\frac{13}{6}}\right)$.

(IV) $x=0$ 为铅直渐近线，$y=x+7$ 为斜渐近线.

(V) 当 $x \to 0^-$ 时，$y \to 0$.

综上所述，即可作出函数的图形：



八、（本题满分 8 分）

已知 3 阶矩阵 A 的逆矩阵为 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，试求其伴随矩阵 A^* 的逆矩阵.

解. $(A^*)^{-1} = |A^{-1}|A = 2A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

九、（本题满分 8 分）

设 A 是 $m \times n$ 矩阵，B 是 $n \times m$ 矩阵，E 是 n 阶单位矩阵（$m > n$）. 已知 $BA = E$，试判断 A 的列向量组是否线性相关？为什么？

解. 矩阵 A 的列向量组线性无关.

十、（本题满分 8 分）

设随机变量 X 和 Y 独立，都在区间 $[1,3]$ 上服从均匀分布；引进事件 $A = \{X \leqslant a\}$，$B = \{Y > a\}$.

(I) 已知 $P(A \cup B) = \frac{7}{9}$，求常数 a；(II) 求 $\frac{1}{X}$ 的数学期望.

解. (I) $a = \frac{5}{3}$ 或 $a = \frac{7}{3}$.

(II) 由随机变量函数的数学期望公式，得到

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} f(x) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \ln 3.$$

十一、（本题满分 8 分）

同试卷四第十一题.

一九九四年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\displaystyle\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}\,\mathrm{d}x=$________.

解. 由被积函数的奇偶性可得

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}\,\mathrm{d}x&=\int_{-2}^{2}\frac{x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}\frac{|x|}{2+x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_{0}^{2}\frac{x}{2+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_{0}^{2}\frac{1}{2+x^2}\,\mathrm{d}x^2=\ln(2+x^2)\Big|_0^2=\ln6-\ln2=\ln3.\end{aligned}$$

2. 已知 $f'(x)=-1$，则 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x}{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}=$________.

解. 由导数的定义可得

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)-f(x_0-x)+f(x_0)}{x}\\=&(-2)\lim_{x\to0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0)}{-2x}+\lim_{x\to0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0)}{-x}=-2f'(x_0)+f'(x_0)=1.\end{aligned}$$

所以原式 $=1$.

3. 设方程 $\mathrm{e}^{xy}+y^2=\cos x$ 确定 y 为 x 的函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$________.

解. 将 y 看作 x 的函数，方程两边对 x 求导得

$$\mathrm{e}^{xy}(y+xy')+2yy'=-\sin x\quad\Rightarrow\quad y'=-\frac{y\mathrm{e}^{xy}+\sin x}{x\mathrm{e}^{xy}+2y}.$$

4. 设 $A=\begin{pmatrix}0&a_1&0&\cdots&0\\0&0&a_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a_{n-1}\\a_n&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$，其中 $a_i\neq0,i=1,2,\cdots,n$，则 $A^{-1}=$________.

解. 由分块矩阵求逆的运算性质，有公式 $\begin{pmatrix}0&A\\B&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$，且

$$\begin{pmatrix}a_1&&&\\&a_2&&\\&&\ddots&\\&&&a_n\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}&&&\\&\frac{1}{a_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{1}{a_n}\end{pmatrix},$$

所以对 A 分块后可得

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n} \\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

5. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 以 Y 表示对 X 的三次独立重复观察中事件 $\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ 出现的次数，则 $P\{Y=2\}=$________.

解. 概率 $P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，故 $Y\sim B\left(3,\frac{1}{4}\right)$. 由二项分布的概率公式得

$$P\{Y=2\}=C_3^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{64}.$$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷三第二 [4] 题.

2. 同试卷一第二 [3] 题.

3. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，C 是 n 阶可逆矩阵，矩阵 A 的秩为 r，矩阵 $B=AC$ 的秩为 r_1，则 $\cdots\cdots$ (　　)

(A) $r>r_1$.　　(B) $r<r_1$.

(C) $r=r_1$.　　(D) r 与 r_1 的关系由 C 而定.

解. 应选 (C). 由公式 $r(AB)\leqslant\min(r(A),r(B))$，若 A 可逆，则

$$r(AB)\leqslant r(B)=r(EB)=r[A^{-1}(AB)]\leqslant r(AB).$$

从而 $r(AB)=r(B)$，即可逆矩阵与矩阵相乘不改变矩阵的秩.

4. 设 $0<P(A)<1, 0<P(B)<1, P(A|B)+P(\bar{A}|\bar{B})=1$，则 $\cdots\cdots$ (　　)

(A) 事件 A 和 B 互不相容.　　(B) 事件 A 和 B 相互对立.

(C) 事件 A 和 B 互不独立.　　(D) 事件 A 和 B 相互独立.

解. 应选 (D). 因为 $P(A|B)=1-P(\overline{A}|\overline{B})=P(A|\overline{B})$，所以

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}\quad\Rightarrow\quad\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}.$$

整理得 $P(AB)=P(A)P(B)$，即 A 与 B 相互独立.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 是样本均值，记

$$S_1^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\qquad S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,$$

$$S_3^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,\qquad S_4^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_1/\sqrt{n-1}}$.　(B) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}$.　(C) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_3/\sqrt{n}}$　(D) $t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S_4/\sqrt{n}}$.

解. 应选 (B). 由于 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，由抽样分布知识可知

$$U=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\qquad V=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1),$$

且 U 和 V 相互独立. 于是

$$\frac{U}{\sqrt{V/(n-1)}}=\frac{\overline{X}-\mu}{S_2/\sqrt{n-1}}\sim t(n-1).$$

三、(本题满分 6 分)

计算二重积分 $\iint_D(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+y^2\leqslant x+y+1\right\}$.

解. 由 $x^2+y^2\leqslant x+y+1$，配方得

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{2}.$$

令 $x-\frac{1}{2}=r\cos\theta,y-\frac{1}{2}=r\sin\theta$，引入极坐标系 (r,θ)，则区域为

$$D=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant r\leqslant\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}.$$

从而

$$\begin{aligned}\iint_D(x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}}(1+r\cos\theta+r\sin\theta)\cdot r\,\mathrm{d}r\\&=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\Big[\sin\theta-\cos\theta\Big]_0^{2\pi}=\frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

四、(本题满分 5 分)

设函数 $y=y(x)$ 满足条件 $\begin{cases}y''+4y'+4y=0,\\y(0)=2,y'(0)=-4,\end{cases}$ 求广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}y(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 方程 $y''+4y'+4y=0$ 的特征方程为 $\lambda^2+4\lambda+4=0$，解得 $\lambda_1=\lambda_2=-2$. 故原方程的通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

由初始条件 $y(0)=2, y'(0)=-4$ 得 $C_1=2, C_2=0$，因此，微分方程的特解为 $y=2\mathrm{e}^{-2x}$. 再求积分得

$$\int_0^{+\infty} y(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b \mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}(2x)=\lim_{b\to+\infty}-\mathrm{e}^{-2x}\Big|_0^b=1.$$

五、(本题满分 5 分)

已知 $f(x,y)=x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}$，求 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$.

解. 先对 x 求偏导数得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x\arctan\frac{y}{x}+\frac{x^2}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)-\frac{y^2}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y}$$

$$=2x\arctan\frac{y}{x}-\frac{x^2y}{x^2+y^2}-\frac{y^3}{x^2+y^2}=2x\arctan\frac{y}{x}-y.$$

再对 y 求偏导数得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{2x}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x}-1=\frac{2x^2}{x^2+y^2}-1=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

六、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0, F(x)=\displaystyle\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\,\mathrm{d}t$，求 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^{2n}}$.

解. 令 $x^n-t^n=u$，则

$$F(x)=\int_0^x t^{n-1}f(x^n-t^n)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\int_0^{x^n} f(u)\,\mathrm{d}u \quad\Rightarrow\quad F'(x)=x^{n-1}f(x^n).$$

由洛必达法则及导数的定义可得

$$\lim_{x\to0}\frac{F(x)}{x^{2n}}=\lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{2nx^{2n-1}}=\lim_{x\to0}\frac{x^{n-1}f(x^n)}{2nx^{2n-1}}$$

$$=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{f(x^n)}{x^n}=\frac{1}{2n}\lim_{x\to0}\frac{f(x^n)-f(0)}{x^n-0}=\frac{1}{2n}f'(0).$$

七、(本题满分 8 分)

已知曲线 $y=a\sqrt{x}$（$a>0$）与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线，求：

(I) 常数 a 及切点 (x_0,y_0);

(II) 两曲线与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积 V_x.

解. (I) 由 $y=a\sqrt{x}$ 知 $y'=\dfrac{a}{2\sqrt{x}}$. 由 $y=\ln\sqrt{x}$ 知 $y'=\dfrac{1}{2x}$. 由于两曲线在 (x_0,y_0) 处有公共切线，可得

$$\frac{a}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2x_0}\quad\Rightarrow\quad x_0=\frac{1}{a^2}.$$

将 $x_0=\frac{1}{a^2}$ 分别代入两曲线方程，有

$$y_0=a\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\ln\sqrt{\frac{1}{a^2}} \quad\Rightarrow\quad y_0=1=\ln\sqrt{\frac{1}{a^2}}.$$

于是 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}, x_0=\frac{1}{a^2}=\mathrm{e}^2$，从而切点为 $(\mathrm{e}^2,1)$.

(II) V 是两个旋转体的体积之差，由旋转体体积公式可得

$$V_x=\pi\int_0^{\mathrm{e}^2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x-\pi\int_1^{\mathrm{e}^2}(\ln\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^2-\frac{\pi}{4}\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^2-\frac{\pi}{4}\left[x\ln^2 x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}-2\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln x\,\mathrm{d}x\right]=\frac{\pi}{2}\mathrm{e}^2-\frac{\pi}{2}x\Big|_1^{\mathrm{e}^2}=\frac{\pi}{2}.$$

八、（本题满分 6 分）

假设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，$f''(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内存在且大于零，记

$$F(x)=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\quad(x>a),$$

证明 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加.

解. 对 $F(x)$ 求导得

$$F'(x)=\frac{f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)}{(x-a)^2}.$$

令 $\varphi(x)=f'(x)(x-a)-f(x)+f(a)$，则由 $x>a$ 时

$$\varphi'(x)=f''(x)(x-a)+f'(x)-f'(x)=(x-a)f''(x)>0$$

知 $\varphi(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调上升，于是 $\varphi(x)>\varphi(a)=0$. 故

$$F'(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^2}>0,$$

所以 $F(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调增加.

九、（本题满分 11 分）

设线性方程组 $\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3,\\ x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3,\\ x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3,\\ x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3.\end{cases}$

(I) 证明：若 a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等，则此线性方程组无解；

(II) 设 $a_1=a_3=k$, $a_2=a_4=-k$（$k\neq 0$），且已知 β_1, β_2 是该方程组的两个解，其中

$$\beta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},$$

写出此方程组的通解.

解. (I) 因为增广矩阵 $\overline{A}$ 的行列式是范德蒙行列式，a_1,a_2,a_3,a_4 两两不相等，则有

$$|\overline{A}|=(a_2-a_1)(a_3-a_1)(a_4-a_1)(a_3-a_2)(a_4-a_2)(a_4-a_3)\neq 0,$$

故 $r(\overline{A})=4$．而系数矩阵 A 的秩 $r(A)=3$，所以方程组无解.

(II) 当 $a_1=a_3=k, a_2=a_4=-k$（$k\neq 0$）时，方程组同解于

$$\begin{cases} x_1+kx_2+k^2x_3=k^3, \\ x_1-kx_2+k^2x_3=-k^3. \end{cases}$$

因为 $\begin{vmatrix} 1 & k \\ 1 & -k \end{vmatrix}=-2k\neq 0$，知 $r(A)=r(\overline{A})=2$．由 $n-r(A)=3-2=1$，知导出组 $Ax=0$ 的基础解系含有 1 个解向量．由解的结构和解的性质，

$$\eta=\beta_1-\beta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

是 $Ax=0$ 的基础解系．于是方程组的通解为

$$\beta_1+k\eta=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},$$

其中 k 为任意常数.

十、（本题满分 8 分）

设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有三个线性无关的特征向量，求 x 和 y 应满足的条件.

解. 由 A 的特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda-1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

得到 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1$．由题设有三个线性无关的特征向量，因此 $\lambda=1$ 必有两个线性无关的特征向量，从而 $r(E-A)=1$．由初等行变换得

$$E-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

由 $r(E-A)=1$，得 x 和 y 必须满足条件 $x+y=0$.

十一、（本题满分 8 分）

假设随机变量 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，且同分布

$$P\{X_i=0\}=0.6,\quad P\{X_i=1\}=0,\quad (i=1,2,3,4).$$

求行列式 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布.

解. 记 $Y_1=X_1X_4, Y_2=X_2X_3$，则 $X=Y_1-Y_2$，随机变量 Y_1 和 Y_2 相互独立且同分布，由 A 与 B 独立可得出 $P(AB)=P(A)P(B)$，故

$$P\{Y_2=1\}=P\{Y_1=1\}=P\{X_1=1,X_4=1\}=P\{X_1=1\}\cdot P\{X_4=1\}=0.16,$$

$$P\{Y_2=0\}=P\{Y_1=0\}=1-P\{Y_1=1\}=0.84.$$

由行列式的计算公式，随机变量 $X=Y_1-Y_2$，有三个可能取值：$-1, 0, 1$.

$$P\{X=-1\}=P\{Y_1=0, Y_2=1\}=P\{Y_1=0\}\cdot P\{Y_2=1\}=0.84\times 0.16=0.1344,$$

$$P\{X=1\}=P\{Y_1=1, Y_2=0\}=P\{Y_1=1\}\cdot P\{Y_2=0\}=0.1344,$$

$$P\{X=0\}=1-P\{X=-1\}-P\{X=1\}=0.7312.$$

所求的行列式的概率分布列于下表:

X	-1	0	1
P	0.1344	0.7312	0.1344

十二、（本题满分 8 分）

假设由自动线加工的某种零件的内径 X(毫米) 服从正态分布 $N(\mu,1)$，内径小于 10 或大于 12 的为不合格品，其余为合格品，销售每件合格品获利，销售每件不合格品亏损. 已知销售利润 T(单位: 元) 与销售零件的内径 X 有如下关系:

$$T=\begin{cases} -1, & X<10, \\ 20, & 10\leqslant X\leqslant 12, \\ -5, & X>12. \end{cases}$$

问平均内径 μ 取何值时，销售一个零件的平均利润最大?

解. 依据数学期望的计算公式及一般正态分布的标准化方法，有

$$\begin{aligned} E(T)&=-P\{X<10\}+20P\{10\leqslant X\leqslant 12\}-5P\{X>12\} \\ &=-\Phi(10-\mu)+20[\Phi(12-\mu)-\Phi(10-\mu)]-5[1-\Phi(12-\mu)] \\ &=25\Phi(12-\mu)-21\Phi(10-\mu)-5. \end{aligned}$$

此时数学期望依赖于参数 μ，为使其达到最大值，令其一阶导数为 0，有

$$\frac{\mathrm{d}E(T)}{\mathrm{d}\mu}=-25\varphi(12-\mu)+21\varphi(10-\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[21\mathrm{e}^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}-25\mathrm{e}^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}\right],$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}E(T)}{\mathrm{d}\mu}=0$，得

$$21\mathrm{e}^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}-25\mathrm{e}^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}=0 \quad\Rightarrow\quad 21\mathrm{e}^{-\frac{(10-\mu)^2}{2}}=25\mathrm{e}^{-\frac{(12-\mu)^2}{2}}.$$

解上面的方程得 $\mu=\mu_0=11-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{25}{21}\approx 10.9$. 得到唯一驻点 $\mu=\mu_0\approx 10.9$，因为此问题是实际问题，所以平均利润函数必然有最大值，而且这个最大值是唯一的．由题意知，当 $\mu=\mu_0\approx 10.9$ 毫米时，平均利润最大.

一九九四年考研数学试卷五解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷四第一 [1] 题.

2. 同试卷四第一 [2] 题.

3. 同试卷四第一 [3] 题.

4. 同试卷四第一 [4] 题.

5. 假设一批产品中一，二，三等品各占 60%，30%，10%，从中随意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为 ________.

解. 应填 $2/3$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷三第二 [4] 题.

2. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)>0$, 则方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在开区间 (a,b) 内的根有 $\cdots\cdots$ ( )

(A) 0 个. (B) 1 个. (C) 2 个. (D) 无穷多个.

解. 应选 (B).

3. 设 A, B 都是 n 阶非零矩阵，且 $AB=O$，则 A 和 B 的秩 $\cdots\cdots$ ( )

(A) 必有一个等于零. (B) 都小于 n.

(C) 一个小于 n，一个等于 n. (D) 都等于 n.

解. 应选 (B).

4. 设有向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(3,0,7,14)$, $\alpha_4=(1,-2,2,0)$, $\alpha_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大线性无关组是 $\cdots\cdots$ ( )

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$. (B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$. (C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$. (D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$.

解. 应选 (B).

5. 同试卷四第二 [4] 题.

三、（本题满分 5 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

解. 令 $t=\frac{1}{x}$，再由洛必达法则可得极限为 $\frac{1}{2}$.

四、（本题满分 5 分）

同试卷四第五题.

五、（本题满分 6 分）

设 $\frac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，求 $\int x^3 f'(x)\mathrm{d}x$.

解. 由分部积分公式，求得积分等于 $x^2\cos x-4x\sin x-6\cos x+C$.

六、（本题满分 8 分）

某养殖场饲养两种鱼，若甲种鱼放养 x（万尾），乙种鱼放养 y（万尾），收获时两种鱼的收获量分别为 $(3-\alpha x-\beta y)x$ 和 $(4-\beta x-2\alpha y)y$（$\alpha>\beta>0$）. 求使产鱼总量最大的放养数.

解. 甲种鱼放养 $\frac{3\alpha-2\beta}{2\alpha^2-\beta^2}$，乙种鱼放养 $\frac{4\alpha-3\beta}{2(2\alpha^2-\beta^2)}$ 时，产鱼总量最大.

七、（本题满分 8 分）

已知曲线 $y=a\sqrt{x}$（$a>0$）与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 在点 (x_0,y_0) 处有公共切线，求：

(I) 常数 a 及切点 (x_0,y_0);

(II) 两曲线与 x 轴围成的平面图形的面积 S.

解. (I) 由 $y=a\sqrt{x}$ 知 $y'=\frac{a}{2\sqrt{x}}$. 由 $y=\ln\sqrt{x}$ 知 $y'=\frac{1}{2x}$. 由于两曲线在 (x_0,y_0) 处有公共切线，可得

$$\frac{a}{2\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2x_0} \quad\Rightarrow\quad x_0=\frac{1}{a^2}.$$

将 $x_0=\frac{1}{a^2}$ 分别代入两曲线方程，有

$$y_0=a\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\ln\sqrt{\frac{1}{a^2}} \quad\Rightarrow\quad y_0=1=\ln\sqrt{\frac{1}{a^2}}.$$

于是 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}, x_0=\frac{1}{a^2}=\mathrm{e}^2$，从而切点为 $(\mathrm{e}^2,1)$.

(II) 由面积公式可得 $S=\int_0^1(\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^2y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}$.

八、（本题满分 7 分）

同试卷四第六题.

九、（本题满分 8 分）

设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系，证明：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

解. 容易验证 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 都是线性方程组的解. 设

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0,$$

整理得

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3=0.$$

由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，得到

$$\begin{cases} k_1+k_3=0, \\ k_1+k_2=0, \\ k_2+k_3=0. \end{cases}$$

解得 $k_1=k_2=k_3=0$，即 $\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

十、（本题满分 8 分）

同试卷四第十题.

十一、（本题满分 7 分）

假设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2x, & 0<x<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 现在对 X 进行 n 次独立重复观测，以 V_n 表示观测值不大于 0.1 的次数，试求随机变量 V_n 的概率分布.

解. 其概率分布为 $P\{V_n=m\}=C_n^m(0.01)^m(0.99)^{n-m}$（$m=0,1,2,\cdots,n$）.

十二、（本题满分 8 分）

同试卷四第十二题.

一九九五年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，则 $f^{(n)}(x)=$________.

解. 由于 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}=\frac{2}{1+x}-1=2(1+x)^{-1}-1$，所以

$$f'(x)=2\cdot(-1)(1+x)^{-2},$$
$$f''(x)=2\cdot(-1)(-2)(1+x)^{-3},\cdots,$$
$$f^{(n)}(x)=2\cdot(-1)^n n!(1+x)^{-(n+1)}=\frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

2. 设 $z=xyf\left(\frac{y}{x}\right),f(u)$ 可导，则 $xz'_x+yz'_y=$________.

解. 根据复合函数求导法则，

$$z'_x=yf\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=yf\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{y^2}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right),$$
$$z'_y=xf\left(\frac{y}{x}\right)+xyf'\left(\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{1}{x}=xf\left(\frac{y}{x}\right)+yf'\left(\frac{y}{x}\right),$$

所以 $xz'_x+yz'_y=xyf\left(\frac{y}{x}\right)-y^2f'\left(\frac{y}{x}\right)+xyf\left(\frac{y}{x}\right)+y^2f'\left(\frac{y}{x}\right)=2xyf\left(\frac{y}{x}\right)$.

3. 设 $f'(\ln x)=1+x$，则 $f(x)=$________.

解. 在 $f'(\ln x)=1+x$ 中令 $\ln x=t$，则 $f'(t)=1+\mathrm{e}^t$，从而

$$f(t)=\int\left(1+\mathrm{e}^t\right)\mathrm{d}t=t+\mathrm{e}^t+C\quad\Rightarrow\quad f(x)=x+\mathrm{e}^x+C.$$

4. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$，$A^*$ 是 A 的伴随矩阵，则 $(A^*)^{-1}=$________.

解. 由 $AA^*=|A|E$，有 $\frac{A}{|A|}A^*=E$, 故 $(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$. 而 $|A|=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{vmatrix}=10$，所以

$$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}.$$

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其中参数 μ 和 σ^2 未知，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$Q^2=\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$，则假设 $H_0:\mu=0$ 的 t 检验使用统计量 $t=$________.

解. 该题是属于一个正态总体方差未知的关于期望值 μ 的假设检验问题. 据此类型应该选取 t 检验的统计量是

$$t=\frac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}=\frac{\overline{X}}{\sqrt{\dfrac{1}{n(n-1)}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}},$$

经过化简得 $t=\dfrac{\overline{X}}{Q}\sqrt{n(n-1)}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足条件 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率为$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) 2. (B) -1. (C) $\dfrac{1}{2}$. (D) -2.

解. 应选 (D). 这是因为

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-2.\end{aligned}$$

2. 下列广义积分发散的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$. (B) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

(C) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$. (D) $\displaystyle\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解. 应选 (A). 由于当 $x=0$ 时 $\sin x=0$，故在积分区间 $[-1,1]$ 中 $x=0$ 是瑕点，反常积分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 应分解为两个反常积分之和:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x.$$

而且 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是两个反常积分 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 都收敛. 由于广义积分

$$\int_{0}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\Big|_{0}^{1}=+\infty,$$

即 $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 发散，故 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ 发散. 注意不可误以为 $\dfrac{1}{\sin x}$ 是奇函数，于是 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x=0$，从而得出它是收敛的错误结论.

另外三个广义积分都收敛（其中最后一个是泊松积分）:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\Big[\arcsin x\Big]_{-1}^{1}=\pi,$$

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^2 x}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{\ln x}\right]_2^{+\infty}=\frac{1}{\ln 2},$$

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

3. 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $r(A)=m<n,E_m$ 为 m 阶单位矩阵，下述结论中正确的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) A 的任意 m 个行向量必线性无关.

(B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零.

(C) 若矩阵 B 满足 $BA=0$，则 $B=0$.

(D) A 通过初等行变换，必可以化为 $(E_m,0)$ 的形式.

解. 应选 (C)．事实上，由 $BA=0$ 知 $r(B)+r(A)\leqslant m$，又 $r(A)=m$，从而 $r(B)\leqslant 0$，按定义又有 $r(B)\geqslant 0$，于是 $r(B)=0$，即 $B=0$.

$r(A)=m$ 表示 A 中有 m 个列向量线性无关，有 m 阶子式不等于零，并不是任意的，因此 (A) 和 (B) 均不正确.

经初等变换可把 A 化成标准形，一般应当既有初等行变换也有初等列变换，只用一种不一定能化为标准形. 例如 $\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, 只用初等行变换就不能化成 $(E_2,0)$ 的形式，故 (D) 不正确.

4. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布，记 $U=X-Y,V=X+Y$，则随机变量 U 与 V 必然$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) 不独立. (B) 独立.

(C) 相关系数不为零. (D) 相关系数为零.

解. 应选 (D)．事实上,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U,V)&=\mathrm{Cov}(X-Y,X+Y)=\mathrm{Cov}(X,X+Y)-\mathrm{Cov}(Y,X+Y)\\&=\mathrm{Cov}(X,X)+\mathrm{Cov}(X,Y)-\mathrm{Cov}(Y,X)-\mathrm{Cov}(Y,Y)\\&=DX-DY.\end{aligned}$$

由于 X 和 Y 同分布，因此 $DX=DY$，于是有 $\mathrm{Cov}(U,V)=0$．所以 U 与 V 的相关系数 $\rho=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$ 也为零.

5. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 则随 σ 的增大, 概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$( )

(A) 单调增大. (B) 单调减少. (C) 保持不变. (D) 增减不定.

解. 应选 (C)．由于 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，将此正态分布标准化得 $\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，故

$$P\{|X-\mu|<\sigma\}=P\left\{\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|<1\right\}=2\Phi(1)-1.$$

即概率 $P\{|X-\mu|<\sigma\}$ 的值与 σ 大小无关.

三、（本题满分 6 分）

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t, & x>0\end{cases}$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性.

解. (I) 先看左极限与右极限:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(1-\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^2}=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2}{1}=1.$$

故 $f(0^+)=f(0^-)=f(0)$，即 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(II) 再看左导数与右导数:

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t-x}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x^2-1}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^4}{2x}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{2}{x^2}(1-\cos x)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(1-\cos x)-x^2}{x^3}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2\sin x-2x}{3x^2}=\lim_{x\to 0^-}\frac{2(\cos x-1)}{6x}=0.$$

即 $f'_+(0)=f'_-(0)=0$，故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $f'(0)=0$.

四、（本题满分 6 分）

已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x} f\left(\frac{t}{3}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}$，求 $f(x)$.

解. 在变上限定积分令 $s=\frac{t}{3}$，得到

$$f(x)=3\int_0^x f(s)\,\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{2x}.$$

在上式中令 $x=0$ 得 $f(0)=1$，将上式两端对 x 求导数得

$$f'(x)=3f(x)+2\mathrm{e}^{2x}.$$

这是一阶线性微分方程的特解问题. 用 e^{-3x} 同乘方程两端，得

$$\left(f(x)\mathrm{e}^{-3x}\right)'=2\mathrm{e}^{-x}.$$

积分即得

$$f(x)=C\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}.$$

由 $f(0)=1$ 可确定常数 $C=3$，于是所求的函数是 $f(x)=3\mathrm{e}^{3x}-2\mathrm{e}^{2x}$.

五、（本题满分 6 分）

将函数 $y=\ln(1-x-2x^2)$ 展成 x 的幂级数，并指出其收敛区间.

解. 由 $1-x-2x^2=(1-2x)(1+x)$ 知

$$\ln(1-x-2x^2)=\ln(1-2x)+\ln(1+x).$$

因为

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots,$$

其收敛区间为 $(-1,1)$；又

$$\ln(1-2x)=(-2x)-\frac{(-2x)^2}{2}+\frac{(-2x)^3}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(-2x)^n}{n}+\cdots,$$

其收敛区间为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. 于是有

$$\ln(1-x-2x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+(-1)^{n+1}\frac{(-2x)^n}{n}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n,$$

其收敛区间为 $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

六、（本题满分 5 分）

计算 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

解. 方法一：将积分区域 D 分为两部分：

$$D_1=\left\{(x,y)|-\infty\leqslant x\leqslant+\infty,x\leqslant y<+\infty\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)|-\infty\leqslant x\leqslant+\infty,-\infty<y\leqslant x\right\}.$$

从而有

$$I=\iint_{D_1+D_2}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy=\iint_{D_1}xe^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy+\iint_{D_2}ye^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}\,dy\int_{-\infty}^{y}xe^{-x^2}\,dx+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx\int_{-\infty}^{x}ye^{-y^2}\,dy$$

$$=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2y^2}\,dy-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2}\,dx=-\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-2x^2}\,dx.$$

令 $t=\sqrt{2}x$，利用泊松积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$. 则有

$$I=-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\,dt=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

方法二：引入极坐标系 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，则

$$-\frac{3\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\quad\Rightarrow\quad\min\{x,y\}=y=r\sin\theta,$$

$$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{4}\quad\Rightarrow\quad\min\{x,y\}=x=r\cos\theta.$$

于是

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{x,y\}e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

$$=\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\left[\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right]=-2\sqrt{2}\int_0^{+\infty}r^2\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=\sqrt{2}\left[r\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r\right]=-\sqrt{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\,\mathrm{d}r=-\sqrt{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

七、（本题满分 6 分）

设某产品的需求函数为 $Q=Q(P)$，收益函数为 $R=PQ$，其中 P 为产品价格，Q 为需求量 (产品的产量), $Q(P)$ 为单调减函数．如果当价格为 P_0，对应产量为 Q_0 时，边际收益 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0}=a>0$, 收益对价格的边际效应 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0}=c<0$, 需求对价格的弹性 $E_P=b>1$． 求 P_0 和 Q_0.

解. 由收益 $R=PQ$ 对 Q 求导，有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=P+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}=P+\frac{P}{\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}}=P\left(1+\frac{1}{E_P}\right),$$

从而

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=Q_0}=P_0\left(1-\frac{1}{b}\right)=a\quad\Rightarrow\quad P_0=\frac{ab}{b-1}.$$

由收益 $R=PQ$ 对 P 求导，有

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Q\left(1+\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)=Q(1+E_P),$$

从而

$$\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0}=Q_0(1-b)=c\quad\Rightarrow\quad Q_0=\frac{c}{1-b}.$$

八、（本题满分 6 分）

设 $f(x), g(x)$ 在区间 $[-a,a](a>0)$ 上连续，$g(x)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 满足条件 $f(x)+f(-x)=A$（A 为常数）.

(I) 证明 $\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$;

(II) 利用 (I) 的结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

解. (I) 由要证的结论可知，应将左端积分化成 $[0,a]$ 上的积分，即

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{0}f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

令 $x=-t$，则有

$$\int_{-a}^{0}f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(-t)g(-t)\mathrm{d}(-t)=\int_0^a f(-t)g(t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(-x)g(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_{-a}^{a} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_0^a [f(x)+f(-x)]g(x)\mathrm{d}x = A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x.$$

(II) 取 $f(x)=\arctan \mathrm{e}^x$, $g(x)=|\sin x|$, $a=\frac{\pi}{2}$，于是

$$f(x)+f(-x)=\arctan \mathrm{e}^x+\arctan\frac{1}{\mathrm{e}^x}=\frac{\pi}{2}.$$

于是有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\arctan \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

九、（本题满分 9 分）

已知向量组 (I) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$；(II) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$；(III) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$. 如果各向量组的秩分别为 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3$, $r(\mathrm{III})=4$，证明: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$ 的秩为 4.

解. 因为 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})=3$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关，因此 α_4 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，设为 $\alpha_4=l_1\alpha_1+l_2\alpha_2+l_3\alpha_3$. 若

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\alpha_5-\alpha_4)=0,$$

即有

$$(k_1-l_1k_4)\alpha_1+(k_2-l_2k_4)\alpha_2+(k_3-l_3k_4)\alpha_3+k_4\alpha_5=0.$$

由于 $r(\mathrm{III})=4$，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$ 线性无关. 故必有

$$\begin{cases} k_1-l_1k_4=0,\\ k_2-l_2k_4=0,\\ k_3-l_3k_4=0,\\ k_4=0.\end{cases}$$

解出 $k_4=0, k_3=0, k_2=0, k_1=0$. 于是线性无关，即其秩为 4.

十、（本题满分 10 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3+8x_2x_3$.

(I) 写出二次型 f 的矩阵表达式；

(II) 用正交变换把二次型 f 化为标准形，并写出相应的正交矩阵.

解. (I) 因为 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2\\ 2 & 4 & 4\\ -2 & 4 & -3\end{pmatrix},$$

故 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵表示为

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}0&2&-2\\2&4&4\\-2&4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

(II) 由 A 的特征方程

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2\\-2&\lambda-4&-4\\2&-4&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda&-2&2-2\lambda\\-2&\lambda-4&0\\2&-4&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda+4&-10&0\\-2&\lambda-4&0\\2&-4&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda^2-36)=0.$$

得到 A 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=6,\lambda_3=-6$.

由 $(E-A)x=0$ 得基础解系 $X_1=(2,0,-1)^T$，即属于 $\lambda=1$ 的特征向量.

由 $(6E-A)x=0$ 得基础解系 $X_2=(1,5,2)^T$，即属于 $\lambda=6$ 的特征向量.

由 $(-6E-A)x=0$ 得基础解系 $X_3=(1,-1,2)^T$，即属于 $\lambda=-6$ 的特征向量.

对于实对称矩阵，特征值不同特征向量已正交，故只须单位化，有

$$\gamma_1=\frac{X_1}{\|X_1\|}=\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix},\gamma_2=\frac{X_2}{\|X_2\|}=\frac{1}{\sqrt{30}}\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix},\gamma_3=\frac{X_3}{\|X_3\|}=\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

那么令

$$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt6}\\0&\frac{5}{\sqrt{30}}&-\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{1}{\sqrt5}&\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix},$$

经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，二次型化为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=y^T\Lambda y=y_1^2+6y_2^2-6y_3^2.$$

十一、（本题满分 8 分）

假设一厂家生产的每台仪器，以概率 0.70 可以直接出厂；以概率 0.30 需进一步调试，经调试后以概率 0.80 可以出厂；以概率 0.20 定为不合格品不能出厂. 现该厂新生产了 n（$n\geqslant 2$）台仪器（假设各台仪器的生产过程相互独立）. 求：

(I) 全部能出厂的概率 α；

(II) 其中恰好有两台不能出厂的概率 β；

(III) 其中至少有两台不能出厂的概率 θ.

解. 对于新生产的每台仪器，设事件 A 表示"仪器需要进一步调试"，B 表示"仪器能出厂"，则 $\overline{A}=$"仪器能直接出厂"．$AB=$"仪器经调试后能出厂"．且 $B=\overline{A}\cup AB,\overline{A}$ 与 AB 互不相容，应用加法公式与乘法公式有

$$P(B)=P(\overline{A})+P(AB)=P(\overline{A})+P(A)P(B|A)=0.7+0.3\times 0.8=0.94.$$

设 X 为所生产的 n 台仪器中能出厂的台数，则 X 服从二项分布 $B(n,0.94)$. 由二项分布的概率计算公式，可得所求概率为

(I) $\alpha=P\{X=n\}=0.94^n$;

(II) $\beta=P\{X=n-2\}=C_n^2\cdot 0.94^{n-2}\cdot 0.06^2$;

(III) $\theta=P\{X\leqslant n-2\}=1-P\{X=n-1\}-P\{X=n\}=1-0.06n\times 0.94^{n-1}-0.94^n$.

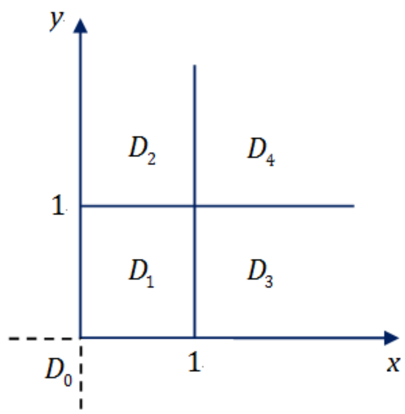
十二、（本题满分 8 分）

已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

求 X 和 Y 联合分布函数 $F(x,y)$.

解. 将整个平面分为五个区域 (如下图).



(I) 当 $(x,y)\in D_0$，即 $x<0$ 或 $y<0$ 时，$F(x,y)=0$.

(II) 当 $(x,y)\in D_1$，即 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4st\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s=\int_0^x 2sy^2\,\mathrm{d}s=x^2y^2.$$

(III) 当 $(x,y)\in D_2$，即 $0\leqslant x\leqslant 1$ 且 $y>1$ 时，

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y 4st\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}s=\int_0^x\mathrm{d}s\int_0^1 4st\,\mathrm{d}t=\int_0^x 2s\,\mathrm{d}s=x^2.$$

(IV) 当 $(x,y)\in D_3$，即 $x>1$ 且 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，与 D_2 类似，有 $F(x,y)=y^2$.

(V) 当 $(x,y)\in D_4$，即 $x>1$ 且 $y>1$ 时，$F(x,y)=1$.

综上分析，(X,Y) 的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}0, & x<0 \text{ 或 } y<0,\\ x^2y^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ y^2, & 1<x, 0\leqslant y\leqslant 1,\\ x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, 1<y,\\ 1, & 1<x, 1<y.\end{cases}$$

一九九五年考研数学试卷五解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{ax}=\int_{-\infty}^{a} t\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$，则常数 a 等于 ________.

解. 应填 2.

2. 同试卷四第一 [2] 题.

3. 同试卷四第一 [3] 题.

4. 同试卷四第一 [4] 题.

5. 设 X 是一个随机变量，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1-x, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$ 则方差 $DX=$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{6}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷四第二 [1] 题.

2. 同试卷四第二 [2] 题.

3. 设 n 维行向量 $\alpha=\left(\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}\right)$，矩阵 $A=E-\alpha^T\alpha$, $B=E+2\alpha^T\alpha$，其中 E 为 n 阶单位矩阵，则 AB 等于$\cdots\cdots$(　)

(A) O.　(B) $-E$.　(C) E.　(D) $E+\alpha^T\alpha$.

解. 应选 (C).

4. 设矩阵 $A_{m\times n}$ 的秩为 $r(A)=m<n$，E_m 为 m 阶单位矩阵，下述结论中正确的是$\cdots\cdots$(　)

(A) A 的任意 m 个列向量必线性无关.

(B) A 的任意一个 m 阶子式不等于零.

(C) 非齐次线性方程组 $Ax=b$ 一定有无穷多组解.

(D) A 通过初等行变换，必可以化为 $(E_m,0)$ 的形式.

解. 应选 (C).

5. 同试卷四第二 [5] 题.

三、（本题满分 6 分）

同试卷四第三题.

四、（本题满分 6 分）

求不定积分 $\int (\arcsin x)^2 \, dx$.

解. $x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C$.

五、（本题满分 7 分）

同试卷四第八题.

六、（本题满分 6 分）

同试卷四第七题.

七、（本题满分 5 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

解. 作辅助函数 $F(x) = xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，从而在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi).$$

由于 $F'(x) = f(x) + xf'(x)$，所以有

$$\frac{bf(b)-af(a)}{b-a} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

八、（本题满分 9 分）

求二元函数 $z = f(x,y) = x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6$，x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的极值、最大值与最小值.

解. $f(x)$ 在闭区域 D 上有极大值 $f(2,1)=4$; 最大值 $f(2,1)=4$, 最小值 $f(4,2)=-64$.

九、（本题满分 8 分）

对于线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = \lambda - 3, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = -2, \end{cases}$ 讨论 λ 取何值时，方程组无解、有唯一解和有无穷解？在方程组有无穷解时，试用导出组的基础解系表示全部解.

解. (Ⅰ) 当 $\lambda \neq -2$ 且 $\lambda \neq 1$ 时，从而方程组有唯一解.

(Ⅱ) 当 $\lambda = -2$ 时，方程组无解.

(Ⅲ) 当 $\lambda = 1$ 时，方程组有无穷多组解. 其全部解为

$$x = k_1(-1,1,0)^T + k_2(-1,0,1)^T + (-2,0,0)^T,$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

十、（本题满分 8 分）

设三阶矩阵 A 满足 $A\alpha_i = i\alpha_i (i=1,2,3)$,其中列向量 $\alpha_1 = (1,2,2)^T, \alpha_2 = (2,-2,1)^T$, $\alpha_3 = (-2,-1,2)^T$，试求矩阵 A.

解. $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}$.

十一、（本题满分 8 分）

同试卷四第十一题.

十二、（本题满分 7 分）

假设随机变量 X 服从参数为 2 的指数分布，证明：$Y = 1 - \mathrm{e}^{-2X}$ 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布.

解. X 的分布函数 $F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$ 函数 $y = 1 - \mathrm{e}^{-2x}$ 是单调增函数，其反函数为 $x = -\frac{\ln(1-y)}{2}$. 设 $G(y)$ 是 Y 的分布函数，则当 $y \leqslant 0$ 时，$G(y) = 0$；当 $y \geqslant 1$ 时，$G(y) = 1$；当 $0 < y < 1$ 时，

$$G(y) = P\{Y \leqslant y\} = P\{1 - \mathrm{e}^{-2X} \leqslant y\}$$
$$= P\left\{X \leqslant -\frac{\ln(1-y)}{2}\right\} = F\left(-\frac{\ln(1-y)}{2}\right) = y.$$

于是，Y 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布.

一九九六年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设方程 $x=y^y$ 确定 y 是 x 的函数，则 $\mathrm{d}y=$ ________.

解. 方程 $x=y^y$ 两边取对数得 $\ln x=\ln y^y=y\ln y$，再两边求微分，

$$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\left(\ln y+1\right)\mathrm{d}y \quad\Rightarrow\quad \mathrm{d}y=\frac{1}{x\left(\ln y+1\right)}\mathrm{d}x.$$

2. 设 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则 $\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=$ ________.

解. 由 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，两边求导数有

$$xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{f(x)}=x\sqrt{1-x^2}.$$

于是有

$$\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(x^2)$$

$$=-\frac{1}{2}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}\left(1-x^2\right)=-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C.$$

3. 设 $\left(x_0,y_0\right)$ 是抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上的一点，若在该点的切线过原点，则系数应满足的关系是 ________.

解. 对 $y=ax^2+bx+c$ 两边求导得

$$y'=2ax+b, \quad\Rightarrow\quad y'(x_0)=2ax_0+b.$$

所以过 $\left(x_0,y_0\right)$ 的切线方程为 $y-y_0=(2ax_0+b)(x-x_0)$，即

$$y-\left(ax_0^2+bx_0+c\right)=(2ax_0+b)(x-x_0).$$

又由题设知切线过原点 $(0,0)$，把 $x=y=0$ 代入上式得

$$-ax_0^2-bx_0-c=-2ax_0^2-bx_0 \quad\Leftrightarrow\quad ax_0^2=c.$$

由于系数 $a\neq0$，所以，系数应满足的关系为 $\frac{c}{a}\geqslant0$（或 $ax_0^2=c$），b 任意.

4. 设

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

其中 $a_i\neq a_j$（$i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n$）. 则线性方程组 $A^TX=B$ 的解是 ________.

解. 因为 $|A|$ 是范德蒙行列式，由 $a_i \neq a_j$ 知

$$D=|A|=\prod_{i<j}\left(a_i-a_j\right)\neq 0,$$

所以方程组 $A^TX=B$ 有唯一解．根据克莱姆法则，对于

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

易见 $D_1=|A|, D_2=D_3=\cdots=D_n=0$，所以 $A^TX=B$ 的解为

$$x_1=1, x_2=x_3=\cdots=x_n=0,$$

即 $(1,0,0,\cdots,0)^T$.

5. 设由来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本，得样本均值 $\overline{X}=5$，则未知参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 ________.

解. 由题设，$1-\alpha=0.95$．由

$$P\{|U|<u_{\alpha/2}\}=P\{-u_{\alpha/2}<U<u_{\alpha/2}\}=2\Phi(u_{\alpha/2})-1=0.95$$

得 $\Phi(u_{\alpha/2})=0.975$，查得 $u_{\alpha/2}=1.96$．又 $\sigma=0.9^2, n=9, \overline{X}=5$，代入

$$\left(\overline{x}-u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+u_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

得置信区间 $(4.412, 5.588)$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr$ 可以写成…………………（　）

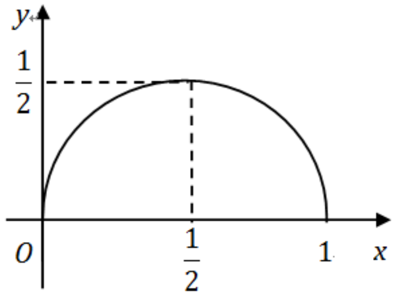
(A) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$.　　(B) $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$.

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$.　　(D) $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$.

解. 应选 (D)．由题设知，积分区域在极坐标系 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 中是

$$D=\left\{(r,\theta)|0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}, 0\leqslant r\leqslant\cos\theta\right\},$$

即是由 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\frac{1}{4}$ 与 x 轴在第一象限所围成的平面图形，如图:



D 的直角坐标表示是

$$D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant\sqrt{x-x^2}\right\}.$$

2. 下述各选项正确的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛.

(B) $\sum_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛.

(C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，则 $u_n\geqslant\frac{1}{n}$.

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且 $u_n\geqslant v_n$（$n=1,2,\cdots$），则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 也收敛.

解. 应选 (A). 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 都收敛，得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n^2+v_n^2)$ 收敛. 由不等式

$$(u_n+v_n)^2\leqslant 2(u_n^2+v_n^2)$$

及比较判别法知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)^2$ 收敛，故应选 (A).

设 $u_n=\frac{1}{n^2}, v_n=1(n=1,2,\cdots)$，可知 (B) 不正确.

设 $u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}(n=1,2,\cdots)$，可知 (C) 不正确.

设 $u_n=\frac{(-1)^{n-1}}{n}, v_n=-\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，可知 (D) 不正确.

3. 设 n 阶矩阵 A 非奇异（$n\geqslant 2$），A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，则$\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $(A^*)^*=|A|^{n-1}A$.

(B) $(A^*)^*=|A|^{n+1}A$.

(C) $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

(D) $(A^*)^*=|A|^{n+2}A$.

解. 应选 (C). 由 $A^*=|A|^{-1}A$，$(A^*)^{-1}=\frac{A}{|A|}$ 及 $|A^*|=|A|^{n-1}$，可得

$$(A^*)^*=|A^*|(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}\frac{A}{|A|}=|A|^{n-2}A.$$

4. 设有任意两个 n 维向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$，若存在两组不全为零的数 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 和 $k_1,\cdots,k_m$，使

$$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+(\lambda_1-k_1)\beta_1+\cdots+(\lambda_m-k_m)\beta_m=0,$$

则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 都线性相关.

(B) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 和 $\beta_1,\cdots,\beta_m$ 都线性无关.

(C) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性无关.

(D) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关.

解. 应选 (D). 既然 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 与 $k_1,\cdots,k_m$ 不全为零，由此推不出某向量组线性无关，故应排除 (B)、(C). 一般情况下，由

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s+l_1\beta_1+\cdots+l_s\beta_s=0,$$

不能保证必有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$, 及 $l_1\beta_1+\cdots+l_s\beta_s=0$，故 (A) 不正确. 由已知条件，有

$$\lambda_1(\alpha_1+\beta_1)+\cdots+\lambda_m(\alpha_m+\beta_m)+k_1(\alpha_1-\beta_1)+\cdots+k_m(\alpha_m-\beta_m)=0.$$

又 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 与 $k_1,\cdots,k_m$ 不全为零，故 $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$ 线性相关. 故选 (D).

5. 已知 $0<P(B)<1$ 且 $P[(A_1+A_2)|B]=P(A_1|B)+P(A_2|B)$, 则下列选项成立的是( )

(A) $P[(A_1+A_2)|\overline{B}]=P(A_1|\overline{B})+P(A_2|\overline{B})$.

(B) $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$.

(C) $P(A_1+A_2)=P(A_1|B)+P(A_2|B)$.

(D) $P(B)=P(A_1)P(B|A_1)+P(A_2)P(B|A_2)$.

解. 应选 (B). 依题意

$$\frac{P[(A_1+A_2)B]}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)},\quad \frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)+P(A_2B)}{P(B)}.$$

因 $P(B)>0$，故有 $P(A_1B+A_2B)=P(A_1B)+P(A_2B)$. 因此应选 (B).

注意不能选 (D)，因为全概率公式中要求事件 A_1,A_2 应满足 $P(A_1)>0,P(A_2)>0$，且 A_1,A_2 是对立事件.

三、(本题满分 6 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数，且 $g(0)=1,g'(0)=-1$.

(I) 求 $f'(x)$； (II) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

解. (I) 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\frac{x[g'(x)+\mathrm{e}^{-x}]-g(x)+\mathrm{e}^{-x}}{x^2}=\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)\mathrm{e}^{-x}}{x^2}.$$

当 $x=0$ 时，由导数定义及洛必达法则，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\mathrm{e}^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-\mathrm{e}^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}.$$

所以得到

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0.\end{cases}$$

(II) 由于 $g(x)$ 有二阶连续导数，当 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 也具有二阶连续导数，且 $f'(x)$ 连续．在 $x=0$ 处有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}f'(x)&=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)+(x+1)e^{-x}}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+xg''(x)-g'(x)+e^{-x}-(x+1)e^{-x}}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\frac{g''(0)-1}{2}=f'(0),\end{aligned}$$

即 $f'(x)$ 在 $x\neq 0$ 处连续，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续函数．

四、（本题满分 6 分）

设函数 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\,dt$ 确定 u 是 x,y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微；$p(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$．求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$．

解. 由 $z=f(u)$ 可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\frac{\partial u}{\partial y}$$

在方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\,dt$ 两边分别对 x,y 求偏导数，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x),\ \frac{\partial u}{\partial y}=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-p(y).$$

所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{p(x)}{1-\varphi'(u)},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}$．于是

$$p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=\left[\frac{p(x)p(y)}{1-\varphi'(u)}-\frac{p(x)p(y)}{1-\varphi'(u)}\right]f'(u)=0.$$

五、（本题满分 6 分）

计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,dx$.

解. 方法 1：用分部积分法得到

$$\begin{aligned}\int\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,dx&=\int x\,d\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)=\frac{x}{1+e^{-x}}-\int\frac{dx}{1+e^{-x}}\\&=\frac{x}{1+e^{-x}}-\int\frac{1}{1+e^x}\,d(1+e^x)=\frac{x}{1+e^{-x}}-\ln(1+e^x)+C,\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}\,dx=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)\right]+\ln 2.$$

而极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x}{1+e^x}-\ln(1+e^x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x}{1+e^x}-x+x-\ln(1+e^x)\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{e^x}{1+e^x}+\ln\frac{e^x}{1+e^x}\right]=0+0=0,$$

故原式$=\ln 2$.

方法 2：直接计算反常积分得

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx=-\int_0^{+\infty}x\,d\frac{1}{1+e^x}$$

$$=-\frac{x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x}=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x}$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=-\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}d(1+e^{-x})$$

$$=-\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty}=\ln 2.$$

六、（本题满分 5 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx$. 试证：存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

解. 令 $\varphi(x)=xf(x)$，由积分中值定理可知，存在 $\eta\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$，使

$$\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\varphi(x)dx=\frac{1}{2}\varphi(\eta).$$

由已知条件，有

$$f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)dx=2\cdot\frac{1}{2}\varphi(\eta)=\varphi(\eta),$$

于是 $\varphi(1)=f(1)=\varphi(\eta)$，且 $\varphi(x)$ 在 $(\eta,1)$ 上可导，故由罗尔定理可知，存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

七、（本题满分 6 分）

设某种商品的单价为 p 时，售出的商品数量 Q 可以表示成 $Q=\frac{a}{p+b}-c$，其中 a,b,c 均为正数，且 $a>bc$.

(I) 求 p 在何范围变化时，使相应销售额增加或减少.

(II) 要使销售额最大，商品单价 p 应取何值？最大销售额是多少？

解. (I) 设售出商品的销售额为 R，则

$$R=pQ=p\left(\frac{a}{p+b}-c\right),\quad R'(p)=\frac{ab-c(p+b)^2}{(p+b)^2}.$$

令 $R'=0$，得

$$p_0=\sqrt{\frac{ab}{c}}-b=\sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})>0.$$

当 $0<p<\sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$ 时，$R'>0$，所以随单价 p 的增加，相应销售额 R 也将增加．当 $p>\sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$ 时，有 $R'<0$，所以随单价 p 的增加，相应销售额 R 将减少．

(II) 由 (I) 可知，当 $p=\sqrt{\frac{b}{c}}(\sqrt{a}-\sqrt{bc})$ 时销售额 R 取得最大值，最大销售额为

$$R_{\max}=\left(\sqrt{\frac{ab}{c}}-b\right)\left[\frac{a}{\sqrt{ab/c}}-c\right]=(\sqrt{a}-\sqrt{bc})^2.$$

八、（本题满分 6 分）

求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ 的通解．

解. 令 $z=\frac{y}{x}$，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=z+x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$．当 $x>0$ 时，原方程化为

$$z+x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=z-\sqrt{1+z^2} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{1+z^2}}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

其通解为 $\ln(z+\sqrt{1+z^2})=-\ln x+C_1$ 或 $z+\sqrt{1+z^2}=\frac{C}{x}$．代回原变量，得通解 $y+\sqrt{x^2+y^2}=C(x>0)$.

当 $x<0$ 时，原方程的解与 $x>0$ 时相同，理由如下：令 $t=-x$，则 $t>0$，而且

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{x}$$
$$=\frac{y-\sqrt{x^2+y^2}}{-x}=\frac{y-\sqrt{t^2+y^2}}{t}.$$

从而有通解 $y+\sqrt{t^2+y^2}=C(t>0)$，即 $y+\sqrt{x^2+y^2}=C(x<0)$．综上所得，方程的通解为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=C$.

九、（本题满分 8 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&y&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$.

(I) 已知 A 的一个特征值为 3，试求 y；

(II) 求矩阵 P，使 $(AP)^T(AP)$ 为对角矩阵.

解. (Ⅰ) 因为 $\lambda=3$ 是 A 的特征值，故

$$|3E-A|=\begin{vmatrix}3&-1&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&3-y&-1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-1\\-1&3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}3-y&-1\\-1&1\end{vmatrix}=8(2-y)=0,$$

所以 $y=2$.

(Ⅱ) 由于 $A^T=A$，要 $(AP)^T(AP)=P^TA^2P=\Lambda$，而

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&5&4\\0&0&4&5\end{pmatrix}$$

是对称矩阵，故可构造二次型 x^TA^2x，将其化为标准形 $y^T\Lambda y$. 由于

$$\begin{aligned}x^TA^2x&=x_1^2+x_2^2+5x_3^2+5x_4^2+8x_3x_4\\&=x_1^2+x_2^2+5(x_3^2+\frac{8}{5}x_3x_4+\frac{16}{25}x_4^2)+5x_4^2-\frac{16}{5}x_4^2\\&=x_1^2+x_2^2+5(x_3+\frac{4}{5}x_4)^2+\frac{9}{5}x_4^2,\end{aligned}$$

那么，令 $y_1=x_1,y_2=x_2,y_3=x_3+\frac{4}{5}x_4,y_4=x_4$，即经坐标变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix},$$

有 $x^TA^2x=y_1^2+y_2^2+5y_3^2+\frac{9}{5}y_4^2$. 所以取

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&-\frac{4}{5}\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

则有

$$(AP)^T(AP)=P^TA^2P=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&5&\\&&&\frac{9}{5}\end{pmatrix}.$$

十、（本题满分 8 分）

设向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系，向量 β 不是方程组 $AX=0$ 的解，即 $A\beta\neq 0$. 试证明：向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

解. 经初等变换向量组的秩不变，把第一列的 -1 倍分别加至其余各列有

$$\left(\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t\right)\to\left(\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\right).$$

因此

$$r\left(\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t\right)=r\left(\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t\right).$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是基础解系，它们是线性无关的，秩 $r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t)=t$. 又 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性表示（否则 $A\beta=0$），故 $r\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t,\beta\right)=t+1$. 所以

$$r\left(\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t\right)=t+1.$$

即向量组 $\beta,\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$ 线性无关.

十一、（本题满分 7 分）

假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作，若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元；发生一次故障仍可获得利润 5 万元；发生两次故障所获利润 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元. 求一周内期望利润是多少?

解. 设一周 5 个工作日内发生故障的天数为 X，则 X 服从二项分布即 $B(5,0.2)$. 由二项分布的概率计算公式，有

$$P\{X=0\}=0.8^5=0.328,$$

$$P\{X=1\}=C_5^1 0.8^4\cdot 0.2=0.410,$$

$$P\{X=2\}=C_5^2 0.8^3\cdot 0.2^2=0.205,$$

$$P\{X\geqslant 3\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}-P\{X=2\}=0.057.$$

设一周内所获利润 Y（万元），则 Y 是 X 的函数，且

$$Y=f(X)=\begin{cases}10, & 若X=0,\\ 5, & 若X=1,\\ 0, & 若X=2,\\ -2, & 若X\geqslant 3.\end{cases}$$

所以 $EY=10\times 0.328+5\times 0.410-2\times 0.057=5.216$（万元）.

十二、（本题满分 6 分）

考虑一元二次方程 $x^2+Bx+C=0$，其中 B,C 分别是将一枚色子 (骰子) 接连掷两次先后出现的点数. 求该方程有实根的概率 p 和有重根的概率 q.

解. 一枚色子 (骰子) 接连掷两次, 其样本空间中样本点总数为 36. 设事件 $A_1=$ "方程有实根", $A_2=$ "方程有重根", 则

$$A_1=\left\{B^2-4C\geqslant 0\right\}=\left\{C\leqslant\frac{B^2}{4}\right\}.$$

用列举法求有利于 A_i 的样本点个数 ($i=1,2$), 如下表:

B	1	2	3	4	5	6
有利于 A_1 的样本点数	0	1	2	4	6	6
有利于 A_2 的样本点数	0	1	0	1	0	0

由古典型概率计算公式得到

$$p=P(A_1)=\frac{1+2+4+6+6}{36}=\frac{19}{36},\quad q=P(A_2)=\frac{1+1}{36}=\frac{1}{18}.$$

十三、(本题满分 6 分)

假设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本; 已知 $EX^k=a_k(k=1,2,3,4)$. 证明: 当 n 充分大时, 随机变量 $Z_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2$ 近似服从正态分布, 并指出其分布参数.

解. 依题意, $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立同分布, 可见 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 也独立同分布. 由 $EX^k=a_k(k=1,2,3,4)$ 及方差计算公式, 有

$$EX_i^2=a_2,\qquad DX_i^2=EX_i^4-(EX_i^2)^2=a_4-a_2^2,$$

$$EZ_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i^2=a_2,\qquad DZ_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i^2=\frac{1}{n}(a_4-a_2^2).$$

因此, 根据中心极限定理

$$U_n=\frac{Z_n-a_2}{\sqrt{(a_4-a_2^2)/n}}$$

的极限分布是标准正态分布, 即当 n 充分大时, Z_n 近似服从参数为 $\left(a_2,\frac{a_4-a_2^2}{n}\right)$ 的正态分布.

一九九六年考研数学试卷五解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷四第一 [1] 题.

2. 同试卷四第一 [2] 题.

3. $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}$，则 $y''|_{x=\sqrt{3}}=$ ________.

解. 应填 $\frac{5}{32}$.

4. 5 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}=$ ________.

解. 应填 $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

5. 一实习生用同一台机器接连独立地制造 3 个同种零件，第 i 个零件是不合格品的概率 $P_i=\frac{1}{i+1}$（$i=1,2,3$），以 X 表示 3 个零件中合格品的个数，则 $P\{X=2\}=$ ________.

解. 应填 $\frac{11}{24}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f'(x_0)=f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)>0$，则下列选项正确的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值.

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(D) $(x_0,f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解. 应选 (D).

2. 同试卷三第二 [3] 题.

3. 同试卷四第二 [3] 题.

4. 同试卷四第二 [4] 题.

5. 设 A, B 为任意两个事件，且 $A \subset B$，$P(B) > 0$，则下列选项必然成立的是

(A) $P(A) < P(A|B)$.　　(B) $P(A) \leqslant P(A|B)$.

(C) $P(A) > P(A|B)$.　　(D) $P(A) \geqslant P(A|B)$.

解. 应选 (B).

三、(本题满分 6 分)

同试卷四第三题.

四、(本题满分 7 分)

设 $f(x,y) = \int_0^{xy} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$，求 $\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

解. $-2\mathrm{e}^{-x^2y^2}$.

五、(本题满分 6 分)

同试卷四第五题.

六、(本题满分 7 分)

同试卷四第七题.

七、(本题满分 9 分)

已知一抛物线通过 x 轴上的两点 $A(1,0)$，$B(3,0)$.

(I) 求证：两坐标轴与该抛物线所围图形的面积等于 x 轴与该抛物线所围图形的面积；

(II) 计算上述两个平面图形绕 x 轴旋转一周所产生的两个旋转体体积之比.

解. (I) 设过 A, B 两点的抛物线方程为 $y = a(x-1)(x-3)$，则 $S_1 = S_2 = \frac{4}{3}|a|$.

(II) $\frac{V_1}{V_2} = \frac{19}{8}$.

八、(本题满分 5 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b)$. 求证：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi) = 0$.

解. 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，由积分中值定理可知，在 (a,b) 内存在一点 c，使得

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b).$$

因为 $f(x)$ 在 $[c,b]$ 上连续，在 (c,b) 内可导，故由罗尔定理，至少存在一点 $\xi \in (c,b) \subset (a,b)$，使 $f'(\xi) = 0$.

九、（本题满分 9 分）

已知线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3+3x_4=0, \\ 2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1, \\ 3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1, \\ x_1-x_2-6x_3-x_4=t. \end{cases}$ 讨论参数 p, t 取何值时，方程组有解？无解？当有解时，试用其导出组的基础解系表示通解.

解. (I) 当 $t \neq -2$ 时，方程组无解.

(II) 当 $t=-2$ 时，方程组有解. 若 $p=-8$，得通解

$$x=(-1,1,0,0)^T+k_1(4,-2,1,0)^T+k_2(-1,-2,0,1)^T,$$

其中 k_1, k_2 为任意常数. 若 $p \neq -8$，得通解

$$x=(-1,1,0,0)^T+k(-1,-2,0,1)^T,$$

其中 k 为任意常数.

十、（本题满分 7 分）

设有 4 阶方阵 A 满足条件 $|3E+A|=0$，$AA^T=2E$，$|A|<0$，其中 E 是 4 阶单位阵，求方阵 A 的伴随矩阵 A^* 的一个特征值.

解. $\frac{4}{3}$.

十一、（本题满分 7 分）

同试卷四第十一题.

十二、（本题满分 7 分）

某电路装有三个同种电气元件，其工作状态相互独立，且无故障工作时间都服从参数为 $\lambda>0$ 的指数分布. 当三个元件都无故障时，电路正常工作，否则整个电路不能正常工作，试求电路正常工作的时间 T 的概率分布.

解. T 服从参数为 3λ 的指数分布.

一九九七年考研数学试卷三解答

一、填空题（本题共 5 分，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $y=f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy=$________.

解. 应填 $e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]dx$. 由复合函数的链式法则可得:

$$\begin{aligned}dy&=\frac{1}{x}f'(\ln x)e^{f(x)}dx+f(\ln x)e^{f(x)}f'(x)dx\\&=e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]dx.\end{aligned}$$

2. 若 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$________.

解. 应填 $\frac{\pi}{4-\pi}$. 事实上，令 $\int_0^1 f(x)dx=A$，则

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+A\sqrt{1-x^2}.$$

两边在 $[0,1]$ 上作定积分得

$$A=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}+A\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}A,$$

解得 $A=\frac{\pi}{4-\pi}$.

3. 差分方程 $y_{t+1}-y_t=t2^t$ 的通解为________.

解. 应填 $y_t=C+(t-2)2^t$. 齐次差分方程 $y_{t+1}-y_t=0$ 的通解为 C（C 为任意常数）. 设非齐次差分方程的特解有形式 $y^*=(At+B)2^t$，代入方程求得 $A=1, B=-2$，从而差分方程的通解是 $y_t=C+(t-2)2^t$（C 为任意常数）.

4. 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是________.

解. 应填 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&1&\frac{t}{2}\\0&\frac{t}{2}&1\end{pmatrix}.$$

f 正定等价于 A 的顺序主子式全大于零. 因为

$$\Delta_1=2,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}=1,\quad \Delta_3=|A|=1-\frac{1}{2}t^2,$$

所以 f 正定等价于 $1-\frac{1}{2}t^2>0$，即 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,3^2)$,而 $X_1,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则统计量 $U=\dfrac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从分布________，参数为________.

解. 应填 t 分布和 9. 依题意，$X_1,\cdots,X_9$ 和 $X_1,\cdots,X_9$ 都相互独立，且都服从正态分布 $N(0,3^2)$. 从而

$$X'=\frac{X_1+\cdots+X_9}{9}\sim N(0,1),\qquad Y'=\left(\frac{Y_1}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{Y_9}{3}\right)^2\sim\chi^2(9).$$

从而有

$$\frac{X'}{\sqrt{Y'/9}}=\frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}\sim t(9).$$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}t,\ g(x)=\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$，则当 $x\to0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的 · (　)

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 等价无穷小.　　(D) 同阶但不等价的无穷小.

解. 应选 (B). 由变上限积分求导公式及等价无穷小量代换，得到

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{\displaystyle\int_0^{1-\cos x}\sin t^2\,\mathrm{d}t}{\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin[(1-\cos x)^2]\cdot\sin x}{x^4(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{1+x}\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4}x^5}{x^4}=0,$$

即 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小.

2. 若 $f(-x)=f(x)$（$-\infty<x<+\infty$），在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内有 · (　)

(A) $f'(x)>0,f''(x)<0$.　　(B) $f'(x)>0,f''(x)>0$.

(C) $f'(x)<0,f''(x)<0$.　　(D) $f'(x)<0,f''(x)>0$.

解. 应选 (C). 由 $f(-x)=f(x)(-\infty,+\infty)$ 知, $f(x)$ 的图形关于 y 轴对称. 由在 $(-\infty,0)$ 内，$f'(x)>0$ 且 $f''(x)<0$ 知，$f(x)$ 的图形在 $(-\infty,0)$ 内单调上升且是凸的；由对称性知，在 $(0,+\infty)$ 内，$f(x)$ 的图形单调下降，且是凸的.

3. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则下列向量组中，线性无关的是 · · · · · · · · · · · (　)

(A) $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_1$.

(B) $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$.

(C) $\alpha_1+2\alpha_2,\ 2\alpha_2+3\alpha_3,\ 3\alpha_3+\alpha_1$.

(D) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ 2\alpha_1-3\alpha_2+22\alpha_3,\ 3\alpha_1+5\alpha_2-5\alpha_3$.

解. 应选 (C). 事实上，将 $\alpha_1+2\alpha_2, 2\alpha_2+3\alpha_3, 3\alpha_3+\alpha_1$ 用 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且写成矩阵形式，得到

$$(\alpha_1+2\alpha_2, 2\alpha_2+3\alpha_3, 3\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\2&2&0\\0&3&3\end{pmatrix}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)C,$$

其中 $|C|=12\neq 0$，则 C 可逆，故两向量组是等价向量组，由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关知 $\alpha_1+2\alpha_2, 2\alpha_2+3\alpha_3, 3\alpha_3+\alpha_1$ 线性无关.

4. 设 A,B 为同阶可逆矩阵，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $AB=BA$.

(B) 存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

(C) 存在可逆矩阵 C，使 $C^TAC=B$.

(D) 存在可逆矩阵 P 和 Q，使 $PAQ=B$.

解. 应选 (D). 因 A,B 是同阶 (设为 n) 可逆阵，故有 $r(A)=r(B)=n$，从而 A,B 等价，因此存在可逆阵 P,Q 使得 $PAQ=B$. 另外，令 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&2\end{pmatrix}$，可验证 (A), (B), (C) 都不成立.

5. 设两个随机变量 X 与 Y 相互独立且同分布:

$$P\{X=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{2},\qquad P\{X=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2},$$

则下列各式中成立的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $P\{X=Y\}=\frac{1}{2}$.　　(B) $P\{X=Y\}=1$.

(C) $P\{X+Y=0\}=\frac{1}{4}$.　　(D) $P\{XY=1\}=\frac{1}{4}$.

解. 应选 (A). 由题设求得

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{X=-1\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=-1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{X=1\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$$

从而可求得

$$P\{X=Y\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X+Y=0\}=P\{X=-1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P\{XY=1\}=P\{X=-1,Y=-1\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

三、(本题满分 6 分)

在经济学中，称函数 $Q(x)=A[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]^{-\frac{1}{x}}$ 为固定替代弹性生产函数，而称函数 $\overline{Q}=AK^{\delta}L^{1-\delta}$ 为 Cobb-Douglas 生产函数 (简称 C–D 生产函数). 试证明: 当 $x\to 0$ 时, 固定替代弹性生产函数变为 C–D 生产函数, 即有 $\lim\limits_{x\to 0}Q(x)=\overline{Q}$.

解. 因为 $\ln Q(x)=\ln A-\dfrac{1}{x}\ln[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]$，而且

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln[\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}]}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\delta K^{-x}\ln K-(1-\delta)L^{-x}\ln L}{\delta K^{-x}+(1-\delta)L^{-x}}$$
$$=-\delta\ln K-(1-\delta)\ln L=-\ln(K^{\delta}L^{1-\delta}),$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\ln Q(x)=\ln A+\ln(K^{\delta}L^{1-\delta})=\ln(AK^{\delta}L^{1-\delta})\quad\Rightarrow\quad\lim_{x\to 0}Q(x)=AK^{\delta}L^{1-\delta}=\overline{Q}.$$

四、(本题满分 5 分)

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 和 $\mathrm{e}^{x}-xz=0$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

解. 在 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 中，将 y 视为 x 的函数，两边对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{xy}\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y\mathrm{e}^{xy}}{1-x\mathrm{e}^{xy}}=\frac{y^2}{1-xy}.$$

在 $\mathrm{e}^{z}-xz=0$ 中，将 z 视为 x 的函数，两边对 x 求导，得

$$\mathrm{e}^{z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z-x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z}{\mathrm{e}^{z}-x}=\frac{z}{xy-x}.$$

从而有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y^2}{1-xy}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{xy-x}\frac{\partial f}{\partial z}.$$

五、(本题满分 6 分)

一商家销售某种商品的价格满足关系 $p=7-0.2x$(万元/吨), x 为销售量 (单位: 吨)，商品的成本函数 $C=3x+1$(万元).

(I) 若每销售一吨商品, 政府要征税 t(万元), 求该商家获最大利润时的销售量;

(II) t 为何值时，政府税收总额最大.

解. (I) 设 T 为总税额，则 $T=tx$. 商品销售总收入为

$$R=px=(7-0.2x)x=7x-0.2x^2,$$

利润函数为

$$\pi=R-C-T=7x-0.2x^2-3x-1-tx=-0.2x^2+(4-t)x-1.$$

令 $\pi'(x)=0$, 即 $-0.4x+4-t=0$, 得 $x=\dfrac{4-t}{0.4}=\dfrac{5}{2}(4-t)$. 由于 $\pi''(x)=-0.4<0$, 因此，$x=\dfrac{5}{2}(4-t)$ 即为利润最大时的销售量.

(II) 将 $x=\frac{5}{2}(4-t)$ 代入 $T=tx$，得

$$T=t\cdot\frac{5}{2}(4-t)=10t-\frac{5}{2}t^2.$$

由 $T'(t)=10-5t=0$，得惟一驻点 $t=2$；由于 $T''(t)=-5<0$，可见当 $t=2$ 时 T 有极大值，这时也是最大值，此时政府税收总额最大.

六、（本题满分 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续、单调不减且 $f(0)\geqslant 0$，试证函数

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t, & \text{若} x>0,\\ 0, & \text{若} x=0,\end{cases}$$

在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调不减 (其中 $n>0$).

解. 显然 $x>0$ 时，$F(x)$ 连续，又由洛必达法则知

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to0^+}x^n f(x)=0=F(0),$$

所以 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 当 $x\in(0,+\infty)$ 时，由于

$$\begin{aligned}F'(x)&=\frac{x^{n+1}f(x)-\displaystyle\int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}\\&=\frac{\displaystyle\int_0^x x^n f(x)\,\mathrm{d}t-\int_0^x t^n f(t)\,\mathrm{d}t}{x^2}=\frac{\displaystyle\int_0^x [x^n f(x)-t^n f(t)]\,\mathrm{d}t}{x^2}\geqslant 0,\end{aligned}$$

可见 $F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调不减.

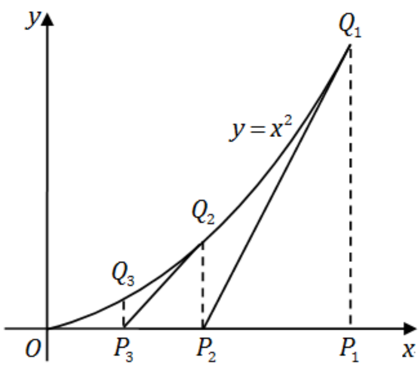
七、（本题满分 6 分）

从点 $P_1(1,0)$ 作 x 轴的垂线，交抛物线 $y=x^2$ 于点 $Q_1(1,1)$；再从 Q_1 作这条抛物线的切线与 x 轴交于 P_2，然后又从 P_2 作 x 轴的垂线，交抛物线于点 Q_2，依次重复上述过程得到一系列的点 $P_1,Q_1;P_2,Q_2;\cdots;P_n,Q_n;\cdots$.

(I) 求 $\overline{OP_n}$； (II) 求级数 $\overline{Q_1P_1}+\overline{Q_2P_2}+\cdots+\overline{Q_nP_n}+\cdots$ 的和.

其中 $n(n\geqslant 1)$ 为自然数，而 $\overline{M_1M_2}$ 表示点 M_1 与 M_2 之间的距离.

解. (I) 先作出草图如下:



由 $y=x^2$，得 $y'=2x$．对于任意 a（$0<a\leqslant 1$），抛物线 $y=x^2$ 在点 (a,a^2) 处的切线方程为 $y-a^2=2a(x-a)$．且该切线与 x 轴的交点为 $\left(\frac{a}{2},0\right)$，故由 $\overline{OP_1}=1$ 可见

$$\begin{aligned}
&\overline{OP_2}=\frac{1}{2}\overline{OP_1}=\frac{1}{2},\\
&\overline{OP_3}=\frac{1}{2}\overline{OP_2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2^2},\\
&\cdots\cdots\cdots\\
&\overline{OP_n}=\frac{1}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

(II) 由于

$$\overline{Q_nP_n}=\left(\overline{OP_n}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2}=\frac{1}{4^{n-1}}\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Q_nP_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{n-1}}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^m,$$

利用几何级数求和公式即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\overline{Q_nP_n}=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^m=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}.$$

八、（本题满分 6 分）

设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+\iint_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

求 $f(t)$.

解. 将直角坐标化为极坐标，由于

$$\iint_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t}f(\tfrac{r}{2})r\,\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{2t}rf(\tfrac{r}{2})\mathrm{d}r,$$

可得

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}rf(\tfrac{r}{2})\mathrm{d}r.$$

在积分中作换元 $s=\frac{r}{2}$，又有

$$\int_0^{2t}rf(\tfrac{r}{2})\mathrm{d}r=4\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s.$$

于是 $f(t)$ 满足积分关系式

$$f(t)=8\pi\int_0^t sf(s)\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{4\pi t^2}.$$

在上式中令 $t=0$ 得 $f(0)=1$．将上式两端对 t 求导得

$$f'(t)-8\pi tf(t)=8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}.$$

上述方程为关于 $f(t)$ 的一阶线性微分方程，求得通解为

$$f(t)=(4\pi t^2+C)\mathrm{e}^{4\pi t^2},$$

其中常数 C 待定．由 $f(0)=1$ 可确定常数 $C=1$，因此

$$f(t)=(4\pi t^2+1)e^{4\pi t^2}.$$

九、（本题满分 6 分）

设 A 为 n 阶非奇异矩阵，α 为 n 维列向量，b 为常数．记分块矩阵

$$P=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix},$$

其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵，E 为 n 阶单位矩阵．

(I) 计算并化简 PQ；

(II) 证明：矩阵 Q 可逆的充分必要条件是 $\alpha^T A^{-1}\alpha\neq b$．

解. (I) 由 $AA^*=A^*A=|A|E$ 及 $A^*=|A|A^{-1}$，有

$$PQ=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\alpha^T A^* A+|A|\alpha^T & -\alpha^T A^*\alpha+b|A| \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A & \alpha \\ 0 & |A|\left(b-\alpha^T A^{-1}\alpha\right) \end{pmatrix}.$$

(II) 用行列式拉普拉斯展开式及行列式乘法公式，有

$$|P|=\begin{vmatrix} E & 0 \\ -\alpha^T A^* & |A| \end{vmatrix}=|A|,\quad |P||Q|=|PQ|=|A|^2\left(b-\alpha^T A^{-1}\alpha\right).$$

又因 A 是非奇异矩阵，所以 $|A|\neq 0$，故 $|Q|=|A|\left(b-\alpha^T A^{-1}\alpha\right)$．由此可知 Q 可逆的充要条件是 $|Q|\neq 0$，即 $b-\alpha^T A^{-1}\alpha\neq 0$，亦即 $\alpha^T A^{-1}\alpha\neq b$．

十、（本题满分 10 分）

设三阶实对称矩阵 A 的特征值是 $1,2,3$；矩阵 A 的属于特征值 $1,2$ 的特征向量分别是 $\alpha_1=(-1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,-2,-1)^T$．

(I) 求 A 的属于特征值 3 的特征向量； (II) 求矩阵 A．

解. (I) 设 A 的属于 $\lambda=3$ 的特征向量为 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$，因为实对称矩阵属于不同特征值的特征向量相互正交，故

$$\begin{cases} \alpha_1^T\alpha_3=-x_1-x_2+x_3=0, \\ \alpha_2^T\alpha_3=x_1-2x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解上述方程组，得到基础解系 $(1,0,1)^T$，即 A 的对应于 $\lambda=3$ 的特征向量为 $\alpha_3=k(1,0,1)^T$，其中 k 为非零常数．

(II) 令矩阵

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

则有

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\Lambda,$$

由于 P 的逆矩阵

$$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2&-2&2\\1&-2&-1\\3&0&3\end{pmatrix},$$

从而

$$A=P\Lambda P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1&1&1\\-1&-2&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&-2&2\\1&-2&-1\\3&0&3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}.$$

十一、（本题满分 7 分）

假设随机变量 X 的绝对值不大于 1；$P\{X=-1\}=\frac{1}{8},P\{X=1\}=\frac{1}{4}$；在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比．试求 X 的分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$.

解. 由 X 的绝对值不大于 1，可得：当 $x<-1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=1$．又 $P\{X=-1\}=\frac{1}{8},P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，则

$$P\{-1<x<1\}=1-P\{X=-1\}-P\{X=1\}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

由题意 X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，那么当 X 的值属于 $(-1,1)$ 的条件下，事件 $\{-1<X\leqslant x\}$ 的条件概率为：

$$P\{-1<X\leqslant x|-1<X<1\}=k\frac{x-(-1)}{1-(-1)}=k\frac{x+1}{2},$$

其中 k 为比例正常数．又 $P\{-1<X<1|-1<X<1\}=1$，而

$$P\{-1<X<1|-1<X<1\}=k\frac{1+1}{2}=k,$$

所以 $k=1$，故

$$P\{-1<X\leqslant x|-1<X<1\}=\frac{x+1}{2}.$$

当 $-1<x<1$ 时，

$$\{-1<X\leqslant x\}=\{-1<X\leqslant x\}\cap\{-1<X<1\}$$

所以

$$P\{-1<X\leqslant x\}=P\{-1<X\leqslant x,-1<X<1\}.$$

由条件概率公式，有

$$P\{-1<X\leqslant x\}=P\{-1<X\leqslant x,-1<X<1\}$$

$$=P\{-1<X\leqslant x|-1<X<1\}P\{-1<X<1\}$$

$$=\frac{x+1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{5x+5}{16},$$

$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant -1\}+P\{-1<X\leqslant x\}$，而

$$P\{X\leqslant -1\}=P\{X=-1\}+P\{X<-1\}=\frac{1}{8}+0=\frac{1}{8},$$

所以

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant -1\}+P\{-1<X\leqslant x\}=\frac{1}{8}+\frac{5x+5}{16}=\frac{5x+7}{16},$$

故所求的 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \frac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

十二、（本题满分 6 分）

游客乘电梯从底层到电视塔顶层观光；电梯于每个整点的第 5 分钟、25 分钟和 55 分钟从底层起行．假设一游客在早晨八点的第 X 分钟到达底层候梯处，且 X 在 $[0,60]$ 上均匀分布，求该游客等候时间的数学期望.

解. 已知 X 在 $[0,60]$ 上均匀分布，则其密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{60}, & 1\leqslant x\leqslant 60,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

设 Y 表示游客等候电梯的时间 (单位：分钟)，则

$$Y=g(X)=\begin{cases}5-X, & 0\leqslant X\leqslant 5,\\ 25-X, & 5<X\leqslant 25,\\ 55-X, & 25<X\leqslant 55,\\ 65-X, & 55<X\leqslant 60.\end{cases}$$

由随机变量函数期望的定义，有

$$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{60}g(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{60}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{60}\left[\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x+\int_5^{25}(25-x)\mathrm{d}x+\int_{25}^{55}(55-x)\mathrm{d}x+\int_{55}^{60}(65-x)\mathrm{d}x\right]$$

$$=\frac{1}{60}(12.5+200+450+37.5)=11.67.$$

十三、（本题满分 6 分）

两台同样自动记录仪，每台无故障工作的时间服从参数为 5 的指数分布；首先开动其中一台，当其发生故障时停用而另一台自行开动．试求两台记录仪无故障工作的总时间 T 的概率密度 $f(t)$、数学期望和方差.

解. 设 X_1和X_2 表示先后开动的记录仪无故障工作的时间，则两台记录仪无故障工作的总时间为 $T=X_1+X_2$. 由于每台无故障工作的时间都服从参数为 5 的指数分布，则 X_1和X_2 的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}5\mathrm{e}^{-5x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

因为两台仪器是独立的，则其无故障工作的时间显然也是相互独立的，即 X_1 和 X_2 独立，由卷积公式：当 $t>0$ 时，T 的概率密度为

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(t-x)\,\mathrm{d}x=25\int_0^t \mathrm{e}^{-5x}\mathrm{e}^{-5(t-x)}\,\mathrm{d}x=25t\mathrm{e}^{-5t};$$

当 $t\leqslant 0$ 时，$f(t)=0$，即

$$f(t)=\begin{cases}25t\mathrm{e}^{-5t}, & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0.\end{cases}$$

由指数分布的期望和方差的结论，有

$$EX_1=EX_2=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{5},\quad DX_1=DX_2=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{25}.$$

由期望的性质有

$$ET=E(X_1+X_2)=EX_1+EX_2=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}.$$

由独立随机变量方差的性质有

$$DT=D(X_1+X_2)=DX_1+DX_2=\frac{1}{25}+\frac{1}{25}=\frac{2}{25}.$$

一九九七年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 5 分，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷三第一 [1] 题.

2. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+x^3\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$，则 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x=$ ________.

解. 应填 $\dfrac{\pi}{3}$.

3. 设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$，则 $|A|=$ ________.

解. 应填 $(-1)^{n-1}(n-1)$.

4. 设 A,B 是任意两个随机事件，则 $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\}=$ ________.

解. 应填 0.

5. 设随机变量 X 服从参数为 $(2,p)$ 的二项分布，随机变量 Y 服从参数为 $(3,p)$ 的二项分布．若 $P\{X\geqslant 1\}=\dfrac{5}{9}$，则 $P\{Y\geqslant 1\}=$ ________.

解. 应填 $\dfrac{19}{27}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f(x),\phi(x)$ 在点 $x=0$ 的某邻域内连续，且当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $\phi(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x\to 0$ 时，$\displaystyle\int_0^x f(t)\sin t\,\mathrm{d}t$ 是 $\displaystyle\int_0^x t\phi(t)\,\mathrm{d}t$ 的 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 低阶无穷小.　　(B) 高阶无穷小.

(C) 同阶但不等价的无穷小.　　(D) 等价无穷小.

解. 应选 (B).

2. 同试卷三第二 [2] 题.

3. 同试卷三第二 [3] 题.

4. 非齐次线性方程组 $AX=b$ 中未知量个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 A 的秩为 r，则…………………………………………………………( )

(A) $r=m$ 时，方程组 $AX=b$ 有解.

(B) $r=n$ 时，方程组 $AX=b$ 有唯一解.

(C) $m=n$ 时，方程组 $AX=b$ 有唯一解.

(D) $r<n$ 时，方程组 $AX=b$ 有无穷多解.

解. 应选 (A).

5. 设 X 是一随机变量，$EX=\mu, DX=\sigma^2$（$\mu,\sigma>0$ 是常数），则对任意常数 c，必有…………………………………………………………( )

(A) $E(X-c)^2=E(X^2)-c^2$.

(B) $E(X-c)^2=E(X-\mu)^2$.

(C) $E(X-c)^2<E(X-\mu)^2$.

(D) $E(X-c)^2\geqslant E(X-\mu)^2$.

解. 应选 (D).

三、（本题满分 6 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]$（$a\neq0$）.

解. 由洛必达法则，求得极限等于 $\dfrac{a^2}{2}$.

四、（本题满分 6 分）

同试卷三第四题.

五、（本题满分 6 分）

假设某种商品的需求量 Q 是单价 p（单位: 元）的函数：$Q=12000-80p$；商品的总成本 C 是需求量 Q 的函数：$C=25000+50Q$；每单位商品需要纳税 2 元. 试求使销售利润最大的商品单价和最大利润额.

解. 当单价 $p=101$ 时，有最大利润额 $\pi=167080$（元）.

六、（本题满分 7 分）

求曲线 $y=x^2-2x$, $y=0$, $x=1$, $x=3$ 所围成的平面图形的面积 S，并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V.

解. 故所求图形的面积 $S=2$. 所求旋转体的体积 $V=9\pi$.

七、（本题满分 7 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $F(x)=\displaystyle\int_0^x(x-2t)f(t)\,\mathrm{d}t$. 试证:

(I) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $F(x)$ 也是偶函数；

(II) 若 $f(x)$ 单调不增，则 $F(x)$ 单调不减.

解. (I) 令 $t=-u$，有

$$F(-x)=\int_0^{-x}(-x-2t)f(t)\mathrm{d}t=-\int_0^{x}(-x+2u)f(-u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^{x}(x-2u)f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{x}(x-2t)f(t)\mathrm{d}t=F(x),$$

即 $F(x)$ 为偶函数.

(II) 由积分中值定理，存在 ξ 介于 0 和 x 之间，使得

$$F'(x)=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t-xf(x)=x[f(\xi)-f(x)].$$

由已知 $f(x)$ 单调不减，可见

当 $x>0$ 时，$f(\xi)-f(x)\geqslant 0$，故 $F'(x)\geqslant 0$；当 $x=0$ 时，显然 $F'(x)=0$；

当 $x<0$ 时，$f(\xi)-f(x)\leqslant 0$，故 $F'(x)\geqslant 0$.

总之，当 $x\in(-\infty,+\infty)$ 时，总有 $F'(x)\geqslant 0$，从而 $F(x)$ 单调不减.

八、(本题满分 6 分)

设 D 是以点 $O(0,0)$, $A(1,2)$ 和 $B(2,1)$ 为顶点的三角形区域，求 $\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解. $\frac{3}{2}$.

九、(本题满分 7 分)

同试卷三第九题.

十、(本题满分 9 分)

设矩阵 A 和 B 相似，且 $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&4&-2\\-3&-3&a\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&b\end{pmatrix}$,

(I) 求 a,b 的值； (II) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

解. (I) $a=5, b=6$； (II) $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&-2\\0&1&3\end{pmatrix}$.

十一、(本题满分 8 分)

假设随机变量 X 的绝对值不大于 1；$P\{X=-1\}=\frac{1}{8}, P\{X=1\}=\frac{1}{4}$；在事件 $\{-1<X<1\}$ 出现的条件下，X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比. 试求:

(Ⅰ) X 的分布函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}$； (Ⅱ) X 取负值的概率 p.

解. (Ⅰ) 由 X 的绝对值不大于 1，可得：当 $x<-1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；当 $x\geqslant 1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=1$. 又 $P\{X=-1\}=\frac{1}{8},P\{X=1\}=\frac{1}{4}$，则

$$P\{-1<x<1\}=1-P\{X=-1\}-P\{X=1\}=1-\frac{1}{8}-\frac{1}{4}=\frac{5}{8}.$$

由题意 X 在 $(-1,1)$ 内的任一子区间上取值的条件概率与该子区间长度成正比，那么当 X 的值属于 $(-1,1)$ 的条件下，事件 $\{-1<X\leqslant x\}$ 的条件概率为：

$$P\{-1<X\leqslant x|-1<X<1\}=k\frac{x-(-1)}{1-(-1)}=k\frac{x+1}{2},$$

其中 k 为比例正常数. 又 $P\{-1<X<1|-1<X<1\}=1$，而

$$P\{-1<X<1|-1<X<1\}=k\frac{1+1}{2}=k,$$

所以 $k=1$，故

$$P\{-1<X\leqslant x|-1<X<1\}=\frac{x+1}{2}.$$

当 $-1<x<1$ 时，$\{-1<X\leqslant x\}=\{-1<X\leqslant x\}\cap\{-1<X<1\}$，所以

$$P\{-1<X\leqslant x\}=P\{-1<X\leqslant x,-1<X<1\}.$$

由条件概率公式，有

$$\begin{aligned}P\{-1<X\leqslant x\}&=P\{-1<X\leqslant x,-1<X<1\}\\&=P\{-1<X\leqslant x|-1<X<1\}P\{-1<X<1\}\\&=\frac{x+1}{2}\times\frac{5}{8}=\frac{5x+5}{16},\end{aligned}$$

$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant -1\}+P\{-1<X\leqslant x\}$，而

$$P\{X\leqslant -1\}=P\{X=-1\}+P\{X<-1\}=\frac{1}{8}+0=\frac{1}{8},$$

所以

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X\leqslant -1\}+P\{-1<X\leqslant x\}=\frac{1}{8}+\frac{5x+5}{16}=\frac{5x+7}{16},$$

故所求的 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1;\\ \frac{5x+7}{16}, & -1\leqslant x<1;\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

(Ⅱ) X 取负值的概率 $p=P\{X<0\}=F(0)-P\{X=0\}=F(0)=\frac{7}{16}$.

十二、(本题满分 8 分)

假设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda=1$ 的指数分布，随机变量 $X_k=\begin{cases}0, & Y\leqslant k,\\ 1, & Y>k\end{cases}$ $(k=1,2)$，求：(Ⅰ) X_1 和 X_2 的联合概率分布； (Ⅱ) $E(X_1+X_2)$.

解. (Ⅰ) X_1 和 X_2 的联合概率分布为

$X_1 \backslash X_2$	0	1
0	$1-\mathrm{e}^{-1}$	0
1	$\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-2}$	e^{-2}

(Ⅱ) $E(X_1+X_2)=\mathrm{e}^{-1}+\mathrm{e}^{-2}$.

一九九八年考研数学试卷三解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设曲线 $f(x)=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n,0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)=$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{\mathrm{e}}$. 曲线 $y=x^n$ 在点 $(1,1)$ 处的切线斜率 $y'\big|_{x=1}=nx^{n-1}\big|_{x=1}=n$，根据点斜式，切线方程为 $y-1=n(x-1)$. 令 $y=0$，代入 $y-1=n(x-1)$，则 $x=1-\frac{1}{n}$，即在 x 轴上的截距为 $\xi_n=1-\frac{1}{n}$. 从而有

$$\lim_{n\to\infty} f(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\xi_n^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{(-x)(-1)}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

2. $\int \frac{\ln x-1}{x^2}\,\mathrm{d}x=$ ________.

解. 应填 $-\frac{\ln x}{x}+C$. 由分部积分公式，

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x-1}{x^2}\,\mathrm{d}x&=-\int(\ln x-1)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=-\frac{\ln x-1}{x}+\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}(\ln x-1)=-\frac{\ln x-1}{x}+\int\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln x-1}{x}-\frac{1}{x}+C=-\frac{\ln x}{x}+C.\end{aligned}$$

3. 差分方程 $2y_{t+1}+10y_t-5t=0$ 的通解为 ________.

解. 应填 $y_t=C(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$. 先把差分方程改写成标准形式 $y_{t+1}+5y_t=\frac{5}{2}t$，其对应齐次方程的特征方程为 $r+5=0$，特征根为 $r=-5$，故齐次方程的通解为 $Y_t=C(-5)^t, C$ 为常数. 方程右边为 $\frac{5}{2}t=\frac{5}{2}t\cdot 1^t$，其中 1 不是特征根，故令非齐次方程的一个特解为 $y_t^*=At+B$，代入原方程解得 $A=\frac{5}{12}, B=-\frac{5}{72}$. 于是通解为 $y_t=Y_t+y_t^*=C(-5)^t+\frac{5}{12}\left(t-\frac{1}{6}\right)$.

4. 设矩阵 A,B 满足 $A^*BA=2BA-8E$，其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$E$ 为单位矩阵，A^* 为 A 的伴随矩阵，则 $B=$ ________.

解. 应填 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. 由于 $|A|=-2\neq 0$，所以 A 可逆. 在 $A^*BA=2BA-8E$ 两边左乘 A，右乘 A^{-1}，利用公式 $AA^*=|A|E, AA^{-1}=E$，得到 $|A|B=2AB-8E$. 将

$|A|=-2$ 代入上式，整理得

$$B=4(E+A)^{-1}=4\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}^{-1}=4\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&-1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

5. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N\left(0,2^2\right)$ 的简单随机样本,

$$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2,$$

则当 $a=$________, $b=$________时,统计量 X 服从 χ^2 分布,其自由度为________.

解. 应填 $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{100}$, 2，由于 X_1,X_2,X_3,X_4 相互独立，均服从 $N(0,2^2)$，所以由数学期望和方差的性质，得

$$E(X_1-2X_2)=0,\quad D(X_1-2X_2)=1\times 2^2+2^2\times 2^2=20,$$

所以 $X_1-2X_2\sim N(0,20)$, 同理 $3X_3-4X_4\sim N(0,100)$. 又因为 X_1-2X_2 与 $3X_3-4X_4$ 相互独立，且

$$\frac{1}{\sqrt{20}}(X_1-2X_2)\sim N(0,1),\quad \frac{1}{\sqrt{100}}(3X_3-4X_4)\sim N(0,1),$$

由 χ^2 分布的定义，当 $a=\frac{1}{20}, b=\frac{1}{100}$ 时,

$$X=\frac{1}{20}(X_1-2X_2)^2+\frac{1}{100}(3X_3-4X_4)^2\sim\chi^2(2);$$

即当 $a=\frac{1}{20}, b=\frac{1}{100}$ 时, X 服从 χ^2 分布, 其自由度为 2. 实际上, 当 $a=0, b=\frac{1}{100}$ 时， $X\sim\chi^2(1)$；当 $a=\frac{1}{20}, b=0$ 时， $X\sim\chi^2(1)$， 也是正确的.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4. 又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(5,f(5)\right)$ 处的切线的斜率为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\frac{1}{2}$.　　(B) 0.　　(C) t.　　(D) -2.

解. 应选 (D). 根据导数定义可得

$$f'(1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=-2.$$

因为 $f(x)$ 周期为 4, $f'(x)$ 的周期亦是 4, 从而 $f'(5)=f'(1)=-2$. 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(5,f(5)\right)$ 处的切线的斜率为 $f'(5)=f'(1)=-2$.

2. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 不存在间断点.　　(B) 存在间断点 $x=1$.

(C) 存在间断点 $x=0$.　　(D) 存在间断点 $x=-1$.

解. 应选 (B). 先求 $f(x)$ 的分段表达式:

当 $|x|>1$ 时,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{-2n}+x^{1-2n}}{x^{-2n}+1}=\frac{0}{1}=0;$$

当 $x=1$ 时,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+1}{1+1^{2n}}=\frac{2}{2}=1;$$

当 $x=-1$ 时,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1}{1+(-1)^{2n}}=\frac{0}{2}=0;$$

当 $|x|<1$ 时,

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\frac{1+x}{1}=1+x.$$

由此可得到 $f(x)$ 的表达式:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x\leqslant -1 \text{ 或 } x>1,\\ 1+x, & \text{当 } |x|<1,\\ 1, & \text{当 } x=1.\end{cases}$$

再讨论函数 $f(x)$ 的性质: 函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处连续, 不是间断点. 函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 是第一类间断点. 故选 (B).

3. 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2 x_3=0,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 A. 若存在三阶矩阵 $B\neq 0$ 使得 $AB=0$, 则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ ( )

(A) $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$.　　(B) $\lambda=-2$ 且 $|B|\neq 0$.

(C) $\lambda=1$ 且 $|B|=0$.　　(D) $\lambda=1$ 且 $|B|\neq 0$.

解. 应选 (C). 由 $AB=0$ 知 $r(A)+r(B)\leqslant 3$, 又 $A\neq 0, B\neq 0$, 于是 $1\leqslant r(A)<3$, $1\leqslant r(B)<3$, 故 $|A|=0, |B|=0$, 即

$$|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & \lambda^2\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda\\ 1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0\\ \lambda-1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^2=0,$$

得 $\lambda=1$. 应选 (C).

4. 设 $n(n\geqslant 3)$ 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & a & a & \cdots & a\\ a & 1 & a & \cdots & a\\ a & a & 1 & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a & a & a & \cdots & 1\end{pmatrix}$, 若矩阵 A 的秩为 $n-1$, 则 a 必为( )

(A) 1.　　(B) $\dfrac{1}{1-n}$.　　(C) -1.　　(D) $\dfrac{1}{n-1}$.

解. 应选 (B). 因矩阵 A 的秩 $r(A)=n-1$，故 $|A|=0$，即 $[1+(n-1)a](1-a)^{n-1}=0$. 解得 $a=1$ 或 $a=\dfrac{1}{1-n}$. 又当 $a=1$ 时显然 $r(A)=1\neq n-1$，故应选 (B).

5. 设 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1 与 X_2 的分布函数.为使 $F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $a=\dfrac{3}{5}, b=-\dfrac{2}{5}$.　(B) $a=\dfrac{2}{3}, b=\dfrac{2}{3}$.　(C) $a=-\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{3}{2}$.　(D) $a=\dfrac{1}{2}, b=-\dfrac{3}{2}$.

解. 应选 (A). 根据分布函数的性质 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$，即

$$1=\lim_{x\to+\infty}F(x)=F(+\infty)=aF_1(+\infty)-bF_2(+\infty)=a-b$$

在所给的四个选项中只有 (A) 满足 $a-b=1$，故应选 (A).

三、(本题满分 5 分)

设 $z=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 $\mathrm{d}z$ 与 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. 由全微分运算法则，得到

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z&=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\mathrm{d}(x^2+y^2)+(x^2+y^2)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\right)\\
&=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}\left(-\arctan\frac{y}{x}\right)\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y-(x^2+y^2)\frac{1}{1+(y/x)^2}\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right)\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y-x^2\cdot\frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2}\right]\\
&=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\left[(2x+y)\mathrm{d}x+(2y-x)\mathrm{d}y\right]
\end{aligned}$$

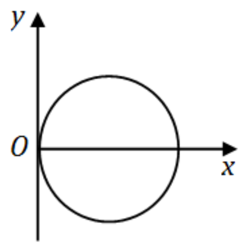
由全微分与偏微分的关系可知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=(2x+y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}$. 再对 y 求偏导数得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}-(2x+y)\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{y^2-xy-x^2}{x^2+y^2}\mathrm{e}^{-\arctan\frac{y}{x}}.$$

四、(本题满分 5 分)

设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant x\}$，求 $\iint_D\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解. $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant x\}$ 表示圆心为 $\left(\dfrac{1}{2},0\right)$，半径为 $\dfrac{1}{2}$ 的圆及其内部，如图:



因为 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,-\sqrt{x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{x-x^2}\right\}$，所以

$$\iint_D\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}\mathrm{d}y=\int_0^1 2\sqrt{x}\sqrt{x-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x.$$

令 $\sqrt{1-x}=t$，则 $x=1-t^2,\mathrm{d}x=-2t\,\mathrm{d}t$，所以

$$2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x=2\int_1^0(1-t^2)t\cdot(-2t)\,\mathrm{d}t=4\int_0^1 t^2(1-t^2)\,\mathrm{d}t=4\left(\frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}\right)_0^1=\frac{8}{15}.$$

五、（本题满分 6 分）

设某酒厂有一批新酿的好酒，如果现在（假定 $t=0$）就售出，总收入为 R_0(元). 如果窖藏起来待来日按陈酒价格出售，t 年末总收入为 $R=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$. 假定银行的年利率为 r，并以连续复利计息，试求窖藏多少年售出可使总收入的现值最大. 并求 $r=0.06$ 时的 t 值.

解. 由连续复利公式知，这批酒在窖藏 t 年末售出总收入 R 的现值为 $A(t)=R\mathrm{e}^{-rt}$，而由题设，t 年末的总收入 $R=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$，从而 $A(t)=R\mathrm{e}^{-rt}=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}$. 令

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}\left(\frac{1}{5\sqrt{t}}-r\right)=0,$$

得惟一驻点 $t=t_0=\dfrac{1}{25r^2}$. 又因为

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}t^2}&=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}\left(\frac{1}{5\sqrt{t}}-r\right)^2+R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}\left(-\frac{1}{10\sqrt{t^3}}\right)\\&=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}\left[\left(\frac{1}{5\sqrt{t}}-r\right)^2-\frac{1}{10\sqrt{t^3}}\right],\end{aligned}$$

从而 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=t_0}=R_0\mathrm{e}^{\frac{1}{25r}}(-12.5r^3)<0$. 根据极值的第二充分条件知 $t=t_0$ 是 $A(t)$ 的极大值点. 又因驻点惟一，所以也是最大值点. 故窖藏 $t=\dfrac{1}{25r^2}$ 年出售，总收入的现值最大. 当 $r=0.06$ 时，$t=\dfrac{100}{9}\approx 11$(年).

六、（本题满分 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内可导,且 $f'(x)\neq 0$. 试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\dfrac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\cdot\mathrm{e}^{-\eta}$.

解. 由拉格朗日中值定理得，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

又由柯西中值定理得，存在 $\eta\in(a,b)$ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}=\frac{f'(\eta)}{\mathrm{e}^\eta}.$$

由上面两式消去 $f(b)-f(a)$，即得结论.

七、（本题满分 6 分）

设有两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n.

(I) 求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 S_n；

(II) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

解. (I) 由 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 与 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$ 得 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$. 因图形关于 y 轴对称，所以，所求图形的面积为

$$S_n=2\int_0^{a_n}\left[nx^2+\frac{1}{n}-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}\right]\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^{a_n}\left[-x^2+\frac{1}{n(n+1)}\right]\mathrm{d}x=\frac{2a_n}{n(n+1)}-2\frac{a_n^3}{3}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}.$$

(II) 由 (I) 的结果知

$$\frac{S_n}{a_n}=\frac{4}{3}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{4}{3}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

根据级数和的定义有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{S_k}{a_k}=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=\frac{4}{3}.$$

八、（本题满分 7 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续. 若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1,x=t\ (t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所形成的旋转体体积为

$$V(t)=\frac{\pi}{3}\left[t^2f(t)-f(1)\right].$$

试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y\big|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.

解. 由题设及旋转体体积公式得

$$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\left[t^2f(t)-f(1)\right],\quad \text{即}\quad 3\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=t^2f(t)-f(1).$$

两边对 t 求导，化成微分方程

$$3f^2(t)=2tf(t)+t^2f'(t)\quad \text{即}\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\left(\frac{y}{x}\right)^2-2\left(\frac{y}{x}\right).$$

这是一阶齐次微分方程. 令 $y=ux$，有 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，则上式化为

$$u+x\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)=3u^2-2u\quad \text{即}\quad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=3u(u-1).$$

易知当 $u=0$ 或 $u=1$ 时不满足初始条件 $y\big|_{x=2}=\frac{2}{9}$；所以 $u\neq0$ 且 $u\neq1$. 将上式分离并两边积分得

$$\frac{\mathrm{d}u}{u(u-1)}=\frac{3\mathrm{d}x}{x}\quad\Rightarrow\quad \frac{u-1}{u}=Cx^3.$$

从而微分方程的通解为 $y-x=Cx^3y$（C 为任意常数）. 代入初值 $y\big|_{x=2}=\dfrac{2}{9}$ 得 $C=-1$，从而所求的解为 $y-x=-x^3y$，即 $y=\dfrac{x}{1+x^3}$.

九、（本题满分 9 分）

设向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 都是非零向量，且满足条件 $\alpha^T\beta=0$. 记 n 阶矩阵 $A=\alpha\beta^T$. 求:

(Ⅰ) A^2；(Ⅱ) 矩阵 A 的特征值和特征向量.

解. (Ⅰ) 对等式 $\alpha^T\beta=0$ 两边取转置，有 $\left(\alpha^T\beta\right)^T=\beta^T\alpha=0$，即 $\beta^T\alpha=0$. 从而

$$A^2=\left(\alpha\beta^T\right)^2=\alpha\beta^T\alpha\beta^T=\alpha\left(\beta^T\alpha\right)\beta^T=\alpha0\beta^T=0\alpha\beta^T=0.$$

即 A^2 是 n 阶零矩阵.

(Ⅱ) 设 λ 是 A 的任一特征值，ξ 是对应的特征向量（$\xi\neq0$），则有

$$A\xi=\lambda\xi \quad\Rightarrow\quad 0=A^2\xi=\lambda^2\xi \quad\Rightarrow\quad \lambda=0.$$

即矩阵的全部特征值为零. 下面求 A 的特征向量：不妨设 $a_1\neq0,b_1\neq0$，则对线性方程组 $(0E-A)x=0$ 的系数矩阵作初等行变换得

$$(0E-A)=\begin{pmatrix}-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n\\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

于是得方程组 $(0E-A)x=0$ 的基础解系为

$$\xi_1=(-b_2,b_1,0,\cdots,0),\xi_2=(-b_3,0,b_1,\cdots,0),\cdots,\xi_{n-1}=(-b_n,0,0,\cdots,b_1).$$

则 A 的属于 $\lambda=0$ 的全部特征向量为 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-1}\xi_{n-1}$，其中 k_1, k_2, $\cdots$, k_{n-1} 为不全为零的任意常数.

十、（本题满分 7 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $B=(kE+A)^2$，其中 k 为实数，E 为单位矩阵. 求对角矩阵 Λ，使 B 与 Λ 相似，并求 k 为何值时，B 为正定矩阵.

解. 由于矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2,$$

可得 A 的特征值是 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=0$. 因为 A 是实对称矩阵，故存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 0\end{pmatrix}$, 即 $A=P\Lambda P^{-1}$. 那么

$$B=(kE+A)^2=(kPP^{-1}+P\Lambda P^{-1})^2=\left[P(kE+\Lambda)P^{-1}\right]^2$$

$$=P(kE+\Lambda)P^{-1}P(kE+\Lambda)P^{-1}=P(kE+\Lambda)^2P^{-1}.$$

即 $P^{-1}BP=(kE+\Lambda)^2$. 故 $B\sim\begin{pmatrix}(k+2)^2 & 0 & 0\\ 0 & (k+2)^2 & 0\\ 0 & 0 & k^2\end{pmatrix}$. 当 $k\neq-2$且$k\neq 0$ 时，B 的全部特征值大于零，这时 B 为正定矩阵.

十一、（本题满分 10 分）

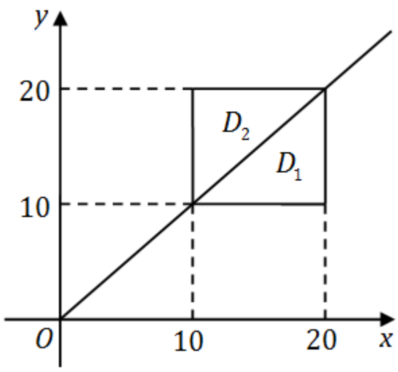
一商店经销某种商品，每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量，且都服从区间 $[10,20]$ 上的均匀分布. 商店每售出一单位商品可得利润 1000 元；若需求量超过了进货量，商店可从其他商店调剂供应，这时每单位商品获利润为 500 元. 试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

解. 设 Z 表示商店每周所得的利润，当 $Y\leqslant X$ 时，卖得利润为 $Z=1000Y$(元)；当 $Y>X$ 时, 调剂了 $Y-X$, 总共得到利润 $Z=1000X+500(Y-X)=500(X+Y)$(元). 所以

$$Z=\begin{cases}1000Y, & Y\leqslant X,\\ 500(X+Y), & Y>X.\end{cases}$$

由题设 X 与 Y 都服从区间 $[10,20]$ 上的均匀分布，联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{100}, & 10\leqslant x\leqslant 20, 10\leqslant y\leqslant 20,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$



由二维连续型随机变量的数学期望定义得

$$E(Z)=\iint_{D_1}1000y\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}500(x+y)\cdot f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D_1}1000y\cdot\frac{1}{100}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{D_2}500(x+y)\cdot\frac{1}{100}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$=10\int_{10}^{20}\mathrm{d}y\int_{y}^{20}y\,\mathrm{d}x+5\int_{10}^{20}\mathrm{d}y\int_{10}^{y}(x+y)\mathrm{d}x$$
$$=10\int_{10}^{20}y(20-y)\mathrm{d}y+5\int_{10}^{20}\left(\frac{3}{2}y^2-10y-50\right)\mathrm{d}y$$
$$=\frac{20000}{3}+5\times1500\approx14166.67(\text{元}).$$

十二、（本题满分 9 分）

设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份．随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份．

(I) 求先抽到的一份是女生表的概率 p；

(II) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的一份是女生表的概率 q.

解. 记事件 $B_j=$“第 j 次抽到的报名表是女生表”$(j=1,2)$，$A_i=$“报名表是第 i 个地区的”$(i=1,2,3)$．易见 A_1,A_2,A_3 构成一个完备事件组，且

$$P(A_i)=\frac{1}{3}\quad(i=1,2,3),$$
$$P(B_1|A_1)=\frac{3}{10},\quad P(B_1|A_2)=\frac{7}{15},\quad P(B_1|A_3)=\frac{5}{25}.$$

(I) 应用全概率公式得

$$p=P(B_1)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\cdot P(B_1|A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$$

(II) 对事件 $B_1\overline{B_2}$ 再次用全概率公式得

$$P(B_1\overline{B_2})=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)\cdot P(B_1\overline{B_2}|A_i)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{15}\cdot\frac{8}{14}+\frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\right)=\frac{20}{90}.$$

由抽签原理可知 $P(\overline{B_2})=P(\overline{B_1})=\frac{61}{90}$，从而

$$q=P(B_1|\overline{B_2})=\frac{P(B_1\overline{B_2})}{P(\overline{B_2})}=\frac{20}{90}\cdot\frac{90}{61}=\frac{20}{61}.$$

一九九八年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷三第一 [1] 题.

2. 同试卷三第一 [2] 题.

3. 同试卷三第一 [4] 题.

4. 设 A, B 均为 n 阶矩阵，$|A|=2, |B|=-3$，则 $\left|2A^*B^{-1}\right|=$________.

解. 应填 $-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$.

5. 设一次试验成功的概率为 p，进行 100 次独立重复试验，当 $p=$________ 时，成功次数的标准差的值最大；其最大值为 ________.

解. 应填 $\dfrac{1}{2}$ 和 5.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷三第二 [1] 题.

2. 同试卷三第二 [2] 题.

3. 若向量组 α,β,γ 线性无关；α,β,δ 线性相关，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) α 必可由 β,γ,δ 线性表示.　(B) β 必不可由 α,γ,δ 线性表示.

(C) δ 必可由 α,β,γ 线性表示.　(D) δ 必不可由 α,β,γ 线性表示.

解. 应选 (C). 因 α,β,γ 线性无关，故 α,β 线性无关. 又 α,β,δ 线性相关，δ 必可由 α,β 线性表示，从而 δ 必可由 α,β,γ 线性表示. 故选 (C).

4. 设 A, B, C 是三个相互独立的随机事件，且 $0<P(C)<1$，则在下列给定的四对事件中不相互独立的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $\overline{A+B}$ 与 C.　(B) $\overline{AC}$ 与 $\bar{C}$.　(C) $\overline{A-B}$ 与 $\bar{C}$.　(D) $\overline{AB}$ 与 $\bar{C}$.

解. 应选 (B). 由于 A, B, C 三个事件相互独立时，其中任何两个事件的和、差、交、逆与另一事件或其逆相互独立，根据这一性质选项 (A)，(C)，(D) 中的两事件都是相互独立的，故选 (B).

5. 同试卷三第二 [5] 题.

三、(本题满分 6 分)

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ (n 为自然数).

解. 由等价无穷小量代换和洛必达法则，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}&=\exp\left(\lim_{x\to0}\left[\left(\frac{\tan x}{x}-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right]\right)\\&=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^3}\right)=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\sec^2x-1}{3x^2}\right)\\&=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x}{3x^2}\right)=\mathrm{e}^{1/3}.\end{aligned}$$

取 $x=\frac{1}{n}$，则原式 $=\mathrm{e}^{1/3}$.

四、(本题满分 6 分)

同试卷三第三题.

五、(本题满分 5 分)

同试卷三第四题.

六、(本题满分 6 分)

同试卷三第五题.

七、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，试证存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\mathrm{e}^{\eta-\xi}[f(\eta)+f'(\eta)]=1$.

解. 令 $g(x)=\mathrm{e}^xf(x)$，则由拉格朗日中值定理，存在 $\eta\in(a,b)$ 使得

$$\mathrm{e}^{\eta}[f(\eta)+f'(\eta)]=\frac{\mathrm{e}^bf(b)-\mathrm{e}^af(a)}{b-a}=\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}.$$

再令 $h(x)=\mathrm{e}^x$，则由拉格朗日中值定理条件，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\mathrm{e}^{\xi}=\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}.$$

综合上面两式，即得结论. 也可以令 $\xi=\eta$，然后对 $\mathrm{e}^x[f(x)-1]$ 用中值定理.

八、(本题满分 9 分)

设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成的图形面积为 S_2，并且 $a<1$.

(I) 试确定 a 的值，使 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值；

(II) 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解. (I) 当 $0<a<1$ 时有最小值 $S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$. 当 $a\leqslant 0$ 时有最小值 $S(0)=\frac{1}{3}$. 综上所述, S_1+S_2 在 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ 时取得最小值 $\frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

(II) 旋转体的体积为 $V=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi$.

九、(本题满分 9 分)

同试卷三第九题.

十、(本题满分 9 分)

已知下列非齐次线性方程组①和②:

$$① \begin{cases} x_1+x_2-2x_4=-6, \\ 4x_1-x_2-x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2-x_3=3; \end{cases} \qquad ② \begin{cases} x_1+mx_2-x_3-x_4=-5, \\ nx_2-x_3-2x_4=-11, \\ x_3-2x_4=-t+1. \end{cases}$$

(I) 求解方程组①, 用其导出组的基础解系表示通解.

(II) 当方程组②中的参数 m, n, t 为何值时, 方程组①与②同解?

解. (I) 方程组①的通解为

$$x=\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{其中}k\text{为任意常数.}$$

(II) 当 $m=2, n=4, t=6$ 时, 方程组①与②同解.

十一、(本题满分 7 分)

求某种商品每周的需求量 X 是服从区间 $[10,30]$ 上均匀分布的随机变量, 而经销商进货数量为区间 $[10,30]$ 中的某一整数, 商店每销售一单位商品可获利 500 元; 若供大于求则削价处理, 每处理 1 单位商品亏损 100 元; 若供不应求, 则可从外部调剂供应, 此时每 1 单位商品仅获利 300 元, 为使商品所获利润期望值不小于 9280 元, 试确定最少进货量.

解. 期望利润不少于 9280 元的最少进货量为 21 单位.

十二、(本题满分 7 分)

某箱装有 100 件产品, 其中一、二、三等品分别为 80 件、10 件和 10 件, 现在从中随机抽取一件, 记 $X_i=\begin{cases} 1, & \text{若抽到 } i \text{ 等品} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ $(i=1,2,3)$, 试求:

(I) 随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布;

(II) 随机变量 X_1 与 X_2 的相关系数 ρ.

解. (I) 随机变量 X_1 与 X_2 的联合分布为

X_1 \ X_2	0	1
0	0.1	0.1
1	0.8	0

(II) 随机变量 X_1 与 X_2 的相关系数 $\rho = -\frac{2}{3}$.

一九九九年考研数学试卷三解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $f(x)$ 有一个原函数 $\dfrac{\sin x}{x}$，则 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x)\,\mathrm{d}x =$ ________.

解. 应填 $\dfrac{4}{\pi}-1$．由题设可知 $f(x)=\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)'=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$．由分部积分法得

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x\,\mathrm{d}[f(x)]=\big[xf(x)\big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=\left[\frac{x\cos x-\sin x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\left[\frac{\sin x}{x}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=-1+\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}-1.$$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$ ________.

解. 应填 4．记 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$，两边从 0 到 x 积分得

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty} x^n=\frac{x}{1-x},\qquad x\in(-1,1).$$

所以 $S(x)=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，$x\in(-1,1)$．因此

$$S\left(\frac{1}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=4.$$

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$，而 $n\geqslant 2$ 为整数，则 $A^n-2A^{n-1}=$ ________.

解. 应填 O．因为

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=2A,$$

故有 $A^n-2A^{n-1}=A^{n-2}(A^2-2A)=O$.

4. 在天平上重复称量一重为 a 的物品，假设各次称量结果相互独立且同服从正态分布 $N(a,0.2^2)$．若以 $\overline{X}_n$ 表示 n 次称量结果的算术平均值，则为使

$$P\left\{\left|\overline{X}_n-a\right|<0.1\right\}\geqslant 0.95,$$

n 的最小值应不小于自然数 ________.

解. 应填 16. 由题设知 $U=\dfrac{\overline{X}_n-a}{0.2/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$，所以

$$P\left\{\left|\overline{X}_n-a\right|<0.1\right\}\geqslant 0.95 \Leftrightarrow P\left\{\frac{\left|\overline{X}_n-a\right|}{0.2/\sqrt{n}}<\frac{0.1}{0.2/\sqrt{n}}\right\}\geqslant 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left\{|U|<\frac{\sqrt{n}}{2}\right\}\geqslant 0.95.$$

查标准正态分布表知 $P\{|U|<1.96\}\geqslant 0.95$. 所以 $\dfrac{\sqrt{n}}{2}\geqslant 1.96$，解得 $n\geqslant 15.3664$. 因 n 为整数，所以 n 最小为 16.

5. 设随机变量 $X_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2\right)$ 独立同分布，$EX_{ij}=2$，则行列式 $Y=\begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1n}\\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nn}\end{vmatrix}$ 的数学期望 $EY=$________.

解. 应填 $EY=0$. 行列式每一项都是 n 个元素的乘积 $X_{1j_1}X_{2j_2}\cdots X_{nj_n}$，前面带有正号或负号. 由于随机变量 $X_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$ 相互独立，所以有

$$E(X_{1j_1}X_{2j_2}\cdots X_{nj_n})=EX_{1j_1}EX_{2j_2}\cdots EX_{nj_n}.$$

所以前面无论取正号或者负号，对和式的期望等于各项期望之和. 即有

$$EY=\begin{vmatrix} EX_{11} & EX_{12} & \cdots & EX_{1n}\\ EX_{21} & EX_{22} & \cdots & EX_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ EX_{n1} & EX_{n2} & \cdots & EX_{nn}\end{vmatrix}$$

而 $X_{ij}\left(i,j=1,2,\cdots,n;n\geqslant 2\right)$ 同分布，且 $EX_{ij}=2$，所以

$$EY=\begin{vmatrix} EX_{11} & EX_{12} & \cdots & EX_{1n}\\ EX_{21} & EX_{22} & \cdots & EX_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ EX_{n1} & EX_{n2} & \cdots & EX_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 2 & \cdots & 2\end{vmatrix}=0.$$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint_D f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=0$, $y=x^2$, $x=1$ 所围成的区域，则 $f(x,y)$ 等于 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) xy. (B) $2xy$. (C) $xy+\dfrac{1}{8}$. (D) $xy+1$.

解. 应选 (C). 因为 $\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$ 为一确定的数，不妨设 $\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=a$，则 $f(x,y)=xy+a$，两边同时积分得

$$a=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D (xy+a)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2}(xy+a)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\left(\frac{x^5}{2}+ax^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}+\frac{a}{3}.$$

解之得 $a=\frac{1}{8}$，所以 $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$，故应选 (C).

3. 设向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，但不能由向量组 (I)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示，记向量组 (II)$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1},\beta$，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) α_m 不能由 (I) 线性表示，也不能由 (II) 线性表示.

(B) α_m 不能由 (I) 线性表示，但可由 (II) 线性表示.

(C) α_m 可由 (I) 线性表示，也可由 (II) 线性表示.

(D) α_m 可由 (I) 线性表示，但不可由 (II) 线性表示.

解. 应选 (B). 假设 α_m 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示，则 β 也能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示，与题设矛盾，故 α_m 不能由 (I) 线性表示，从而排除 (C) 和 (D).

由于 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，即存在常数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$ 使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m.$$

而 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示，从而知 $k_m\neq 0$. 因此上式可变为

$$\alpha_m=\frac{1}{k_m}(\beta-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_{m-1}\alpha_{m-1}),$$

即 α_m 能由 (II) 线性表示，从而排除 (A) 和 (D). 故应选 (B).

4. 设 A,B 为 n 阶矩阵，且 A 与 B 相似，E 为 n 阶单位矩阵，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $\lambda E-A=\lambda E-B$.

(B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量.

(C) A 与 B 都相似于一个对角矩阵.

(D) 对任意常数 t，$tE-A$ 与 $tE-B$ 相似.

解. 应选 (D). A 相似于 B，则存在可逆阵 P，使得 $P^{-1}AP=B$. 因此

$$P^{-1}(tE-A)P=P^{-1}tEP-P^{-1}AP=tE-B.$$

根据矩阵相似的定义，则 $tE-A$ 相似于 $tE-B$，故应选 (D). 选项 (A) 不成立：若 $\lambda E-A=\lambda E-B$，则 $A=B$，但两者未必相等. 选项 (B) 不成立：A 与 B 相似，则有相同的特征值，但未必有相同的特征向量. 选项 (C) 不成立：A 与 B 相似，但它们本身未必都相似于对角阵.

5. 设随机变量 $X_i \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} (i=1,2)$，且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}$ 等于……( )

(A) 0. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) 1.

解. 应选 (A)．由题设有 $P\{X_1X_2\neq 0\}=1-P\{X_1X_2=0\}=1-1=0$．从而

$$P\{X_1X_2\neq 0\}=P\{X_1=-1,X_2=-1\}+P\{X_1=-1,X_2=1\}$$
$$+P\{X_1=1,X_2=-1\}+P\{X_1=1,X_2=1\}=0.$$

根据概率的非负性有

$$P\{X_1=-1,X_2=-1\}=P\{X_1=-1,X_2=1\}$$
$$=P\{X_1=1,X_2=-1\}=P\{X_1=1,X_2=1\}=0.$$

根据边缘概率的定义有

$$P\{X_1=-1,X_2=0\}=P\{X_1=-1\}-P\{X_1=-1,X_2=-1\}-P\{X_1=-1,X_2=1\}$$
$$=\frac{1}{4}-0-0=\frac{1}{4}.$$

同理可得

$$P\{X_1=0,X_2=-1\}=P\{X_1=0,X_2=1\}$$
$$=P\{X_1=1,X_2=0\}=P\{X_1=-1,X_2=0\}=\frac{1}{4}.$$

再根据边缘概率的定义有

$$P\{X_1=0,X_2=0\}=P\{X_1=0\}-P\{X_1=0,X_2=-1\}-P\{X_1=0,X_2=1\}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0.$$

从而可求得

$$P\{X_1=X_2\}=P\{X_1=-1,X_2=-1\}+P\{X_1=0,X_2=0\}+P\{X_1=1,X_2=1\}$$
$$=0+0+0=0.$$

三、（本题满分 6 分）

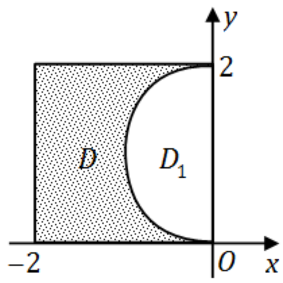
曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形，记切点的横坐标为 a，试求切线方程和这个图形的面积，当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变换趋势如何?

解. 曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在曲线上点 $\left(a,\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ 处的切线的斜率为 $y'|_{x=a}=\left.\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}\right|_{x=a}=\frac{-1}{2\sqrt{a^3}}$，从而切线方程为 $y-\frac{1}{\sqrt{a}}=-\frac{1}{2\sqrt{a^3}}(x-a)$．分别令 $x=0,y=0$ 得到与 x 轴和 y 轴的交点分别为 $Q(3a,0)$ 与 $R\left(0,\frac{3}{2\sqrt{a}}\right)$．于是切线与 x 轴和 y 轴围成的直角三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}\times 3a\times\frac{3}{2\sqrt{a}}=\frac{9}{4}\sqrt{a}$．当切点按 x 轴正项趋于无穷大时，$a\to+\infty$，所以 $\lim\limits_{a\to+\infty}S=+\infty$．当切点按 y 轴正项趋于无穷大时，$a\to 0$，所以 $\lim\limits_{a\to+\infty}S=0$.

四、（本题满分 7 分）

计算二重积分 $\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $x=-2, y=0, y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域.

解. 区域 D 和 D_1 如图所示, 有 $\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D+D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\iint_{D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=I_1-I_2$.



显然 $I_1=\iint_{D+D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y\,\mathrm{d}y=4$. 在极坐标系下，有

$$D_1=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta,\pi/2\leqslant\theta\leqslant\pi\}.$$

因此

$$\begin{aligned}I_2&=\iint_{D_1} y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\pi/2}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r\sin\theta\cdot r\,\mathrm{d}r\\&=\frac{8}{3}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3\times 4}\int_{\pi/2}^{\pi}\left[1-2\cos 2\theta+\frac{1+\cos 4\theta}{2}\right]\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

于是 $\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=I_1-I_2=4-\frac{\pi}{2}$.

五、（本题满分 6 分）

设生产某种产品必须投入两种要素，x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量，Q 为产出量；若生产函数为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，其中 α,β 为正常数，且 $\alpha+\beta=1$. 假设两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2，试问：当产出量为 12 时，两要素各投入多少可以使得投入总费用最小?

解. 设两种要素的总投入费用为 P，则由题意得 $P=p_1x_1+p_2x_2$，题目即是求函数 $P=p_1x_1+p_2x_2$ 在约束条件 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}=12$ 下的条件最值. 作拉格朗日数函数

$$F(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2+\lambda(2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}-12),$$

求偏导数并令其为零，得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x_1}=p_1+2\lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}=0,\\\dfrac{\partial F}{\partial x_2}=p_2+2\lambda\beta x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}=0,\\\dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}-12=0.\end{cases}$$

由前两式可得 $\frac{p_1}{p_2}=\frac{\alpha x_2}{\beta x_1}$，解出 x_2 代入第三个式子得

$$x_1=6\left(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}\right)^{\beta},\quad x_2=6\left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^{\alpha}.$$

因为驻点唯一，且实际问题在 $x_1>0$，$x_2>0$ 的范围内存在最小值，故 $x_1=6\left(\frac{p_2\alpha}{p_1\beta}\right)^{\beta}$，$x_2=6\left(\frac{p_1\beta}{p_2\alpha}\right)^{\alpha}$ 时 P 为最小.

六、（本题满分 6 分）

设有微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)=\begin{cases}2, & x<1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$ 试求在 $(-\infty,+\infty)$ 内的连续函数 $y=y(x)$，使之在 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 内都满足所给方程，且满足条件 $y(0)=0$.

解. 在两个区间 $(-\infty,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上分别求微分方程：

$$\begin{cases}y'-2y=2, & x<1\\ y'-2y=0, & x>1.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}y=-1+C_1\mathrm{e}^{2x}, & x<1;\\ y=C_2\mathrm{e}^{2x}, & x>1;\end{cases}$$

其中 C_1,C_2 为常数. 由题设 $y(0)=0$，其中 $x<0<1$，可知

$$y\big|_{x=0}=-1+C_1\mathrm{e}^{2x}\big|_{x=0}=-1+C_1=0.$$

解得 $C_1=1$. 所以有

$$\begin{cases}y=-1+\mathrm{e}^{2x}, & x<1;\\ y=C_2\mathrm{e}^{2x}, & x>1.\end{cases}$$

又因为 $y=y(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，所以 $\lim\limits_{x\to1-}y=\lim\limits_{x\to1+}y=y(1)$，即

$$\lim_{x\to1-}(-1+\mathrm{e}^{2x})=\lim_{x\to1+}C_2\mathrm{e}^{2x}=y(1).$$

解之得 $C_2=1-\mathrm{e}^{-2}$，$y(1)=\mathrm{e}^2-1$. 故所求连续函数为

$$y=y(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}-1, & x\leqslant1;\\ (1-\mathrm{e}^{-2})\mathrm{e}^{2x}, & x>1.\end{cases}$$

七、（本题满分 6 分）

设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan x^2$. 已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值.

解. 令 $u=2x-t$，则 $t=2x-u$，$\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$. 因此

$$\begin{aligned}\int_0^x tf(2x-t)\,\mathrm{d}t&=-\int_{2x}^x(2x-u)f(u)\,\mathrm{d}u=\int_x^{2x}(2x-u)f(u)\,\mathrm{d}u\\&=2x\int_x^{2x}f(u)\,\mathrm{d}u-\int_x^{2x}uf(u)\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

代入所给等式得

$$2x\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u-\int_x^{2x} uf(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\arctan x^2.$$

两边对 x 求导并化简得

$$2\int_x^{2x} f(u)\mathrm{d}u-xf(x)=\frac{x}{1+x^4}.$$

令 $x=1$ 得

$$2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u-f(1)=\frac{1}{1+1}.$$

化简得

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}+f(1)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{3}{4}.$$

八、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0, f\left(\frac{1}{2}\right)=1$.

试证:

(I) 存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$;

(II) 对任意实数 λ，必存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $f'(\xi)-\lambda\left[f(\xi)-\xi\right]=1$.

解. (I) 设 $F(x)=f(x)-x$，则 $F(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0,\quad F(1)=-1<0.$$

所以由介值定理得，存在 $\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得 $F(\eta)=f(\eta)-\eta=0$，即 $f(\eta)=\eta$.

(II) 令 $f'(x)-\lambda[f(x)-x]-1=0$，解微分方程得

$$f(x)=x+C\mathrm{e}^{\lambda x}\quad\Rightarrow\quad \mathrm{e}^{-\lambda x}(f(x)-x)=C.$$

令 $F(x)=\mathrm{e}^{-\lambda x}(f(x)-x)$. 因为

$$F(0)=\mathrm{e}^{0}(f(0)-0)=0,\quad F(\eta)=\mathrm{e}^{-\lambda\eta}(f(\eta)-\eta)=0,$$

所以由罗尔定理知，存在点 $\xi\in(0,\eta)$，使得 $F'(\xi)=0$，即

$$F'(\xi)=\mathrm{e}^{-\lambda\xi}\left[f'(\xi)-\lambda\left[f(\xi)-\xi\right]-1\right]=0.$$

从而即有 $f'(\xi)-\lambda\left[f(\xi)-\xi\right]=1$.

九、(本题满分 9 分)

同试卷一第十题.

十、(本题满分 7 分)

设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，E 为 n 阶单位矩阵. 已知矩阵 $B=\lambda E+A^TA$，试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 B 为正定矩阵.

解. 因为 $B^T=(\lambda E+A^TA)^T=\lambda E+A^TA=B$，所以 B 是 n 阶实对称阵．对任意的非零向量 x，有 $x^Tx>0$ 和 $(Ax)^TAx\geqslant 0$．从而当 $\lambda>0$ 时，

$$x^TBx=x^T(\lambda E+A^TA)x=\lambda x^Tx+(Ax)^TAx>0,$$

所以 B 是正定矩阵.

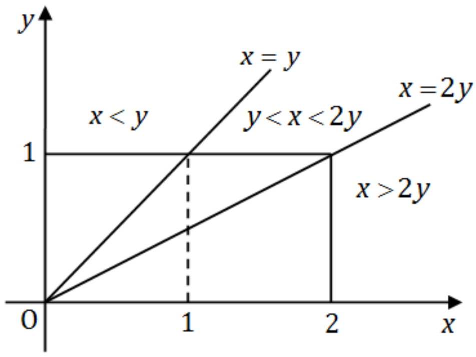
十一、（本题满分 9 分）

假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)\,|\,0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布．记

$$U=\begin{cases}0, & X\leqslant Y;\\ 1, & X>Y.\end{cases}\quad V=\begin{cases}0, & X\leqslant 2Y;\\ 1, & X>2Y.\end{cases}$$

(Ⅰ) 求 U 和 V 的联合分布； (Ⅱ) 求 U 和 V 的相关系数 r.

解. (Ⅰ) 如图，由题知 $P\{X\leqslant Y\}=\frac{1}{4}$，$P\{X>2Y\}=\frac{1}{2}$，$P\{Y<X\leqslant 2Y\}=\frac{1}{4}$.



(U,V) 有四个可能值：$(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$.

$$P\{U=0,V=0\}=P\{X\leqslant Y,X\leqslant 2Y\}=P\{X\leqslant Y\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=0,V=1\}=P\{X\leqslant Y,X>2Y\}=P\{\emptyset\}=0,$$

$$P\{U=1,V=0\}=P\{X>Y,X\leqslant 2Y\}=P\{Y<X\leqslant 2Y\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X>Y,X>2Y\}=P\{X>2Y\}=\frac{1}{2}.$$

(Ⅱ) 由根据边缘概率的定义有

$$P\{U=0\}=P\{U=0,V=0\}+P\{U=0,V=1\}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4},$$

$$P\{U=1\}=P\{U=1,V=0\}+P\{U=1,V=1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4},$$

$$P\{V=0\}=P\{U=0,V=0\}+P\{U=1,V=0\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$P\{V=1\}=P\{U=0,V=1\}+P\{U=1,V=1\}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

而随机变量 UV 的概率分布为

$$P\{UV=0\}=P\{U=0,V=0\}+P\{U=0,V=1\}+P\{U=1,V=0\}=\frac{1}{2},$$

$$P\{UV=1\}=P\{U=1,V=1\}=\frac{1}{2}.$$

于是有

$$EU=\frac{3}{4},\quad EU^2=\frac{3}{4},\quad DU=EU^2-(EU)^2=\frac{3}{16};$$
$$EV=\frac{1}{2},\quad EV^2=\frac{1}{2},\quad DV=EV^2-(EV)^2=\frac{1}{4};$$
$$E(UV)=\frac{1}{2},\quad \mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-EU\cdot EV=\frac{1}{8}.$$

故 U 和 V 的相关系数 $r(U,V)=\dfrac{\mathrm{Cov}(U,V)}{\sqrt{DU}\sqrt{DV}}=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

十二、(本题满分 7 分)

设 $X_1,X_2,\ldots,X_9$ 是来自正态总体 X 的简单随机样本，$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\cdots+X_6)$，$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)$，$S^2=\frac{1}{2}\sum\limits_{i=7}^{9}(X_i-Y_2)^2$，$Z=\dfrac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}$，证明统计量 Z 服从自由度为 2 的 t 分布.

解. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $X_1,\cdots,X_9\sim N(u,\sigma^2)$. 从而

$$Y_1=\frac{1}{6}(X_1+X_2+\ldots+X_6)\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{6}\right),$$
$$Y_2=\frac{1}{3}(X_7+X_8+X_9)\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{3}\right).$$

又由于 Y_1,Y_2 相互独立，且都服从正态分布，故 $Y_1-Y_2\sim N\left(0,\frac{\sigma^2}{2}\right)$. 标准化得

$$U=\frac{Y_1-Y_2-0}{\sigma/\sqrt{2}}\sim N(0,1).$$

由正态总体样本方差的性质得

$$\chi^2=\frac{2S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(2).$$

由于样本方差与样本均值独立，所以 Y_2 与 S^2 独立. 而 Y_1 也与 S^2 独立，故 $U=\dfrac{Y_1-Y_2-0}{\sigma/\sqrt{2}}$ 与 $\dfrac{2S^2}{\sigma^2}$ 独立. 所以由 t 分布的定义有

$$Z=\frac{\sqrt{2}(Y_1-Y_2)}{S}=\frac{\dfrac{Y_1-Y_2-0}{\sigma/\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{2S^2}{\sigma^2}/2}}=\frac{U}{\sqrt{\chi^2/2}}\sim t(2).$$

一九九九年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设函数 $f(x)=a^x$（$a>0, a\neq 1$），则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{2}\ln a$.

2. 设 $f(x)=\mathrm{e}^x yz^2$，其中 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+xyz=0$ 确定的隐函数，则 $f_x'(0,1,-1)=$ ________.

解. 应填 1.

3. 同试卷三第一 [3] 题.

4. 已知 $AB-B=A$，其中 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则 $A=$ ________.

解. 应填 $\begin{pmatrix}1&1/2&0\\-1/2&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$.

5. 设 X 服从参数为 λ 的泊松分布，且已知 $E[(X-1)(X-2)]=1$，则 $\lambda=$ ________.

解. 应填 1.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷一第二 [1] 题.

2. 同试卷三第二 [2] 题.

3. 同试卷三第二 [3] 题.

4. 设随机变量 X 和 Y 的方差存在且不等于 0，则 $D(X+Y)=DX+DY$ 是 X 和 Y $\cdots\cdots$ (　　)

(A) 不相关的充分条件，但不是必要条件.

(B) 独立的必要条件，但不是充分条件.

(C) 不相关的充要条件.

(D) 独立的充要条件.

解. 应选 (C).

5. 设 X 服从指数分布，则 $Y=\min\{X,2\}$ 的分布函数 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 是连续函数. (B) 至少有两个间断点.

(C) 是阶梯函数. (D) 恰有一个间断点.

解. 应选 (D).

三、（本题满分 6 分）

同试卷三第三题.

四、（本题满分 7 分）

同试卷三第四题.

五、（本题满分 6 分）

同试卷三第五题.

六、（本题满分 6 分）

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知 $F(0)=1$，$F(x)>0$，试求 $f(x)$.

解. $f(x)=\dfrac{xe^{x/2}}{2(1+x)^{3/2}}$.

七、（本题满分 6 分）

已知 $f(x)$ 连续，$\displaystyle\int_0^x tf(x-t)\,dt=1-\cos x$，求 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ 的值.

解. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=1$.

八、（本题满分 6 分）

证明：当 $0<x<\pi$ 时，有 $\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$.

解. 设 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\pi}$，则有

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi},\quad f''(x)=-\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}<0.$$

因此函数 $f(x)$ 对应的曲线在 $(0,\pi)$ 内是上凸的．由于 $f(0)=f(\pi)=0$，可见当 $0<x<\pi$ 时，有 $f(x)>0$，即 $\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$.

九、（本题满分 7 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$，问：当 k 为何值时，存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵？并求出 P 和相应的对角矩阵.

解. 当 $k=0$ 时，令 $P=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

十、（本题满分 9 分）

已知线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ ax_1+bx_2+cx_3=0,\\ a^2x_1+b^2x_2+c^2x_3=0.\end{cases}$

(I) 当 a,b,c 满足何种关系时，方程组仅有零解？

(II) 当 a,b,c 满足何种关系时，方程组有无穷多组解，并用基础解系表示全部解.

解. 系数行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ a^2 & b^2 & c^2\end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(a-c)$.

(I) 当 $a\neq b$ 且 $b\neq c$ 且 $c\neq a$ 时，$D\neq 0$，方程组仅有零解.

(II) 当 $a=b$ 或 $b=c$ 或 $c=a$ 时，方程组有无穷多组解. 下面分四种情况:

(i) 当 $a=b\neq c$ 时，方程组的全部解为 $k_1(1,-1,0)^T$，其中 k_1 为任意常数.

(ii) 当 $a=c\neq b$ 时，方程组的全部解为 $k_2(1,0,-1)^T$，其中 k_2 为任意常数.

(iii) 当 $b=c\neq a$ 时，方程组的全部解为 $k_3(0,1,-1)^T$，其中 k_3 为任意常数.

(iv) 当 $a=b\neq c$ 时，方程组的全部解为 $k_4(-1,1,0)^T+k_5(-1,0,,1)^T$，其中 k_4，k_5 为任意常数.

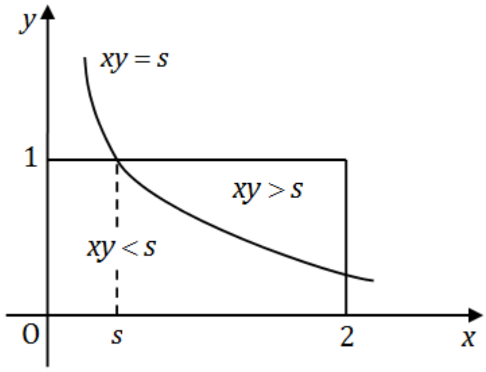
十一、（本题满分 9 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在矩形 $G=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布，试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f(s)$.

解. 二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$\phi(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 若(x,y)\in G;\\ 0, & 若(x,y)\notin G.\end{cases}$$

设 $F(s)=P\{S\leqslant s\}$ 为 S 的分布函数, 则当 $s\leqslant 0$ 时, $F(s)=0$; 当 $s\geqslant 2$ 时, $F(s)=1$.



现设 $0<s<2$，曲线 $xy=s$ 与矩形 G 的上边交于点 $(s,1)$，于是

$$F(s)=P\{S\leqslant s\}=P\{XY\leqslant s\}=1-P\{XY>s\}=1-\iint_{xy>s}\frac{1}{2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_s^2\mathrm{d}x\int_{\frac{s}{x}}^1\mathrm{d}y=\frac{s}{2}(1+\ln 2-\ln s).$$

因此 $f(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\ln 2-\ln s), & 0<s<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

十二、（本题满分 8 分）

已知随机变量 X_1 和 X_2 的概率分布为

X_1	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

，

X_2	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

，

且 $P\{X_1X_2=0\}=1$.

(Ⅰ) 求 X_1 和 X_2 的联合分布；

(Ⅱ) 问 X_1 和 X_2 是否独立？为什么？

解. (Ⅰ) X_1 和 X_2 的联合分布为

X_1 \ X_2	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
0	0	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{4}$	0

.

(Ⅱ) X_1 和 X_2 不独立.

二〇〇〇年考研数学试卷三解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设 $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+g\left(\frac{x}{y}\right)$，其中 f,g 均可微，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

解. 应填 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$. 根据复合函数的求导公式，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right).$$

2. $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}=$ ________.

解. 应填 $\frac{\pi}{4e}$. 作换元 $u=\mathrm{e}^x$，则有

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2-x}}=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^2}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^2+\mathrm{e}^{2x}}$$
$$=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{e}^2+u^2}=\left[\frac{1}{\mathrm{e}}\arctan\frac{u}{\mathrm{e}}\right]_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\frac{1}{\mathrm{e}}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4\mathrm{e}}.$$

3. 若四阶矩阵 A 与 B 相似，矩阵 A 的特征值为 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$，则行列式 $\left|B^{-1}-E\right|=$ ________.

解. 应填 24. 由 A 与 B 相似知 B 的特征值也是 $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5}$. 从而 B^{-1} 有特征值 $2,3,4,5$，$B^{-1}-E$ 有特征值 $1,2,3,4$. 由矩阵的行列式等于其特征值的乘积知

$$\left|B^{-1}-E\right|=\prod_{i=1}^{4}\lambda_i=1\cdot2\cdot3\cdot4=24.$$

4. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}1/3, & x\in[0,1];\\ 2/9, & x\in[3,6];\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 若 k 使得 $P\{X\geqslant k\}=\frac{2}{3}$，则 k 的取值范围是 ________.

解. 应填 $[1,3]$. 这是因为，当 $1\leqslant k\leqslant3$ 时，

$$P\{X\geqslant k\}=\int_k^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_3^6\frac{2}{9}\mathrm{d}x=\frac{2}{9}\times(6-3)=\frac{2}{3}.$$

5. 假设随机变量 X 在区间 $[-1,2]$ 上服从均匀分布，随机变量 $Y=\begin{cases}1, & \text{若 } X>0;\\ 0, & \text{若 } X=0;\\ -1, & \text{若 } X<0.\end{cases}$ 则方差 $D(Y)=$ ________.

解. 应填 $\frac{8}{9}$. 由于题中 Y 是离散型随机变量,

$$P\{Y=-1\}=P\{X<0\}=\frac{0-(-1)}{3}=\frac{1}{3},$$
$$P\{Y=0\}=P\{X=0\}=0,$$
$$P\{Y=1\}=P\{X>0\}=\frac{2-0}{3}=\frac{2}{3}.$$

因此 $E(Y)=-1\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, $E(Y^2)=(-1)^2\times\frac{1}{3}+1^2\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$, 所以 $D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设对任意的 x,总有 $\varphi(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[g(x)-\varphi(x)\right]=0$,则 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$(　)

(A) 存在且一定等于零.　　(B) 存在但不一定等于零.

(C) 一定不存在.　　(D) 不一定存在.

解. 应选 (D). 用排除法. 首先设 $\frac{x^2}{x^2+2}\leqslant f(x)\leqslant\frac{x^2+1}{x^2+2}$, 满足条件

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2+2}-\frac{x^2}{x^2+2}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+2}=0,\qquad \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+2}=1,\ \frac{x^2}{x^2+2}=1.$$

由夹逼准则知, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, 则选项 (A) 和 (C) 错误. 其次设 $\frac{x^6+x^2}{x^4+1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{x^6+2x^2}{x^4+1}$, 满足条件

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^6+2x^2}{x^4+1}-\frac{x^6+x^2}{x^4+1}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^4+1}=0$$

但是由于 $f(x)\geqslant\frac{x^6+x^2}{x^4+1}=x^2$, 有 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, 极限不存在, 故选项 (B) 也是错误的.

2. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处可导, 则函数 $|f(x)|$ 在点 $x=a$ 处不可导的充分条件是…………………………………………………………(　)

(A) $f(a)=0$ 且 $f'(a)=0$.　　(B) $f(a)=0$ 且 $f'(a)\neq0$.

(C) $f(a)>0$ 且 $f'(a)>0$.　　(D) $f(a)<0$ 且 $f'(a)<0$.

解. 应选 (B). 这是因为由 (B) 的条件 $f(a)=0$, 则有

$$\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|-|f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)|}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{|f(x)-f(a)|}{x-a},$$

所以

$$\lim_{x\to a^+}\frac{|f(x)-f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|=|f'(a)|,$$
$$\lim_{x\to a^-}\frac{|f(x)-f(a)|}{x-a}=\lim_{x\to a^-}\left(-\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right|\right)=-|f'(a)|.$$

可见，$|f(x)|$ 在 $x=a$ 处可导的充要条件是 $|f'(a)|=-|f'(a)|$，所以 $|f'(a)|=0$，即$f'(a)=0$．所以当 $f'(a)\neq 0$ 时必不可导，故选 (B)．

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是四元非齐次线性方程组 $AX=b$ 的三个解向量，且秩 $r(A)=3$，$\alpha_1=(1,2,3,4)^T$，$\alpha_2+\alpha_3=(0,1,2,3)^T$，$c$ 表示任意常数，则线性方程组 $AX=b$ 的通解 $X=$……………………………………………………（ ）

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$. (B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$. (C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$. (D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$.

解. 应选 (C)．因为 $\alpha_1=(1,2,3,4)^T$ 是非齐次方程组的解向量所以我们有 $A\alpha_1=b$，故 α_1 是 $AX=b$ 的一个特解．又 $r(A)=3,n=4$（未知量的个数），故 $AX=b$ 的基础解系由一个非零解组成．即基础解系的个数为 1．因为 $A(2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3))=2b-b-b=0$，故

$$2\alpha_1-(\alpha_1+\alpha_2)=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$$

是对应齐次方程组的基础解系，故 $AX=b$ 的通解为

$$c\,(2\alpha_1-(\alpha_2+\alpha_3))+\alpha_1=c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}.$$

4. 设 A 为 n 阶实矩阵，A^T 是 A 的转置矩阵，则对于线性方程组 (Ⅰ)：$AX=0$ 和 (Ⅱ)：$A^TAX=0$，必有……………………………………………（ ）

(A) (Ⅱ) 的解是 (Ⅰ) 的解，(Ⅰ) 的解也是 (Ⅱ) 的解.

(B) (Ⅱ) 的解是 (Ⅰ) 的解，但 (Ⅰ) 的解不是 (Ⅱ) 的解..

(C) (Ⅰ) 的解不是 (Ⅱ) 的解，(Ⅱ) 的解也不是 (Ⅰ) 的解..

(D) (Ⅰ) 的解是 (Ⅱ) 的解，但 (Ⅱ) 的解不是 (Ⅰ) 的解.

解. 应选 (A). 若 α 是方程组 (Ⅰ): $AX=0$ 的解, 即 $A\alpha=0$, 两边左乘 A^T, 得 $A^TA\alpha=0$, 即 α 也是方程组 (Ⅱ)：$A^TAX=0$ 的解，即 (Ⅰ) 的解也是 (Ⅱ) 的解.

若 β 是方程组 (Ⅱ)：$A^TAX=0$ 的解，即 $A^TA\beta=0$，两边左乘 β^T 得 $\beta^TA^TA\beta=(A\beta)^TA\beta=0$. $A\beta$ 是一个向量，设 $A\beta=[b_1,b_2,\cdots b]^T$，则

$$(A\beta)^TA\beta=\sum_{i=1}^n b_i^2=0.$$

故有 $b_i=0$，$i=1,2,\cdots n$．从而有 $A\beta=0$，即 β 也是方程组 (Ⅰ)：$AX=0$ 的解.

5. 在电炉上安装了 4 个温控器，其显示温度的误差是随机的．在使用过程中，只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0，电炉就断电．以 E 表示事件“电炉断电”，而 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，则事件 E 等于事件……（ ）

(A) $\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$.　　(B) $\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$.　　(C) $\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$.　　(D) $\{T_{(4)} \geqslant t_0\}$.

解. 应选 (C)．随机变量 $T_{(1)}, T_{(2)}, T_{(3)}, T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值，事件 E 表示事件“电炉断电”，即有两个温控器显示的温度不低于 t_0，此时必定两个显示较高的温度大于等于 t_0，即 $T_{(4)} \geqslant T_{(3)} \geqslant t_0$. 所以说断电事件就是 $\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$.

三、（本题满分 6 分）

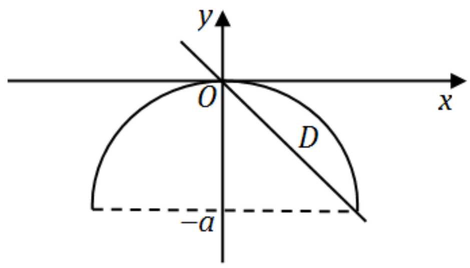
求微分方程 $y''-2y'-e^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=0, y'(0)=1$.

解. 本题对应的齐次微分方程的特征方程为 $r^2-2r=0$，特征根为 $r_1=0, r_2=2$．于是齐次方程的通解为 $Y=C_1+C_2e^{2x}$．由于 $\lambda=2$ 是特征方程的单根，所以设 $y^*=Axe^{2x}$，代入原方程，得 $A=\frac{1}{2}$．故得特解 $y^*=\frac{1}{2}xe^{2x}$，非齐次方程的通解为 $y=Y+y^*=C_1+C_2e^{2x}+\frac{1}{2}xe^{2x}$．再由初始条件 $y(0)=1$ 和 $y'(0)=1$ 得 $C_1=\frac{3}{4}, C_2=\frac{1}{4}$，则满足初始条件的通解为 $y=\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}x\right)e^{2x}$.

四、（本题满分 6 分）

计算二重积分 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,d\sigma$，其中 D 是由曲线 $y=-a+\sqrt{a^2-x^2}(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 围成的区域.

解. 画出积分区域 D 如下图．采用极坐标更为方便.



在极坐标系下区域 $D=\left\{(\rho,\theta)\,\middle|\, -\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant 0, 0\leqslant\rho\leqslant -2a\sin\theta\right\}$，则有

$$I=\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\,d\sigma=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{\rho^2}{\sqrt{4a^2-\rho^2}}\,d\rho.$$

令 $\rho=2a\sin t$，则有

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-\theta}4a^2\sin^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}d\theta\int_0^{-\theta}2a^2(1-\cos 2t)\,dt$$

$$=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta=a^2\left(\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\right).$$

五、（本题满分 6 分）

假设某企业在两个相互分割的市场上出售同一种产品，两个市场的需求函数分别是

$$P_1=18-Q_1, P_2=12-Q_2,$$

其中 P_1 和 P_2 分别表示该产品在两个市场的价格 (单位：万元/吨)，Q_1 和 Q_2 分别表示该产品在两个市场的销售量 (即需求量，单位：吨)，并且该企业生产这种产品的总成本函数是 $C=2Q+5$，其中 Q 表示该产品在两个市场的销售总量，即 $Q=Q_1+Q_2$.

(I) 如果该企业实行价格差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量和价格，使该企业获得最大利润；

(II) 如果该企业实行价格无差别策略，试确定两个市场上该产品的销售量及其统一的价格，使该企业的总利润最大化；并比较两种价格策略下的总利润大小.

解. (I) 记总利润函数为 L，总收益函数为 R，则总利润

$$L=R-C=P_1Q_1+P_2Q_2-(2Q+5)=-2Q_1^2-Q_2^2+16Q_1+10Q_2-5.$$

其中，$Q_1>0, Q_2>0$. 令

$$\frac{\partial L}{\partial Q_1}=-4Q_1+16=0, \frac{\partial L}{\partial Q_2}=-2Q_2+10=0,$$

解得 $Q_1=4, Q_2=5$；相应地 $P_1=10, P_2=7$. 在 $Q_1>0, Q_2>0$ 的范围内驻点唯一，且实际问题在 $Q_1>0, Q_2>0$ 范围内必有最大值，故在 $Q_1=4, Q_2=5$ 处有最大利润 $L=-2\times 4^2-5^2+16\times 4+10\times 5-5=52$（万元）.

(II) 若两地的销售单价无差别，即 $P_1=P_2$，于是得 $2Q_1-Q_2=6$，在此约束条件下求 L 的最值. 构造拉格朗日函数

$$F(Q_1,Q_2,\lambda)=-2Q_1^2-Q_2^2+16Q_1+10Q_2-5+\lambda(2Q_1-Q_2-6),$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial Q_1}=-4Q_1+16+2\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial Q_2}=-2Q_2+10-\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=2Q_1-Q_2-6=0\end{cases}$$

解得 $Q_1=5, Q_2=4$，在 $Q_1>0, Q_2>0$ 的范围内驻点唯一，且实际问题在 $Q_1>0, Q_2>0$ 范围内必有最大值，故在 $Q_1=4, Q_2=5$ 处有最大利润 $L=-2\times 5^2-4^2+16\times 5+10\times 4-5=49$（万元）.

六、（本题满分 7 分）

求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值，并求该函数图形的渐近线.

解. 对 x 求导得 $y'=\dfrac{x^2+x}{x^2+1}e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$. 令 $y'=0$，得驻点 $x_1=0, x_2=-1$. 列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-2e^{\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	$-e^{\frac{\pi}{2}}$	$\nearrow$

由此可见，严格单调增区间为 $(-\infty,-1)$ 与 $(0,+\infty)$；严格单调减区间为 $(-1,0)$. $f(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$ 为极小值，$f(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$ 为极大值. 以下求渐近线:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}=e^{\pi}\lim_{x\to\infty}(x-1)=\infty$$

所以此函数无水平渐近线；同理，也没有铅直渐近线. 令

$$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=e^{\pi}, b_1=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-a_1x]=-2e^{\pi};$$

$$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1, b_2=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-a_2x]=-2.$$

所以，渐近线为 $y=a_1x+b_1=e^{\pi}(x-2)$ 及 $y=a_2x+b_2=x-2$，共两条.

七、（本题满分 6 分）

设 $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\,dx, n=0,1,2,\cdots$，求 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}I_n$.

解. 因为

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\,d(\sin x)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}.$$

考虑幂级数 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，因为

$$\rho=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

所以幂级数的收敛半径 $R=\dfrac{1}{\rho}=1$. 在 $(-1,1)$ 内有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

所以

$$S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)\,dx=0+\int_0^x\frac{1}{1-x}\,dx=-\ln|1-x|.$$

以 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(-1,1)$ 代入，得

$$S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\ln\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\ln(2+\sqrt{2}),$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n=\ln(2+\sqrt{2})$.

八、（本题满分 6 分）

同试卷一第九题.

九、（本题满分 8 分）

设向量组 $\alpha_1=(a,2,10)^T$，$\alpha_2=(-2,1,5)^T$，$\alpha_3=(-1,1,4)^T,\beta=(1,b,c)^T$．试问 a,b,c 满足什么条件时，

(Ⅰ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示唯一？

(Ⅱ) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示？

(Ⅲ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示不唯一？并求出一般表达式.

解. 设方程组 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\beta$．该方程组的系数行列式

$$|A|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=\begin{vmatrix}a&-2&-1\\2&1&1\\10&5&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&-2&-1\\2&1&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=-a-4.$$

(Ⅰ) 当 $a\neq-4$ 时，$|A|\neq0$，方程组有唯一解，β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示唯一.

(Ⅱ) 当 $a=-4$ 时，对增广矩阵作初等行变换，得

$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta\right)=\begin{pmatrix}-4&-2&1&1\\2&1&1&b\\10&5&4&c\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}2&1&0&-b-1\\0&0&1&2b+1\\0&0&0&c-3b+1\end{pmatrix}$$

因此当 $a=-4$ 且 $c-3b+1\neq0$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=2\neq r\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta\right)=3$，方程组无解，$\beta$ 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(Ⅲ) 当 $a=-4$ 且 $c-3b+1=0$ 时，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=r\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta\right)=2$，方程组有无穷多解，其通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\-(b+1)\\2b+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\-2k-b-1\\2b+1\end{pmatrix}$，其中 k 是任意常数．从而 $\beta=k\alpha_1+(-2k-b-1)\alpha_2+(2b+1)\alpha_3$，$k$ 是任意常数.

十、（本题满分 9 分）

设有 n 元实二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2,$$

其中 $a_i=(i=1,2,\cdots,n)$ 为实数. 试问：当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 满足何种条件时，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为正定二次型?

解. 由题设条件知，对于任意的 $x_1,x_2,\cdots x_n$ 均有 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)\geqslant 0$，其中等号成立当且仅当

$$\begin{cases} x_1+a_1x_2=0, \\ x_2+a_2x_3=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1}+a_{n-1}x_n=0, \\ x_n+a_nx_1=0. \end{cases}$$

此方程组仅有零解的充分必要条件是其系数行列式

$$|B|=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+(-1)^{n+1}a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

所以当 $a_1\cdot a_2\cdots a_n\neq(-1)^n$ 时，对任意的非零向量 $X=(x_1,x_2,\cdots x_n)\neq 0$，方程组中总有一个方程不为零，则有

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=(x_1+a_1x_2)^2+(x_2+a_2x_3)^2+\cdots+(x_{n-1}+a_{n-1}x_n)^2+(x_n+a_nx_1)^2>0$$

此时二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是正定二次型.

十一、(本题满分 8 分)

假设 0.50，1.25，0.80，2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值. 已知 $Y=\ln X$ 服从正态分布 $N(\mu,1)$.

(I) 求 X 的数学期望 EX(记 EX 为 b);

(II) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间;

(III) 利用上述结果求 b 的置信度为 0.95 的置信区间.

解. (I) 由正态分布密度函数的定义知，Y 的概率密度为

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2}},-\infty<y<+\infty,$$

于是数学期望

$$b=E(X)=E(e^Y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^y\cdot e^{\frac{-(y-\mu)^2}{2}}\,dy$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t+\mu}\cdot e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt=e^{\mu+\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(t-1)^2}\,dt=e^{\mu+\frac{1}{2}}.$$

(II) 当置信度 $1-\alpha=0.95$ 时，$\alpha=0.05$．查表可知标准正态分布的双侧分位数等于 1.96．故由 $\overline{Y}\sim N\left(\mu,\frac{1}{4}\right)$，其中 $\overline{Y}$ 表示总体 Y 的样本均值,

$$\overline{Y}=\frac{1}{4}(\ln 0.50+\ln 0.80+\ln 1.25+\ln 2.00)=\frac{1}{4}\ln 1=0.$$

所以参数 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{Y}-1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}},\overline{Y}+1.96\times\frac{1}{\sqrt{4}}\right)=(-0.98,0.98).$$

(III) 由指数函数 e^x 的严格单调递增性，有

$$\begin{aligned}P\{-0.98<\mu<0.98\}&=P\left\{-0.48<\mu+\frac{1}{2}<1.48\right\}\\&=P\left\{\mathrm{e}^{-0.48}<\mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}}<\mathrm{e}^{1.48}\right\}=P\left\{\mathrm{e}^{-0.48}<b<\mathrm{e}^{1.48}\right\}=0.95.\end{aligned}$$

因此 b 的置信度为 0.95 的置信区间为 $\left(\mathrm{e}^{-0.48},\mathrm{e}^{1.48}\right)$.

十二、（本题满分 8 分）

设 A,B 是二随机事件；随机变量

$$X=\begin{cases}1, & 若 A 出现\\-1, & 若 A 不出现\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & 若 B 出现\\-1, & 若 B 不出现\end{cases}$$

试证明随机变量 X 和 Y 不相关的充分必要条件是 A 与 B 相互独立.

解. $E(X)=1\cdot P\{A\}+(-1)\cdot P\left\{\overline{A}\right\}=2P\{A\}-1$，同理可得 $E(Y)=2P\{B\}-1$．现在求 $E(XY)$，由于 XY 只有两个可能值 1 和 -1，所以

$$E(XY)=1\cdot P\{XY=1\}+(-1)\cdot P\{XY=-1\},$$

其中

$$\begin{aligned}P\{XY=1\}&=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=-1,Y=-1\}\\&=P\{AB\}+P\left\{\overline{AB}\right\}=2P\{AB\}-P\{A\}-P\{B\}+1,\\P\{XY=-1\}&=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=-1,Y=1\}\\&=P\left\{A\overline{B}\right\}+P\left\{\overline{A}B\right\}=P\{A\}+P\{B\}-2P\{AB\}.\end{aligned}$$

所以

$$E(XY)=P\{XY=1\}-P\{XY=-1\}=4P\{AB\}-2P\{A\}-2P\{B\}+1.$$

由协方差公式,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(XY)&=E(XY)-E(X)E(Y)\\&=4P\{AB\}-2P\{A\}-2P\{B\}+1-[2P\{A\}-1]\cdot[2P\{B\}-1]\\&=4[P\{AB\}-P\{A\}P\{B\}].\end{aligned}$$

因此，$\mathrm{Cov}(XY)=0$ 当且仅当 $P\{AB\}=P\{A\}P\{B\}$，即 X 和 Y 不相关的充分必要条件是 A 与 B 相互独立.

二〇〇〇年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$ ________.

解. 应填 $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$.

2. 若 $a>0$, $b>0$ 均为常数，则 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{3}{x}} =$ ________.

解. 应填 $(ab)^{\frac{3}{2}}$.

3. 设 $\alpha=(1,0,-1)^T$，矩阵 $A=\alpha\alpha^T$，n 为正整数，则 $|kE-A^n|=$ ________.

解. 应填 $k^2(k-2^n)$.

4. 已知 4 阶矩阵 A 相似于 B，A 的特征值为 $2,3,4,5$，E 为 4 阶单位矩阵，则行列式 $|B-E|=$ ________.

解. 应填 24. 由 A 与 B 相似知 B 的特征值也是 $2,3,4,5$. 从而 $B-E$ 有特征值 $1,2,3,4$. 由矩阵的行列式等于其特征值的乘积知

$$|B-E|=\prod_{i=1}^{4}\lambda_i=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24.$$

5. 同试卷三第一 [5] 题.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 同试卷三第二 [1] 题.

2. 同试卷三第二 [2] 题.

3. 同试卷三第二 [3] 题.

4. 设 A, B, C 三个事件两两独立，则 A, B, C 相互独立的充分必要条件是 $\cdots\cdots$ (　　)

(A) A 与 BC 独立.　　　(B) AB 与 $A\cup C$ 独立.

(C) AB 与 AC 独立.　　　(D) $A\cup B$ 与 $A\cup C$ 独立.

解. 应选 (A). 由于在 A, B, C 三个事件两两独立的前提下，A, B, C 相互独立的充要条件是 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，即 $P(A\cdot BC)=P(A)P(BC)$，故选 (A).

5. 同试卷三第二 [5] 题.

三、（本题满分 6 分）

已知 $z=u^{v}$, $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$, $v=\arctan\frac{y}{x}$，求 $\mathrm{d}z$.

解. $\mathrm{d}z=\frac{u^{v}}{x^2+y^2}\Big[\Big(\frac{xv}{u}-y\ln u\Big)\mathrm{d}x+\Big(\frac{yv}{u}+x\ln u\Big)\mathrm{d}y\Big]$.

四、（本题满分 6 分）

计算 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{1+x}+\mathrm{e}^{3-x}}$.

解. 由换元积分法，可得 $I=\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-2}$.

五、（本题满分 6 分）

同试卷三第五题.

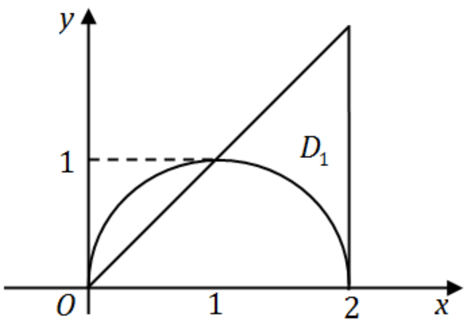
六、（本题满分 7 分）

同试卷三第六题.

七、（本题满分 6 分）

设 $f(x,y)=\begin{cases}x^2y, & 1\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant x;\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$ 求 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\geqslant 2x\}$

解. 如图，记 $D_1=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 2, \sqrt{2x-x^2}\leqslant y\leqslant x\}$.



则有 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_1}x^2y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{49}{20}$.

八、（本题满分 6 分）

同试卷一第九题.

九、（本题满分 8 分）

同试卷三第九题.

十、（本题满分 9 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ x & 4 & y\\ -3 & -3 & 5\end{pmatrix}$，已知 A 有三个线性无关的特征向量，$\lambda=2$ 是 A 的二重特征值．试求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角形矩阵．

解． $P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$．

十一、（本题满分 8 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)=\frac{1}{2}[\phi_1(x,y)+\phi_2(x,y)]$，其中 $\phi_1(x,y)$ 和 $\phi_2(x,y)$ 都是二维正态密度函数，且它们对应的二维随机变量的相关系数分别为 $\frac{1}{3}$ 和 $-\frac{1}{3}$，它们的边缘密度对应的随机变量的数学期望都是 0，方差都是 1．

(Ⅰ) 求随机变量 X 和 Y 的密度函数 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$．

(Ⅱ) 求 X 和 Y 的相关系数 ρ．

(Ⅲ) 问 X 和 Y 是否独立？为什么？

解． (Ⅰ) 密度函数 $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$．$f_2(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$．

(Ⅱ) 相关系数 $\rho=0$．

(Ⅲ) X 和 Y 不独立．

十二、（本题满分 8 分）

同试卷三第十二题．

二〇〇一年考研数学试卷三解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设生产函数为 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中 Q 是产出量，L 是劳动投入量，K 是资本投入量，而 A,α,β 均为大于零的参数，则当 $Q=1$ 时 K 关于 L 的弹性为 ________.

解. 应填 $-\frac{\alpha}{\beta}$. 当 $Q=1$ 时，有 $AL^{\alpha}K^{\beta}=1$，两边取对数再对 L 求导得

$$\frac{\alpha}{L}+\frac{\beta}{K}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}L}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{EK}{EL}=\frac{L}{K}\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}L}=-\frac{\alpha}{\beta}.$$

2. 某公司每年的工资总额比上一年增加 20% 的基础上再追加 2 百万．若以 W_t 表示第 t 年的工资总额（单位：百万元），则 W_t 满足的差分方程是 ________.

解. 应填 $1.2W_{t-1}+2$. 由差分的定义可得 W_t 满足的差分方程是:

$$W_t=(1+20\%)W_{t-1}+2=1.2W_{t-1}+2.$$

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k\end{pmatrix}$，且秩 $r(A)=3$，则 $k=$ ________.

解. 应填 -3. 对 A 进行初等变换得

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1\\ 1-k & k-1 & 0 & 0\\ 1-k & 0 & k-1 & 0\\ 1-k & 0 & 0 & k-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} k+3 & 1 & 1 & 1\\ 0 & k-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & k-1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & k-1\end{pmatrix}.$$

可见只有当 $k=-3$ 时，秩 $r(A)=3$.

4. 设随机变量 X,Y 的数学期望分别为 -2 和 2，方差分别为 1 和 4，而相关系数为 -0.5. 则根据切比雪夫不等式 $P\{|X+Y|\geqslant 6\}\leqslant$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{12}$. 先求出随机变量 $X+Y$ 的期望和方差:

$$E(X+Y)=EX+EY=-2+2=0,$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\rho(X,Y)\sqrt{DX}\sqrt{DY}=(-0.5)\times\sqrt{1}\times\sqrt{4}=-1,$$

$$D(X+Y)=DX+2\mathrm{Cov}(X,Y)+DY=1+2\times(-1)+4=3.$$

所以由切比雪夫不等式:

$$P\{|X+Y|\geqslant 6\}=P\{|X+Y-E(X+Y)|\geqslant 6\}\leqslant\frac{D(X+Y)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

5. 设总体 X 服从正态分布 $N(0,0.2^2)$，而 $X_1,X_2,\cdots X_{15}$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则随机变量 $Y=\dfrac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}$ 服从 ________ 分布，参数为 ________.

解. 应填 F 和 $(10,5)$. 因为 $X_i\sim N(0,2^2)$，所以 $\dfrac{X_i}{2}\sim N(0,1)$. 从而根据卡方分布的定义有

$$U=\left(\frac{X_1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{10}}{2}\right)^2\sim\chi^2(10),$$
$$V=\left(\frac{X_{11}}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{X_{15}}{2}\right)^2\sim\chi^2(5).$$

由样本的独立性可知，U 与 V 相互独立. 根据 F 分布的定义

$$Y=\frac{X_1^2+\cdots+X_{10}^2}{2(X_{11}^2+\cdots+X_{15}^2)}=\frac{U/10}{V/5}\sim F(10,5).$$

故 Y 服从第一个自由度为 10，第二个自由度为 5 的 F 分布.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 设函数 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a,f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解. 应选 (B). 由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$ 知

$$\lim_{x\to a}f'(x)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}\cdot(x-a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}(x-a)=-1\cdot 0=0.$$

又函数 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，根据连续的定义有 $f'(a)=0$，于是有

$$f''(a)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1,$$

即 $f'(a)=0$，$f''(a)=-1<0$，根据极值的第二充分条件知 $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点，因此正确选项为 (B).

2. 设函数 $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$，其中 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(x^2+1), & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{3}(x-1), & 1\leqslant x\leqslant 2.\end{cases}$ 则 $g(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 无界.　　(B) 递减.　　(C) 不连续.　　(D) 连续.

解. 应选 (D). 因为 $f(x)$ 在区间 $(0,2)$ 内只有有限个（一个）第一类的间断点，且是有界的，由变限积分的性质可知 $g(x)=\displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$ 在区间 $(0,2)$ 内是连续函数.

3. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$, $P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 A 可逆，则 B^{-1} 等于$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $A^{-1}P_1P_2$. (B) $P_1A^{-1}P_2$. (C) $P_1P_2A^{-1}$. (D) $P_2A^{-1}P_1$.

解. 应选 (C). 由所给矩阵观察，将 A 的 2,3 列互换，再将 A 的 1,4 列互换，可得 B. 因此 $B=AE_{23}E_{14}=AP_2P_1$， 从而

$$B^{-1}=P_1^{-1}P_2^{-1}A^{-1}=P_1P_2A^{-1}.$$

4. 设 A 是 n 阶矩阵，α 是 n 维列向量. 若秩 $r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=r(A)$，则线性方程组( )

(A) $AX=\alpha$ 必有无穷多解. (B) $AX=\alpha$ 必有惟一解.

(C) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$ 仅有零解. (D) $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解.

解. 应选 (D). 由题设，$r\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}=r(A)\leqslant n\leqslant n+1$，即系数矩阵 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}$ 非满秩，可知齐次线性方程组 $\begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ y \end{pmatrix}=0$ 必有非零解.

5. 同试卷一第二 [5] 题.

三、(本题满分 5 分)

设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定：$e^{xy}-xy=2$ 和 $e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\,dt$，求 $\frac{du}{dx}$.

解. 在 $e^{xy}-xy=2$ 两边分别对 x 求导得

$$e^{xy}(y+x\frac{dy}{dx})-(y+x\frac{dy}{dx})=0, \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

在 $e^x=\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\,dt$ 两边分别对 x 求导得

$$e^x=\frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot(1-\frac{dz}{dx}), \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}=1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}.$$

根据复合函数求导公式有

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\partial f}{\partial y}+\left(1-\frac{\mathrm{e}^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

四、（本题满分 6 分）

已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=\mathrm{e},\quad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)],$$

求 c 的值.

解. 首先求所给等式左侧极限（$c=0$ 时结论同样成立）

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2c}{x-c}\right)^x=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2cx}{x-c}\right)=\mathrm{e}^{2c}.$$

其次由拉格朗日中值定理，有 $x-1<\xi<x$ 使得

$$f(x)-f(x-1)=f'(\xi)[x-(x-1)]=f'(\xi).$$

左右两边同时求极限，得到

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to\infty}f'(\xi)=\mathrm{e}.$$

由题设等式，可得 $\mathrm{e}^{2c}=\mathrm{e}$，故 $c=\frac{1}{2}$.

五、（本题满分 6 分）

求二重积分 $\iint_D y[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的值，其中 D 是由直线 $y=x$，$y=-1$ 及 $x=1$ 围成的平面区域.

解. 积分区域可以写成 $-1\leqslant y\leqslant 1, y\leqslant x\leqslant 1$.

$$\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_y^1 y\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}y(1-y)\mathrm{d}y=-\frac{2}{3};$$

$$\iint_D xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}y\,\mathrm{d}y\int_y^1 x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}y(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1+y^2)}-\mathrm{e}^{y^2})\mathrm{d}y=0.$$

于是原积分

$$\iint_D y[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_D xy\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}.$$

六、（本题满分 7 分）

已知抛物线 $y=px^2+qx$（其中 $p<0,q>0$）在第一象限与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S.

(I) 问 p 和 q 为何值时，S 达到最大？ (II) 求出此最大值.

解. 依题意知，抛物线与 x 轴交点的横坐标为 $x_1=0, x_2=-\frac{q}{p}$. 根据定积分的定义，面积 S 为

$$S=\int_0^{-\frac{q}{p}}\left(px^2+qx\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2\right]_0^{-\frac{q}{p}}=\frac{q^3}{6p^2}.$$

因直线 $x+y=5$ 与抛物线 $y=px^2+qx$ 相切，故它们有唯一公共点. 由方程组

$$\begin{cases} x+y=5 \\ y=px^2+qx \end{cases}$$

得 $px^2+(q+1)x-5=0$. 因为其公共解唯一，其判别式必为零，即

$$\Delta=(q+1)^2-4\times p\times(-5)=(q+1)^2+20p=0.$$

解得 $p=-\frac{1}{20}(q+1)^2$. 将 p 代入 S 中得

$$S(q)=\frac{q^3}{6p^2}=\frac{200q^3}{3(q+1)^4}.$$

根据函数除法的求导公式，

$$S'(q)=\frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5}.$$

令 $S'(q)=0$，已知有 $q>0$，得唯一驻点 $q=3$. 当 $1<q<3$ 时，$S'(q)>0$；当 $q>3$ 时，$S'(q)<0$. 于是当 $q=3$ 时，$S(q)$ 取唯一极大值，即最大值. 从而最大值为 $S=S(3)=\frac{225}{32}$.

七、（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{3}}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$（$k>1$）. 证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

解. 由 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x(k>1)$ 及积分中值定理，存在 $\eta\in\left(0,\frac{1}{k}\right)\subset[0,1]$ 使

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$$

令 $F(x)=xe^{-x}f(x)$，则由上式可得

$$F(1)=e^{-1}f(1)=e^{-1}\eta e^{1-\eta}f(\eta)=\eta e^{-\eta}f(\eta)=F(\eta)$$

那么 $F(x)$ 在 $[\eta,1]$ 上连续，在 $(\eta,1)$ 内可导，由罗尔中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(\eta,1)\subset[0,1]$，使得

$$F'(\xi)=e^{-\xi}f(\xi)+\xi e^{-\xi}f'(\xi)=0,$$

即 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

八、（本题满分 7 分）

已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$（$n$ 为正整数）且 $f_n(1)=\frac{\mathrm{e}}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和.

解. 由已知条件 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}\mathrm{e}^x$，得其通解为

$$f_n(x)=\mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\left(\int x^{n-1}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^x\left(\frac{x^n}{n}+C\right),$$

由条件 $f_n(1)=\frac{e}{n}$，得 $C=0$，故 $f_n(x)=\frac{x^n\mathrm{e}^x}{n}$. 从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n\mathrm{e}^x}{n}=\mathrm{e}^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，则其收敛半径为 $R=1$，收敛域为 $[-1,1)$. 当 $x\in(-1,1)$ 时，有

$$S'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$$

$$\Rightarrow S(x)=S(0)+\int_0^x S'(x)\mathrm{d}x=0+\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\ln(1-x).$$

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-\ln 2$. 级数在此点处收敛，而右边函数连续，因此成立的范围可扩大到 $x=-1$ 处，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\quad x\in[-1,1)$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=-\mathrm{e}^x\ln(1-x),\quad x\in[-1,1).$$

九、（本题满分 9 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. 已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一，试求：(I) a 的值；(II) 正交矩阵 Q，使 Q^TAQ 为对角矩阵.

解. (I) 对线性方程组 $Ax=\beta$ 的增广矩阵作初等行变换，得

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&-(a-1)(a+2)&-(a+2)\end{pmatrix}.$$

因为方程组 $AX=\beta$ 有解但不唯一，所以 $r(A)=r(\overline{A})<n=3$，故 $a=-2$.

(II) 由 (I) 有 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. 由

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & 2\\ -1 & \lambda+2 & -1\\ 2 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-3)=0.$$

可得 A 的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=3,\lambda_3=-3$. 当 $\lambda_1=0$ 时，解得对应的特征向量为 $\xi_1=(1,1,1)^T$. 当 $\lambda_1=3$ 时，解得对应的特征向量为 $\xi_2=(1,0,-1)^T$. 当 $\lambda_1=-3$ 时，解得对应的特征向量为 $\xi_3=(-1,2,-1)^T$. 将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化得

$$\beta_1=\frac{\xi_1}{\|\xi_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\frac{\xi_2}{\|\xi_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\beta_3=\frac{\xi_3}{\|\xi_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

记它们组成的矩阵为

$$Q=[\beta_1,\beta_2,\beta_3]=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

则有 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

十、(本题满分 8 分)

设 A 为 n 阶实对称矩阵，秩 $r(A)=n$，A_{ij} 是 $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$，二次型 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{A}x_ix_j$.

(I) 记 $A=(x_1,x_2,\cdots x_n)$，把 $f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{A}x_ix_j$ 写成矩阵形式，并证明二次型 $f(X)$ 的矩阵为 A^{-1};

(II) 二次型 $g(X)=X^TAX$ 与 $f(X)$ 的规范形是否相同? 说明理由.

解. (I) 由题设条件，A 是可逆的实对称矩阵，故 $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$，因此由实对称的定义知，$A^{-1}$ 也是实对称矩阵，又由伴随矩阵的性质 $A^*A=|A|E$，知 $A^*=|A|A^{-1}$，因此 A^* 也是实对称矩阵，$(A^*)^T=A^*$，故有

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{A_{ij}}{|A|}x_ix_j=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}A_{12}\cdots A_{1n}\\ A_{21}A_{22}\cdots A_{2n}\\ \cdots\\ A_{n1}A_{n2}\cdots A_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=X^T\frac{(A^*)^T}{|A|}X=X^T\frac{A^*}{|A|}X=X^TA^{-1}X.$$

(II) 因为 $\left(A^{-1}\right)^T AA^{-1}=\left(A^T\right)^{-1}E=A^{-1}$，所以由合同的定义知 A 与 A^{-1} 合同．因此可知，$g(X)=X^TAX$ 与 $f(X)$ 有相同的规范形.

十一、（本题满分 8 分）

生产线生产的产品成箱包装，每箱的重量是随机的，假设每箱平均重 50 千克，标准差为 5 千克．若用最大载重量为 5 吨的汽车承运，试利用中心极限定理说明每辆车最多可以装多少箱，才能保障不超载的概率大于 0.977（$\Phi(2)=0.977$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布函数）.

解. 设 X_i（$i=1,2,\cdots n$）是装运的第 i 箱的重量（单位：千克），n 是所求箱数．由题设，可以将 $X_1,X_i,\cdots,X_n$ 视为独立同分布的随机变量，而 n 箱产品的总重量 $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$ 是独立同分布随机变量之和．由条件有 $E(X_i)=50$，$\sqrt{D(X_i)}=5$，所以

$$E(S_n)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=EX_1+EX_2+\cdots+EX_n=50n,$$

$$D(S_n)=D(X_1+X_2+\cdots+X_n)=DX_1+DX_2+\cdots+DX_n=25n.$$

则根据列维—林德柏格中心极限定理, 知 S_n 近似服从正态分布 $N(50n,25n)$, 箱数 n 决定于条件

$$P\{S_n\leqslant 5000\}=P\left\{\frac{S_n-50n}{5\sqrt{n}}\leqslant\frac{5000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{1000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977=\Phi(2).$$

由此得 $\dfrac{1000-10n}{\sqrt{n}}>2$，从而 $n<98.0199$，即最多可以装 98 箱.

十二、（本题满分 8 分）

设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 3,1\leqslant y\leqslant 3\}$ 上的均匀分布，试求随机变量 $U=|X-Y|$ 的概率密度 $p(u)$.

解. 由题设条件 X 和 Y 是正方形 $G=\{(x,y)|1\leqslant x\leqslant 3,1\leqslant y\leqslant 3\}$ 上的均匀分布，则 X 和 Y 的联合密度为:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1\leqslant x\leqslant 3,1\leqslant y\leqslant 3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由分布函数的定义：$F(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{|X-Y|\leqslant u\}$．当 $u<0$ 时，$F(u)=0$ 当 $u\geqslant 2$ 时，$F(u)=1$．当 $0\leqslant u<2$ 时，

$$F(u)=P\{U\leqslant u\}=P\{|X-Y|\leqslant u\}=\frac{1}{4}\left[4-(2-u)^2\right]=1-\frac{1}{4}(2-u)^2.$$

于是随机变量 U 的概率密度为:

$$p(u)=F'(u)=\begin{cases}\frac{1}{2}(2-u), & 0<u<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

二〇〇一年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷三第一 [1] 题.

2. 设 $z=\mathrm{e}^{-x}-f(x-2y)$，且当 $y=0$ 时，$z=x^2$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________.

解. 应填 $2(x-2y)-\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{2y-x}$.

3. 设行列式 $D=\begin{vmatrix}3&0&4&0\\2&2&2&2\\0&-7&0&0\\5&3&-2&2\end{vmatrix}$，则第 4 行各元素余子式之和的值为 ________.

解. 应填 -28.

4. 同试卷三第一 [3] 题.

5. 同试卷三第一 [4] 题.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷三第二 [1] 题.

2. 同试卷三第二 [2] 题.

3. 同试卷三第二 [3] 题.

4. 对于任意二事件 A 和 B，与 $A\cup B=B$ 不等价的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $A\subset B$.　(B) $\bar{B}\subset\bar{A}$.　(C) $A\bar{B}=\emptyset$.　(D) $\bar{A}B=\emptyset$.

解. 应选 (D).

5. 同试卷一第二 [5] 题.

三、（本题满分 5 分）

同试卷三第三题.

四、（本题满分 6 分）

同试卷三第四题.

五、（本题满分 6 分）

同试卷三第五题.

六、（本题满分 7 分）

某商品进价为 a（元/件），根据以往经验，当销售价为 b（元/件）时，销售量为 c 件（a,b,c 均为正常数，且 $b\geqslant\frac{4}{3}a$）. 市场调查表明，销售价每下降 10%，销售量可增加 40%. 现决定一次性降价，试问，当销售价定为多少时，可获得最大利润？并求出最大利润.

解. 设 p 表示降价后的销售价，x 为增加的销售量. 则有

$$p=b-\frac{b}{4c}x,\quad L(x)=\left(b-\frac{b}{4c}x-a\right)(c+x).$$

求得定价为 $p=b-\left(\frac{3}{8}b-\frac{1}{2}a\right)=\frac{5}{8}b+\frac{1}{2}a$ 时，得最大利润 $L=\frac{c}{16b}(5b-4a)^2$（元）.

七、（本题满分 6 分）

设 $f(x)$ 在区间 $[0.1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=3\int_0^{1/3}\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)\,\mathrm{d}x$. 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

解. 令 $F(x)=\mathrm{e}^{1-x^2}f(x)$，则由积分中值定理可知，存在 $\eta\in(0,1/3)$，使得 $F(1)=F(\eta)$. 再由罗尔定理可知，存在 $\xi\in(\eta,1)$，使得 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

八、（本题满分 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，$f(1)=\frac{5}{2}$，且对所有 $x,t\in(0,+\infty)$，满足条件

$$\int_1^{xt}f(u)\,\mathrm{d}u=t\int_1^{x}f(u)\,\mathrm{d}u+x\int_1^{t}f(u)\,\mathrm{d}u.$$

求 $f(x)$.

解. $f(x)=\frac{5}{2}(\ln x+1)$.

九、（本题满分 9 分）

同试卷三第九题.

十、（本题满分 8 分）

设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})^T$（$i=1,2,\cdots,r$；$r<n$）是 n 维实向量，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关. 已知 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\\ a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rn}x_n=0,\end{cases}$$

的非零解向量．试判断向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 的线性相关性.

解. 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性无关.

十一、(本题满分 8 分)

同试卷三第十一题.

十二、(本题满分 8 分)

设随机变量 X 和 Y 的联合分布在以点 $(0,1)$,$(1,0)$,$(1,1)$ 为顶点的三角形区域上服从均匀分布，试求随机变量 $U=X+Y$ 的方差.

解. $DU=D(X+Y)=\frac{1}{18}$.

二〇〇二年考研数学试卷三解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

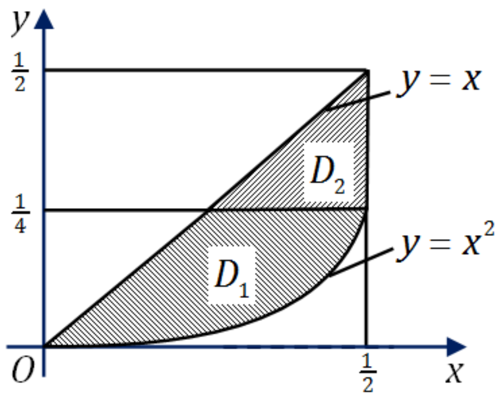
1. 设常数 $a\neq\frac{1}{2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{1-2a}$. 通过凑成重要极限形式来求极限，

$$\lim_{n\to\infty}\ln\left[\frac{n-2na+1}{n(1-2a)}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)\cdot\frac{1}{1-2a}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-2a}\ln\left[1+\frac{1}{n(1-2a)}\right]^{n(1-2a)}=\frac{1}{1-2a}\ln e=\frac{1}{1-2a}.$$

2. 交换积分次序：$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x=$ ________.

解. 应填 $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$. 画出与原题中二次积分的积分区域 D_1 与 D_2，将它们的并集记为 D.



于是交换积分次序之后得到

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{y}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\frac{1}{2}}f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

3. 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}$，三维列向量 $\alpha=(a,1,1)^T$. 已知 $A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $a=$ ________.

解. 应填 -1. 由于 $A\alpha$ 与 α 线性相关，所以存在 $k\neq 0$，使得 $A\alpha=k\alpha$，即

$$A\alpha=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\3&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\2a+3\\3a+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka\\k\\k\end{pmatrix}=k\alpha.$$

解得 $k=1$，$a=-1$.

4. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X^2 和 Y^2 的协方差 $\mathrm{Cov}(X^2,Y^2)=$ ________.

解. 应填 -0.02. 事实上，X^2，Y^2 和 X^2Y^2 都是 $0-1$ 分布，而且

$$P\left\{X^2=0\right\}=P\{X=0\}=0.4,$$

$$P\left\{X^2=0\right\}=P\{X=0\}=0.4.$$

$$P\left\{Y^2=0\right\}=P\{Y=0\}=0.5,$$

$$P\left\{Y^2=1\right\}=P\{Y=-1\}+P\{Y=1\}=0.15+0.35=0.5.$$

同理可求得 X^2Y^2 的分布律为

X^2Y^2	0	1
P	0.72	0.28

所以得到

$$E(X^2)=0.5,\quad E(Y^2)=0.60,\quad E(X^2Y^2)=0.28.$$

$$\mathrm{Cov}(X^2,Y^2)=E(X^2Y^2)-E(X^2)E(Y^2)=0.28-0.6\times 0.5=-0.02.$$

5. 设总体 X 的概率密度为 $f(x;\theta)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-\theta)}, & 若\ x\geqslant\theta,\\ 0, & 若\ x<\theta.\end{cases}$ 而 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则未知参数 θ 的矩估计量为 ________.

解. 应填 $\overline{X}-1$. 总体期望和样本均值分别为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{\theta}^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(x-\theta)}\mathrm{d}x=\theta+1,\quad \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i.$$

用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$，即 $\theta+1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，解得 θ 的矩估计量为

$$\hat{\theta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-1=\overline{X}-1.$$

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在开区间 (a,b) 内可导，则 $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 当 $f(a)f(b)<0$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

(B) 对任何 $\xi\in(a,b)$，有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$.

(C) 当 $f(a)=f(b)$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

(D) 存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

解. 应选 (B)．由于题设条件中并未给明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此零点定理、罗尔定理以及微分中值定理均不成立，故 (A)、(C)、(D) 均被排除．又由题设 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导，所以 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续，因此对 (a,b) 内的任意一点 ξ，必有 $\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$，即有 $\lim\limits_{x\to\xi}[f(x)-f(\xi)]=0$．故选 (B).

2. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ 与 $\frac{1}{3}$，则幂级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}x^n$ 的收敛半径为 $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 5.　　(B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.　　(C) $\frac{1}{3}$.　　(D) $\frac{1}{5}$.

解. 应选 (A)．由题设，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{\sqrt{5}}{3}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|=\frac{1}{3}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2/b_n^2}{a_{n+1}^2/b_{n+1}^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^2/a_{n+1}^2}{b_{n+1}^2/b_{n+1}^2}=\frac{5/3}{1/3}=5,$$

从而所求幂级数的收敛半径为 5.

3. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则线性方程组 $(AB)x=0$ $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 当 $n>m$ 时仅有零解.　　(B) 当 $n>m$ 时必有非零解.

(C) 当 $m>n$ 时仅有零解.　　(D) 当 $m>n$ 时必有非零解.

解. 应选 (D)．A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则 AB 是 m 阶方阵，从而有 $r(AB)\leqslant\min(r(A),r(B))$．当 $m>n$ 时，有

$$r(AB)\leqslant\min(r(A),r(B))\leqslant n<m.$$

因为系数矩阵的秩小于未知数的个数，方程组 $(AB)x=0$ 必有非零解.

4. 设 A 是 n 阶实对称矩阵，P 是 n 阶可逆矩阵，已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则矩阵 $\left(P^{-1}AP\right)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是 $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $P^{-1}\alpha$.　　(B) $P^T\alpha$.　　(C) $P\alpha$.　　(D) $\left(P^{-1}\right)^T\alpha$.

解. 应选 (B)．设 $\left(P^{-1}AP\right)^T=B$，则 $A=P^{T^{-1}}BP^T$．所以由 $A\alpha=(P^{T^{-1}}BP^T)\alpha=\lambda\alpha$ 可得 $B(P^T\alpha)=\lambda P^T\alpha$．因此 $P^T\alpha$ 是 $B=(P^{-1}AP)^T$ 的对应于特征值 λ 的特征向量.

5. 设随机变量 X 和 Y 都服从标准正态分布，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (   )

(A) $X+Y$ 服从正态分布. (B) X^2+Y^2 服从 χ^2 分布.

(C) X^2 和 Y^2 都服从 χ^2 分布. (D) X^2/Y^2 服从 F 分布.

解. 应选 (C). 根据题设条件，X 和 Y 均服从 $N(0,1)$. 故 X^2 和 Y^2 都服从 $\chi^2(1)$ 分布，故选 (C). 题设条件没有 X 与 Y 的相互独立条件. 因此 X^2 与 Y^2 的独立条件不存在，故选项 (B) 和 (D) 项均错误. 题中条件既没有 X 与 Y 独立，也没有 (X,Y) 正态，因此不能推出 $X+Y$ 服从正态分布，故选项 (A) 错误.

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

解. 由等价无穷小量代换和洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{\frac{1}{2}x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\,\mathrm{d}t}{\frac{3}{2}x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(1+x^2)\cdot 2x}{3x}=\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}.$$

四、(本题满分 7 分)

设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=z(x,y)$ 由方程 $x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 所确定，求 $\mathrm{d}u$.

解. 对 $x\mathrm{e}^x-y\mathrm{e}^y=z\mathrm{e}^z$ 两边求全微分得

$$x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x-y\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y-\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y=z\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z+\mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}z=\frac{\mathrm{e}^x(x+1)\mathrm{d}x-\mathrm{e}^y(y+1)\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^z(z+1)}.$$

所以由 $u=f(x,y,z)$ 得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=f_1'\,\mathrm{d}x+f_2'\,\mathrm{d}y+f_3'\,\mathrm{d}z\\&=f_1'\,\mathrm{d}x+f_2'\,\mathrm{d}y+f_3'\times\frac{\mathrm{e}^x(x+1)\mathrm{d}x-\mathrm{e}^y(y+1)\mathrm{d}y}{\mathrm{e}^z(z+1)}\\&=\left[f_1'+f_3'\frac{\mathrm{e}^x(x+1)}{\mathrm{e}^z(z+1)}\right]\mathrm{d}x+\left[f_2'-f_3'\frac{\mathrm{e}^y(y+1)}{\mathrm{e}^z(z+1)}\right]\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

五、(本题满分 6 分)

设 $f(\sin^2 x)=\dfrac{x}{\sin x}$，求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\,\mathrm{d}x$.

解. 令 $u=\sin^2 x$，则有 $\sin x=\sqrt{u}$，$x=\arcsin\sqrt{u}$，于是 $f(u)=\dfrac{\arcsin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}$. 从而

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}f(x)\,\mathrm{d}x&=\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\cdot\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\&=\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{t}{\cos t}2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t\\&=2\int t\sin t\,\mathrm{d}t=2[-t\cos t+\sin t]+C\\&=2\left[-\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x}\right]+C.\end{aligned}$$

六、(本题满分 7 分)

设 D_1 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $x=a$，$x=2$ 及 $y=0$ 所围成的平面区域；D_2 是由抛物线 $y=2x^2$ 和直线 $y=0$，$x=a$ 所围成的平面区域，其中 $0<a<2$.

(I) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1；D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2；

(II) 问当 a 为何值时，V_1+V_2 取得最大值？试求此最大值.

解. (I) 由旋转体的体积公式有

$$V_1=\pi\int_a^2\left(2x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi}{5}(32-a^5),$$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}x^2\,\mathrm{d}y=\pi a^4.$$

(II) $V=V_1+V_2=\dfrac{4\pi}{5}(32-a^5)+\pi a^4$. 令 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}=4\pi a^3(1-a)=0$, 得 $a=1$. 当 $0<a<1$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}>0$，当 $1<a<2$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}a}<0$，因此 $a=1$ 是 V 的唯一极值点且是极大值点，所以是 V 的最大值点，$V_{\max}=\dfrac{129\pi}{5}$.

七、(本题满分 7 分)

同试卷一第七题.

八、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(x)>0$. 利用闭区间上连续函数性质，证明存在一点 $\xi\in[a,b]$，使 $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

解. 因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以存在 x_1x_2 使得

$$f(x_1)=M=\max_{x\in[a,b]}f(x),\quad f(x_2)=m=\min_{x\in[a,b]}f(x).$$

满足 $m\leqslant f(x)\leqslant M$. 又 $g(x)>0$，故根据不等式的性质

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x).$$

根据定积分的不等式性质有

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

$$\Rightarrow m \leqslant \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leqslant M.$$

由连续函数的介值定理知，存在 $\xi \in [a,b]$，使

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

九、（本题满分 8 分）

设齐次线性方程组 $\begin{cases} ax_1+bx_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ bx_1+ax_2+bx_3+\cdots+bx_n=0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ bx_1+bx_2+bx_3+\cdots+ax_n=0, \end{cases}$ 其中 $a\neq 0, b\neq 0, n\geqslant 2$，试讨论 a,b 为何值时，方程组仅有零解、有无穷多组解？在有无穷多组解时，求出全部解，并用基础解系表示全部解.

解. 方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

(I) 当 $a\neq b$ 且 $a\neq -(n-1)b$ 时，$|A|\neq 0$， $r(A)=n$ 方程组只有零解.

(II) 当 $a=b(\neq 0)$ 时，对系数矩阵 A 做行初等变换，有

$$A=\begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ a & a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

方程组的同解方程组为 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，其基础解系为

$$\xi_1=(-1,1,0,\cdots,0)^T, \xi_2=(-1,0,1,0,\cdots,0)^T, \cdots, \xi_{n-1}=(-1,0,\cdots,0,1)^T.$$

方程组的全部解为 $X=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_{n-1}\xi_{n-1}$，其中 $k_i(i=1,2,\cdots n-1)$ 是任意常数.

(III) 当 $a=-(n-1)b(b\neq 0)$ 时，对系数矩阵 A 做行初等变换，有

$$A=\begin{pmatrix} (1-n)b & b & b & \cdots & b \\ b & (1-n)b & b & \cdots & b \\ b & b & (1-n)b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & (1-n)b \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & -n & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & -n \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

秩 $r(A)=n-1$，其同解方程组是

$$\begin{cases} x_1-x_2=0, \\ x_1-x_3=0, \\ \cdots\quad\cdots \\ x_1-x_n=0. \end{cases}$$

其基础解系为 $\xi=(1,1,\cdots,1)^T$，方程组的全部解为 $X=k\xi$，其中 k 是任意常数.

十、(本题满分 8 分)

设 A 为三阶实对称矩阵，且满足条件 $A^2+2A=0$，已知 A 的秩 $r(A)=2$.

(I) 求 A 的全部特征值.

(II) 当 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 E 为三阶单位矩阵.

解. (I) 设 λ 是 A 的特征值，α 是 A 的属于 λ 的特征向量，则有 $A\alpha=\lambda\alpha$，从而

$$0=\left(A^2+2A\right)\alpha=\left(\lambda^2+2\lambda\right)\alpha.$$

所以有 $\lambda^2+2\lambda=0$，故 A 的特征值 λ 的取值范围为 $0,-2$. 因为实对称矩阵必可对角化，$r(A)=2$，所以

$$A\sim\Lambda=\begin{pmatrix} -2 & & \\ & -2 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

即 A 有特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-2,\lambda_3=0$.

(II) 由 (I) 知 $A+kE$ 的特征值为 $k-2,k-2,k$. 矩阵 $A+kE$ 正定的充要条件是它的所有特征值均大于零，即

$$\begin{cases} k-2>0 \\ k>0 \end{cases} \Leftrightarrow k>2.$$

故 $k>2$ 时 $A+kE$ 是正定矩阵.

十一、（本题满分 8 分）

假设随机变量 U 在区间 $[-2,2]$ 上服从均匀分布，随机变量

$$X=\begin{cases} -1, & 若\ U\leqslant -1, \\ 1, & 若\ U>-1; \end{cases} \quad Y=\begin{cases} -1, & 若\ U\leqslant 1, \\ 1, & 若\ U>1; \end{cases}$$

试求：(I) X 和 Y 的联合概率分布； (II) $D(X+Y)$.

解. (I) (X,Y) 只有四个可能值 $(-1,-1)$，$(-1,1)$，$(1,-1)$ 和 $(1,1)$. 依题意有

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{U\leqslant -1,U\leqslant 1\}=P\{U\leqslant -1\}=\frac{1}{4};$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{U\leqslant -1,U>1\}=P\{\emptyset\}=0;$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{U>-1,U\leqslant 1\}=P\{-1<U\leqslant 1\}=\frac{1}{2};$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{U>-1,U>1\}=P\{U>1\}=\frac{1}{4}.$$

于是，(X,Y) 分布为

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$\frac{1}{4}$	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(II) $X+Y$ 的取值可能有 $-2,0,2$；$(X+Y)^2$ 的取值可能有 0 和 4；

$$P\{X+Y=-2\}=P\{X=-1,Y=-1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{X+Y=0\}=P\{X=1,Y=-1\}+P\{X=-1,Y=1\}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{4},$$

$$P\left\{(X+Y)^2=0\right\}=P\{X+Y=0\}=\frac{1}{2},$$

$$P\left\{(X+Y)^2=4\right\}=P\{X+Y=-2\}+P\{X+Y=2\}=\frac{1}{2}$$

故 $X+Y$ 和 $(X+Y)^2$ 的分布律分别为

$(X+Y)^2$	0	4
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$X+Y$	-2	0	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

由此可见

$$E(X+Y)=-\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=0, \quad E(X+Y)^2=\frac{4}{2}=2,$$
$$D(X+Y)=E(X+Y)^2-[E(X+Y)]^2=2.$$

十二、（本题满分 8 分）

假设一设备开机后无故障工作的时间 X 服从指数分布，平均无故障工作的时间 $E(X)$ 为 5 小时．设备定时开机，出现故障时自动关机，而在无故障的情况下工作 2 小时便关机．试求该设备每次开机无故障工作的时间 Y 的分布函数 $F(y)$.

解. 指数分布的 X 的分布参数为 $\lambda=\frac{1}{E(X)}=\frac{1}{5}$，其密度函数为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

由分布函数的定义，

$$F(y)=P\left\{Y\leqslant y\right\}=P\left\{\min(X,2)\leqslant y\right\}.$$

当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$．当 $y\geqslant 2$ 时，$F_Y(y)=1$．当 $0\leqslant y<2$ 时，

$$\begin{aligned}F(y)&=P\left\{\min(X,2)\leqslant y\right\}=P\left\{X\leqslant y\right\}\\&=\int_{-\infty}^{y}f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^y\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}x}\,\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}y}.\end{aligned}$$

所以 Y 的分布函数

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}y}, & 0\leqslant y<2;\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$$

二〇〇二年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分）

1. 同试卷三第一 [1] 题.

2. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\ln^2 x$，则 $\int x f'(x)\,\mathrm{d}x=$ ________.

解. 应填 $2\ln x-\ln^2 x+C$.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$，$B=A^2-3A+2E$，则 $B^{-1}=$ ________.

解. 应填 $\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$.

4. 设向量组 $\alpha_1=(a,0,c),\alpha_2=(b,c,0),\alpha_3=(0,a,b)$ 线性无关，则 a,b,c 必满足关系式 ________.

解. 应填 $abc\neq 0$.

5. 设随机变量 X 和 Y 的联合概率分布为

X \ Y	-1	0	1
0	0.07	0.18	0.15
1	0.08	0.32	0.20

则 X 和 Y 的相关系数 $\rho=$.

解. 应填 0.

二、选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）

1. 同试卷三第二 [1] 题.

2. 同试卷二第二 [2] 题.

3. 设 A,B 为 n 阶矩阵，A^*,B^* 分别为 A,B 对应的伴随矩阵，分块矩阵 $C=\begin{pmatrix}A&O\\O&B\end{pmatrix}$，则 C 的伴随矩阵 $C^*=$ $\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\begin{pmatrix}|A|A^*&O\\O&|B|B^*\end{pmatrix}$.　　(B) $\begin{pmatrix}|B|B^*&O\\O&|A|A^*\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}|A|B^*&O\\O&|B|A^*\end{pmatrix}$.　　(D) $\begin{pmatrix}|B|A^*&O\\O&|A|B^*\end{pmatrix}$.

解. 应选 (D).

4. 同试卷一第二 [5] 题.

5. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$，则根据列维—林德伯格 (Levy-Lindberg) 中心极限定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $\cdots\cdots$ ( )

(A) 有相同的数学期望. (B) 有相同的方差.

(C) 服从同一指数分布. (D) 服从同一离散型分布.

解. 应选 (C).

三、（本题满分 5 分）

同试卷三第三题.

四、（本题满分 7 分）

同试卷三第四题.

五、（本题满分 6 分）

同试卷三第五题.

六、（本题满分 7 分）

设闭区域 $D: x^2 + y^2 \leqslant y, x \geqslant 0$；$f(x, y)$ 为 D 上的连续函数，且

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{\pi}{8} \iint f(u, v) \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v,$$

求 $f(x, y)$.

解. $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - \frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

七、（本题满分 7 分）

设某商品需求量 Q 是价格 p 的单调减少函数：$Q = Q(p)$，其需求弹性 $\eta = \frac{2p^2}{192 - p^2} > 0$.

(I) 设 R 为总收益函数，证明 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p} = Q(1 - \eta)$.

(II) 求 $p = 6$ 时，总收益对价格的弹性，并说明其经济意义.

解. (I) $R(p) = pQ(p)$，上式两边对 p 求导数得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p} = Q + p\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p} = Q\left(1 + \frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\right) = Q(1 - \eta).$$

(II) $\left.\dfrac{ER}{Ep}\right|_{p=6}=\dfrac{7}{13}\approx 0.54$. 经济意义：当 $p=6$ 时，若价格上涨 1%，则总收益将增加 0.54%.

八、（本题满分 6 分）

同试卷三第八题.

九、（本题满分 8 分）

设四元齐次线性方程组①为 $\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\ x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$，且已知另一四元齐次线性方程组②的一个基础解系为 $\alpha_1=(2,-1,a+2,1)^T$, $\alpha_2=(-1,2,4,a+8)^T$.

(I) 求方程组①的一个基础解系；

(II) 当 a 为何值时，方程组①与②有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解.

解. (I) 方程组①的一个基础解系为 $\beta_1=(5,-3,1,0)^T$, $\beta_2=(-3,2,0,1)^T$.

(II) 当 $a=-1$ 时，方程组①与②有非零公共解

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\7\end{pmatrix},$$

其中 k_1, k_2 为任意常数.

十、（本题满分 8 分）

设实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&1\\1&a&-1\\1&-1&a\end{pmatrix}$，求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并计算行列式 $|A-E|$ 的值.

解. $|A-E|=a^2(a-3)$.

十一、（本题满分 8 分）

设 A、B 是任意二事件，其中 A 的概率不等于 0 和 1，证明：$P(B|A)=P(B|\bar{A})$ 是事件 A 与 B 独立的充分必要条件.

解. 条件 $P(B|A)=P(B|\bar{A})$ 等价于

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\bar{A}B)}{P(\bar{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)},$$

即等价于条件 $P(AB)=P(A)P(B)$.

十二、（本题满分 8 分）

同试卷三第十二题.

二〇〇三年考研数学试卷三解答

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}, & 若\ x\neq 0, \\ 0, & 若\ x=0, \end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续，则 λ 的取值范围是 ________.

解. 应填 $\lambda>2$．事实上，因 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，故 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)$，因此 $f'(0)$ 与 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 存在．由

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\lambda}\cos\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x},$$

易知当且仅在 $\lambda>1$ 时 $f'(0)$ 存在且等于 0．而由

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(\lambda x^{\lambda-1}\cos\frac{1}{x}+x^{\lambda-2}\sin\frac{1}{x}\right),$$

易知当且仅在 $\lambda>2$ 时 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 存在且等于 0．故要使 $f'(x)=0$ 在 $x=0$ 处连续，λ 的取值范围是 $\lambda>2$.

2. 已知曲线 $y=x^3-3a^2x+b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2=$ ________.

解. 应填 $4a^6$．设曲线与 x 轴相切的切点为 $(x_0,0)$，则有

$$\begin{cases} y(x_0)=0, \\ y'(x_0)=0. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} x_0^3-3a^2x_0+b=0, \\ 3x_0^2-3a^2=0. \end{cases}$$

于是有 $x_0^2=a^2$，$b=x_0(x_0^2-3a^2)$．所以

$$b^2=x_0^2(3a^2-x_0^2)^2=a^2\cdot 4a^4=4a^6.$$

3. 设 $a>0$，$f(x)=g(x)=\begin{cases} a, & 若\ 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$ 而 D 表示全平面，则 $I=\iint_D f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ________.

解. 应填 a^2．因为被积函数 $f(x)g(y-x)$ 当 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y-x\leqslant 1$ 时才不为零，故

$$I=\iint_D f(x)g(y-x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant 1\\ 0\leqslant y-x\leqslant 1}} a^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=a^2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{x+1}\mathrm{d}y$$

$$=a^2\int_0^1[(x+1)-x]\,\mathrm{d}x=a^2.$$

4. 设 n 维向量 $\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T, a<0$；$E$ 为 n 阶单位矩阵，矩阵 $A=E-\alpha\alpha^T$，$B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$，其中 A 的逆矩阵为 B，则 $a=$ ________.

解. 应填 -1. 由于 A 的逆矩阵为 B，故

$$E=AB=(E-\alpha\alpha^T)\left(E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T\right)=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha\alpha^T\cdot\alpha\alpha^T$$
$$=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-\frac{1}{a}\alpha(\alpha^T\alpha)\alpha^T=E-\alpha\alpha^T+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T-2a\alpha\alpha^T$$
$$=E+\left(-1-2a+\frac{1}{a}\right)\alpha\alpha^T.$$

于是有 $-1-2a+\frac{1}{a}=0$，即 $2a^2+a-1=0$，解得 $a=\frac{1}{2},a=-1$. 已知 $a<0$，故 $a=-1$.

5. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9，若 $Z=X-0.4$，则 Y 与 Z 的相关系数为 ________.

解. 应填 0.9. 由方差的性质可得 $D(Z)=D(X-0.4)=D(X)$，由协方差的性质可得 $\mathrm{Cov}(Y,Z)=\mathrm{Cov}(Y,X-0.4)=\mathrm{Cov}(Y,X)=\mathrm{Cov}(X,Y)$，所以

$$\rho_{YZ}=\frac{\mathrm{Cov}(Y,Z)}{\sqrt{D(Y)}\sqrt{D(Z)}}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho_{XY}=0.9.$$

6. 设总体 X 服从参数为 2 的指数分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则当 $n\to\infty$ 时，$Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 ________.

解. 应填 $\frac{1}{2}$. 本题中 $X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$ 满足大数定律的条件，且

$$E(X_i^2)=DX_i+(EX_i)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

因此根据大数定律有 $Y_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 依概率收敛于 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left(X_i^2\right)=\frac{1}{2}$.

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 设 $f(x)$ 为不恒等于零的奇函数，且 $f'(0)$ 存在，则函数 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ $\cdots\cdots$ (　)

(A) 在 $x=0$ 处左极限不存在.　　(B) 有跳跃间断点 $x=0$.

(C) 在 $x=0$ 处右极限不存在.　　(D) 有可去间断点 $x=0$.

解. 应选 (D). 取 $f(x)=x$，此时 $g(x)=\frac{x}{x}=\begin{cases}1, & x\neq 0;\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 可排除 (A)，(B)，(C) 三项.

下面证明 (D) 是正确的：由 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，知 $g(x)$ 在 $x=0$ 处没定义，故 $x=0$ 为 $g(x)$ 的间断点. 由 $f(x)$ 为奇函数知 $f(0)=0$，从而

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0),$$

故 $x=0$ 为可去间断点.

2. 设可微函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极小值，则下列结论正确的是 $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数等于零.

(B) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数大于零.

(C) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数小于零.

(D) $f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 处的导数不存在.

解. 应选 (A). 由 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，知它在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数都存在，又由二元函数极值的必要条件即得 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的两个偏导数都等于零. 从而有

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(x_0,y)}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}=0.$$

3. 设 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$，$q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$，$n=1,2,\cdots$，则下列命题正确的是 $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 都收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 敛散性都不定.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 敛散性都不定.

解. 应选 (B). 由 $p_n=\dfrac{a_n+|a_n|}{2}$，$q_n=\dfrac{a_n-|a_n|}{2}$，知 $0\leqslant p_n\leqslant|a_n|$，$0\leqslant -q_n\leqslant|a_n|$. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛. 再由比较判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-q_n)$ 都收敛；后者与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 仅差一个系数，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q_n$ 也收敛.

4. 设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&b&b\\b&a&b\\b&b&a\end{pmatrix}$，若 A 的伴随矩阵的秩为 1，则必有 $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $a=b$ 或 $a+2b=0$.　　(B) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$.

(C) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$.　　(D) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$.

解. 应选 (C). A 与其伴随矩阵 A^* 秩之间有关系

$$r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n;\\1, & r(A)=n-1;\\0, & r(A)<n-1.\end{cases}$$

因此可得 $r(A)=2$．它的秩小于它的列数或者行数，故有 $|A|=0$，即

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix}$$

$$=(a+2b)\begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}=(a+2b)(a-b)^2=0,$$

即有 $a+2b=0$ 或 $a=b$．当 $a=b$ 时，

$$A=\begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} b & b & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

显然 $r(A)=1\neq 2$，故必有 $a\neq b$ 且 $a+2b=0$．

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维向量，下列结论不正确的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 若对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s\neq 0$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关.

(B) 若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则对于任意一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的充分必要条件是此向量组的秩为 s.

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关的必要条件是其中任意两个向量线性无关.

解. 应选 (B)．若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则存在一组（而不是对任意一组）不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$.

6. 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正、反面各出现一次$\}$，$A_4=\{$正面出现两次$\}$，则事件 (　　)

(A) A_1,A_2,A_3 相互独立.　　(B) A_2,A_3,A_4 相互独立.

(C) A_1,A_2,A_3 两两独立.　　(D) A_2,A_3,A_4 两两独立.

解. 应选 (C)．因为

$$P\{A_1\}=\frac{1}{2},\quad P\{A_2\}=\frac{1}{2},\quad P\{A_3\}=\frac{1}{2},\quad P\{A_4\}=\frac{1}{4}.$$

$$P\{A_1A_2\}=\frac{1}{4},P\{A_1A_3\}=\frac{1}{4},P\{A_2A_3\}=\frac{1}{4},P\{A_2A_4\}=\frac{1}{4},P\{A_1A_2A_3\}=0.$$

可见 A_1,A_2,A_3 两两独立但不相互独立；A_2,A_3,A_4 不两两独立更不相互独立.

三、（本题满分 8 分）

设 $f(x)=\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)},x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right)$，试补充定义 $f(1)$ 使得 $f(x)$ 在 $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 上连续.

解. 令 $u=1-x$，则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)}\right]=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)\sin\pi x}\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to0^+}\frac{\pi u-\sin\pi(1-u)}{\pi u\sin\pi(1-u)}=\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to0^+}\frac{\pi u-\sin\pi u}{\pi u\cdot\sin\pi u}\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to0^+}\frac{\pi u-\sin\pi u}{\pi^2u^2}=\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi u}{2\pi^2u}\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{u\to0^+}\frac{\pi^2\sin\pi u}{2\pi^2}=\frac{1}{\pi}+0=\frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

因此定义 $f(1)=\frac{1}{\pi}$，就可以使得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

四、（本题满分 8 分）

设 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且满足 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=1$，又 $g(x,y)=f[xy,\frac{1}{2}(x^2-y^2)]$，求 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解. 由复合函数的求导法则得

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y\frac{\partial f}{\partial u}+x\frac{\partial f}{\partial v},\qquad \frac{\partial g}{\partial y}=x\frac{\partial f}{\partial u}-y\frac{\partial f}{\partial v}.$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}&=y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot y+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot x\right]+\frac{\partial f}{\partial v}+x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot y+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot x\right]\\&=y^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+x^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial f}{\partial v},\\\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}&=x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot x-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot y\right]-\frac{\partial f}{\partial v}-y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\cdot x-\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot y\right]\\&=x^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-2xy\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}+y^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}-\frac{\partial f}{\partial v}.\end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right)=x^2+y^2.$$

五、（本题满分 8 分）

计算二重积分

$$I=\iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

其中积分区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant\pi\}$.

解. 作极坐标变换：设 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$，有

$$I=\iint_D e^{-(x^2+y^2-\pi)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy=e^{\pi}\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\sin(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$=\mathrm{e}^{\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2}\sin r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=\frac{\mathrm{e}^{\pi}}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-r^2}\sin r^2\,\mathrm{d}(r^2)$$

$$=\pi\mathrm{e}^{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t.$$

记 $A=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$，则

$$A=\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t=-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}(\cos t)=-\left[\mathrm{e}^{-t}\cos t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\cos t\,\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{e}^{-\pi}+1-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}(\sin t)=\mathrm{e}^{-\pi}+1-\left[\mathrm{e}^{-t}\sin t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\pi}+1-A.$$

因此 $A=\frac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-\pi})$，$I=\frac{\pi\mathrm{e}^{\pi}}{2}(1+\mathrm{e}^{-\pi})=\frac{\pi}{2}(1+\mathrm{e}^{\pi})$.

六、（本题满分 9 分）

求幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$（$|x|<1$）的和函数 $f(x)$ 及其极值.

解. 对和函数 $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$ 求导，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=-x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=-x\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\frac{-x}{1+x^2}.$$

对上式两边从 0 到 x 积分，得

$$f(x)=f(0)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)=1-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\qquad(|x|<1).$$

对 $f(x)$ 求一阶导数，并令

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{1+x^2}=\frac{-x}{1+x^2}=0,$$

求得唯一驻点 $x=0$. 由于

$$f''(x)=-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},\quad\Rightarrow\quad f''(0)=-1<0.$$

由极值的第二充分条件，得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值，且极大值为 $f(0)=1$.

七、（本题满分 9 分）

设 $F(x)=f(x)g(x)$，其中函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足以下条件：$f'(x)=g(x)$，$g'(x)=f(x)$，且 $f(0)=0$，$f(x)+g(x)=2\mathrm{e}^x$.

(I) 求 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程；

(II) 求出 $F(x)$ 的表达式.

解. (I) 由 $F(x)=f(x)g(x)$，有

$$F'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=g^2(x)+f^2(x)$$

$$=[f(x)+g(x)]^2-2f(x)g(x)=(2\mathrm{e}^x)^2-2F(x).$$

可见 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程为 $F'(x)+2F(x)=4\mathrm{e}^{2x}$，相应的初始条件为 $F(0)=f(0)g(0)=0$.

(II) 解 $F(x)$ 所满足的一阶微分方程，得通解为

$$F(x)=\mathrm{e}^{-\int 2\,\mathrm{d}x}\left[\int 4\mathrm{e}^{2x}\cdot \mathrm{e}^{\int 2\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-2x}\left[\int 4\mathrm{e}^{4x}\,\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^{-2x}.$$

将 $F(0)=0$ 代入上式，得 $C=-1$. 所以 $F(x)=\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}$.

八、（本题满分 8 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内可导，且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$. 试证：必存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

解. 因为 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，则在 $[0,2]$ 上必有最大值 M 和最小值 m，于是

$$m\leqslant f(0)\leqslant M,\quad m\leqslant f(1)\leqslant M,\quad m\leqslant f(2)\leqslant M.$$

三式相加可得

$$m\leqslant \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}\leqslant M.$$

由介值定理知，至少存在一点 $c\in[0,2]$，使得

$$f(c)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1.$$

因为 $f(c)=f(3)=1$，且 $f(x)$ 在 $[c,3]$ 上连续，在 $(c,3)$ 内可导，由罗尔定理知，必存在 $\xi\in(c,3)\subset(0,3)$，使 $f'(\xi)=0$.

九、（本题满分 13 分）

已知齐次线性方程组

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+a_3x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+a_2x_2+(a_3+b)x_3+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$. 试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 b 满足何种关系时，

(I) 方程组仅有零解；

(II) 方程组有非零解. 在有非零解时，求此方程组的一个基础解系.

解. 方程组的系数行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_1+b & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2+b & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}=b^{n-1}(b+\sum_{i=1}^{n}a_i).$$

(I) 当 $|A|\neq 0$，即 $b\neq 0$ 且 $b+\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 时，秩 $r(A)=n$，方程组仅有零解.

(II) 当 $b=0$ 时，$|A|=0$，原方程组的同解方程组为

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0.$$

由 $\sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0$ 可知，$a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 不全为零. 不妨设 $a_1\neq 0$，得原方程组的一个基础解系

$$\alpha_1=\left(-\frac{a_2}{a_1},1,0,\cdots,0\right)^T,\alpha_2=\left(-\frac{a_3}{a_1},0,1,\cdots,0\right)^T,\cdots,\alpha_n=\left(-\frac{a_n}{a_1},0,0,\cdots,1\right)^T.$$

当 $b=-\sum_{i=1}^{n}a_i$ 时，$|A|=0$. 这时 $b\neq 0$，原方程组的系数矩阵可化为

$$A=\begin{pmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3-\sum_{i=1}^{n}a_i & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n-\sum_{i=1}^{n}a_i \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \sum_{i=1}^{n}a_i & -\sum_{i=1}^{n}a_i & 0 & \cdots & 0 \\ \sum_{i=1}^{n}a_i & 0 & -\sum_{i=1}^{n}a_i & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n}a_i & 0 & 0 & \cdots & -\sum_{i=1}^{n}a_i \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} a_1-\sum_{i=1}^{n}a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

由此得原方程组的同解方程组为

$$x_2=x_1,\quad x_3=x_1,\quad \cdots,\quad x_n=x_1.$$

原方程组的一个基础解系为 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$.

十、(本题满分 13 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=X^TAX=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\,(b>0)$ 中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1,特征值之积为 -12.

(I) 求 a,b 的值;

(II) 利用正交变换将二次型 f 化为标准形,并写出所用的正交变换和对应的正交矩阵.

解. (I) 二次型 f 的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{pmatrix}$. 设 A 的特征值为 $\lambda_i(i=1,2,3)$,则有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}=a+2+(-2)=1,$$

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=|A|=\begin{vmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 2 & 0 \\ b & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4a-2b^2=-12.$$

解得 $a=1$,$b=-2$.

(II) 求矩阵 A 的特征值,令

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+3)=0,$$

得矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-3$. 对于 $\lambda_1=\lambda_2=2$, 解齐次线性方程组 $(2E-A)x=0$,得基础解系 $\xi_1=(2,0,1)^T$,$\xi_2=(0,1,0)^T$. 对于 $\lambda_3=-3$,解齐次线性方程组 $(-3E-A)x=0$,得基础解系 $\xi_3=(1,0,-2)^T$. 由于 ξ_1,ξ_2,ξ_3 已是正交向量组,为得到规范正交向量组,只需将 ξ_1,ξ_2,ξ_3 单位化,由此得

$$\eta_1=\left(\frac{2}{\sqrt5},0,\frac{1}{\sqrt5}\right)^T,\qquad \eta_2=(0,1,0)^T,\qquad \eta_3=\left(\frac{1}{\sqrt5},0,-\frac{2}{\sqrt5}\right)^T.$$

令矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}\eta_1 & \eta_2 & \eta_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{pmatrix},$$

则 Q 为正交矩阵. 在正交变换 $X=QY$ 下，有

$$Q^TAQ=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}.$$

且二次型的标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

十一、（本题满分 13 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & 若\ x\in[1,8],\\ 0, & 其他;\end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数. 求随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数.

解. 方法 1：当 $x<1$ 时，$F(x)=0$；当 $x>8$ 时，$F(x)=1$. 对于 $x\in[1,8]$，有

$$F(x)=\int_1^x\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}\,\mathrm{d}t=\sqrt[3]{x}-1.$$

设 $G(y)$ 是随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数. 则当 $y<0$ 时，$G(y)=0$；当 $y\geqslant 1$ 时，$G(y)=1$. 对于 $y\in[0,1)$，有

$$\begin{aligned}G(y)&=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}\\&=P\{\sqrt[3]{X}-1\leqslant y\}=P\{X\leqslant(y+1)^3\}=F[(y+1)^3]=y.\end{aligned}$$

于是 $Y=F(X)$ 的分布函数为

$$G(y)=\begin{cases}0, & 若\ y<0,\\ y, & 若\ 0\leqslant y<1,\\ 1, & 若\ y\geqslant 1.\end{cases}$$

方法 2：设 $G(y)$ 是随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数. 则有

$$G(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}.$$

因为 $F(x)$ 是 X 的分布函数，故有 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$. 从而当 $y<0$ 时 $G(y)=0$；当 $y\geqslant 1$ 时，$G(y)=1$. 当 $0\leqslant y<1$ 时，因为 $F(x)$ 单调增加，所以

$$G(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F(X)\leqslant y\}=P\{X\leqslant F^{-1}(y)\}=F(F^{-1}(y))=y.$$

于是 $Y=F(X)$ 的分布函数为

$$G(y)=\begin{cases}0, & 若\ y<0,\\ y, & 若\ 0\leqslant y<1,\\ 1, & 若\ y\geqslant 1.\end{cases}$$

十二、（本题满分 13 分）

设随机变量 X 与 Y 独立，其中 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，而 Y 的概率密度为 $f(y)$，求随机变量 $U=X+Y$ 的概率密度 $g(u)$.

解. 设 $F(y)$ 是 Y 的分布函数，由全概率公式，得 $U=X+Y$ 的分布函数

$$\begin{aligned}G(u)&=P\{X+Y\leqslant u\}\\&=P\{X=1\}P\{X+Y\leqslant u|X=1\}+P\{X=2\}P\{X+Y\leqslant u|X=2\}\\&=0.3P\{X+Y\leqslant u|X=1\}+0.7P\{X+Y\leqslant u|X=2\}\\&=0.3P\{Y\leqslant u-1|X=1\}+0.7P\{Y\leqslant u-2|X=2\}.\end{aligned}$$

由于 X 和 Y 相互独立，所以

$$G(u)=0.3P\{Y\leqslant u-1\}+0.7P\{Y\leqslant u-2\}=0.3F(u-1)+0.7F(u-2).$$

由此得 U 的概率密度

$$g(u)=G'(u)=0.3F'(u-1)+0.7F'(u-2)=0.3f(u-1)+0.7f(u-2).$$

二〇〇三年考研数学试卷四解答

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=$ ________.

解. 应填 e^2. 对于 1^∞ 型极限，可用公式 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim(f(x)-1)g(x)}$ 进行计算，因此

$$\lim_{x\to 0}[1+\ln(1+x)]^{\frac{2}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{x}\cdot\ln(1+x)}=e^2.$$

2. $\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}\,dx=$ ________.

解. 应填 $2(1-2e^{-1})$. 利用被积函数的对称性和分部积分法，有

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}\,dx&=\int_{-1}^{1}|x|e^{-|x|}\,dx+\int_{-1}^{1}xe^{-|x|}\,dx=2\int_{0}^{1}xe^{-x}\,dx+0\\&=-2\int_0^1 x\,d(e^{-x})=-2\left(\left[xe^{-x}\right]_0^1-\int_0^1 e^{-x}\,dx\right)=2(1-2e^{-1}).\end{aligned}$$

3. 同试卷三第一 [3] 题.

4. 设 A，B 均为三阶矩阵，E 是三阶单位矩阵. 已知 $AB=2A+B$，$B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$，则 $(A-E)^{-1}=$ ________.

解. 应填 $\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. 由 $AB=2A+B$，知 $(A-E)(B-2E)=2E$，从而

$$(A-E)^{-1}=\frac{1}{2}(B-2E)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

5. 同试卷三第一 [4] 题.

6. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.5，$EX=EY=0$，$EX^2=EY^2=2$，则 $E(X+Y)^2=$ ________.

解. 应填 6. 因为

$$\begin{aligned}E(X+Y)^2&=EX^2+2E(XY)+EY^2=4+2[\mathrm{Cov}(X,Y)+EX\cdot EY]\\&=4+2\rho_{XY}\cdot\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}=4+2\times 0.5\times 2=6.\end{aligned}$$

二、选择题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分）

1. 曲线 $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$ ·· (　)

(A) 仅有水平渐近线.　　　　(B) 仅有铅直渐近线.

(C) 既有铅直又有水平渐近线.　　　　(D) 既有铅直又有斜渐近线.

解. 应选 (D). 当 $x \to \pm\infty$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y$ 均不存在，故不存在水平渐近线. 又由

$$\lim_{x\to 0} xe^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{t} = \lim_{t\to\infty} 2te^{t^2} = \infty$$

知曲线有铅直渐近线 $x = 0$. 再由

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = 1, \quad \lim_{x\to\infty} (xe^{\frac{1}{x^2}} - x) = \lim_{t\to 0} \frac{e^{t^2}-1}{t} = \lim_{t\to 0} 2te^{t^2} = 0,$$

知曲线有斜渐近线 $y = x$. 故曲线 $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$ 既有铅直又有斜渐近线.

2. 设函数 $f(x) = \left|x^3-1\right|\phi(x)$，其中 $\phi(x)$ 在 $x = 1$ 处连续，则 $\phi(1) = 0$ 是 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导的 ·· (　)

(A) 充分必要条件.　　　　(B) 必要但非充分条件.

(C) 充分但非必要条件.　　　　(D) 既非充分也非必要条件.

解. 应选 (A). 因为

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x-1} \cdot \phi(x) = 3\phi(1),$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3-1}{x-1} \cdot \phi(x) = -3\phi(1),$$

可见，$f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导的充分必要条件是 $3\phi(1) = -3\phi(1) \Leftrightarrow \phi(1) = 0$.

3. 同试卷三第二 [2] 题.

4. 设矩阵 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. 已知矩阵 A 相似于 B，则 $r(A-2E)$ 与 $r(A-E)$ 之和等于 ·· (　)

(A) 2.　　(B) 3.　　(C) 4.　　(D) 5.

解. 应选 (C). 因为矩阵 A 相似于 B，于是有矩阵 $A-2E$ 与矩阵 $B-2E$ 相似，矩阵 $A-E$ 与矩阵 $B-E$ 相似，且相似矩阵有相同的秩，而

$$r(B-2E) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 3, \quad r(B-E) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

可见有 $r(A-2E) + r(A-E) = r(B-2E) + r(B-E) = 4$,

5. 对于任意二事件 A 和 B,$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) 若 $AB\neq\emptyset$，则 A,B 一定独立. (B) 若 $AB\neq\emptyset$，则 A,B 有可能独立.

(C) 若 $AB=\emptyset$，则 A,B 一定独立. (D) 若 $AB=\emptyset$，则 A,B 一定不独立.

解. 应选 (B). $AB\neq\emptyset$ 推不出 $P(AB)=P(A)P(B)$，因此推不出 A,B 一定独立，排除 (A)；若 $AB=\emptyset$，则 $P(AB)=0$，但 $P(A)P(B)$ 是否为零不确定，因此 (C) 和 (D) 也不成立，故正确选项为 (B).

6. 设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布，且它们不相关，则$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) X 与 Y 一定独立. (B) (X,Y) 服从二维正态分布.

(C) X 与 Y 未必独立. (D) $X+Y$ 服从一维正态分布.

解. 应选 (C). 只有当 (X,Y) 服从二维正态分布时，X 与 Y 不相关 $\Leftrightarrow X$ 与 Y 独立，本题仅仅已知 X 和 Y 服从正态分布，因此，由它们不相关推不出 X 与 Y 一定独立，排除 (A). 若 X 和 Y 都服从正态分布且相互独立，则 (X,Y) 服从二维正态分布，但题设并不知道 X 与 Y 是否独立，可排除 (B). 同样要求 X 与 Y 相互独立时，才能推出 $X+Y$ 服从一维正态分布，可排除 (D). 故正确选项为 (C).

三、（本题满分 8 分）

设 $f(x)=\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}$，$x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$. 试补充定义 $f(0)$，使得 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上连续.

解. 由洛必达法则，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}f(x)&=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x-\sin\pi x}{\pi x\sin\pi x}=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi x-\sin\pi x}{x^2\pi^2}\\&=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0^+}\frac{\pi-\pi\cos\pi x}{2\pi^2 x}=-\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to0+}\frac{\pi^2\sin\pi x}{2\pi^2}=-\frac{1}{\pi}.\end{aligned}$$

由于 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上连续，因此定义 $f(0)=-\dfrac{1}{\pi}$，可使 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 上连续.

四、（本题满分 8 分）

同试卷三第四题.

五、（本题满分 8 分）

同试卷三第五题.

六、（本题满分 9 分）

设 $a>1$，$f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的驻点为 $t(a)$. 问 a 为何值时，$t(a)$ 最小？并求出最小值.

解. 由 $f'(t)=a^t\ln a-a=0$，得唯一驻点

$$t(a)=1-\frac{\ln\ln a}{\ln a}.$$

考察函数 $t(a)$ 在 $a>1$ 时的最小值．令

$$t'(a)=-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln\ln a}{(\ln a)^2}=-\frac{1-\ln\ln a}{a(\ln a)^2}=0,$$

得唯一驻点 $a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$. 当 $a>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ 时, $t'(a)>0$; 当 $a<\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$ 时, $t'(a)<0$. 因此 $t(\mathrm{e}^{\mathrm{e}})=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$ 为极小值，从而是最小值.

七、(本题满分 9 分)

设 $y=f(x)$ 是第一象限内连接点 $A(0,1)$，$B(1,0)$ 的一段连续曲线，$M(x,y)$ 为该曲线上任意一点，点 C 为 M 在 x 轴上的投影，O 为坐标原点．若梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}$，求 $f(x)$ 的表达式.

解. 根据题意有

$$\frac{x}{2}[1+f(x)]+\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t=\frac{x^3}{6}+\frac{1}{3}$$

两边对 x 求导得

$$\frac{1}{2}[1+f(x)]+\frac{1}{2}xf'(x)-f(x)=\frac{1}{2}x^2.$$

当 $x\neq 0$ 时，得

$$f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=\frac{x^2-1}{x}.$$

其通解为

$$f(x)=\mathrm{e}^{-\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left(\int\frac{x^2-1}{x}\mathrm{e}^{\int-\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\ln x}\left(\int\frac{x^2-1}{x}\mathrm{e}^{-\ln x}\mathrm{d}x+C\right)$$
$$=x\left(\int\frac{x^2-1}{x^2}\mathrm{d}x+C\right)=x^2+1+Cx.$$

当 $x=0$ 时，$f(0)=1$．由于 $x=1$ 时 $f(1)=0$，故有 $2+C=0$，从而 $C=-2$．所以 $f(x)=x^2+1-2x=(x-1)^2$.

八、(本题满分 8 分)

设某商品从时刻 0 到时刻 t 的销售量为 $x(t)=kt$，$t\in[0,T]$，$k>0$．欲在 T 时将数量为 A 的该商品销售完，试求

(I) t 时刻的商品剩余量，并确定 k 的值;

(II) 在时间段 $[0,T]$ 上的平均剩余量.

解. (I) 在时刻 t 商品的剩余量为

$$y(t)=A-x(t)=A-kt,\qquad t\in[0,T].$$

由 $A-kt=0$，得 $k=\frac{A}{T}$，因此

$$y(t)=A-\frac{A}{T}t,\qquad t\in[0,T].$$

(II) 依题意，$y(t)$ 在 $[0,T]$ 上的平均值为

$$\overline{y}=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T\left(A-\frac{A}{T}t\right)\mathrm{d}t=\frac{A}{2}.$$

因此在时间段 $[0,T]$ 上的平均剩余量为 $\frac{A}{2}$.

九、（本题满分 13 分）

设有向量组①：$\alpha_1=(1,0,2)^T$，$\alpha_2=(1,1,3)^T$，$\alpha_3=(1,-1,a+2)^T$ 和向量组②：$\beta_1=(1,2,a+3)^T$，$\beta_2=(2,1,a+6)^T$，$\beta_3=(2,1,a+4)^T$. 试问：当 a 为何值时，向量组①与②等价？当 a 为何值时，向量组①与②不等价？

解. 由初等行变换有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\begin{pmatrix}1&1&1&\vdots&1&2&2\\0&1&-1&\vdots&2&1&1\\2&3&a+2&\vdots&a+3&a+6&a+4\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&2&\vdots&-1&1&1\\0&1&-1&\vdots&2&1&1\\0&0&a+1&\vdots&a-1&a+1&a-1\end{pmatrix}.$$

(I) 当 $a\neq-1$ 时，行列式 $\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{vmatrix}=a+1\neq0$，$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=3$，故线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_i$（$i=1,2,3$）均有唯一解. 所以 β_1,β_2,β_3 可由向量组①线性表示. 同样，行列式 $\begin{vmatrix}\beta_1&\beta_2&\beta_3\end{vmatrix}=6\neq0$，$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=3$，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 可由向量组②线性表示. 因此向量组①与②等价.

(II) 当 $a=-1$ 时，有

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\vdots\beta_1,\beta_2,\beta_3)\to\begin{pmatrix}1&0&2&\vdots&-1&1&1\\0&1&-1&\vdots&2&1&1\\0&0&0&\vdots&-2&0&-2\end{pmatrix}.$$

由于 $r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\neq r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1)$，线性方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta_1$ 无解，故向量 β_1 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示. 因此，向量组①与②不等价.

十、(本题满分 13 分)

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$ 可逆，向量 $\alpha=\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}$ 是矩阵 A^* 的一个特征向量，λ 是 α 对应的特征值，其中 A^* 是矩阵 A 的伴随矩阵．试求 a,b 和 λ 的值.

解. 矩阵 A^* 属于特征值 λ 的特征向量为 α，由于矩阵 A 可逆，故 A^* 可逆．于是 $\lambda\neq 0$，$|A|\neq 0$，且

$$A^*\alpha=\lambda\alpha \quad\Rightarrow\quad AA^*\alpha=\lambda A\alpha \quad\Rightarrow\quad A\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha.$$

即有

$$\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}=\frac{|A|}{\lambda}\begin{pmatrix}1\\b\\1\end{pmatrix}.$$

由此得方程组

$$\begin{cases}3+b=\dfrac{|A|}{\lambda},\\ 2+2b=\dfrac{|A|}{\lambda}b,\\ a+b+1=\dfrac{|A|}{\lambda}.\end{cases}$$

解得 $b=1$ 或 $b=-2$；$a=2$．由于

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{vmatrix}=3a-2=4,$$

根据方程组第一个式子知，特征向量 α 所对应的特征值

$$\lambda=\frac{|A|}{3+b}=\frac{4}{3+b}.$$

所以，当 $b=1$ 时，$\lambda=1$；当 $b=-2$ 时，$\lambda=4$.

十一、(本题满分 13 分)

同试卷三第十一题.

十二、(本题满分 13 分)

对于任意二事件 A 和 B，$0<P(A)<1, 0<P(B)<1$,

$$\rho=\frac{P(AB)-P(A)P(B)}{\sqrt{P(A)P(B)P(\bar{A})P(\bar{B})}}$$

称做事件 A 和 B 的相关系数.

(I) 证明事件 A 和 B 独立的充分必要条件是其相关系数等于零；

(II) 利用随机变量相关系数的基本性质，证明 $|\rho|\leqslant 1$.

解. (I) 由 ρ 的定义，可见 $\rho=0$ 当且仅当 $P(AB)-P(A)P(B)=0$，而这恰好是二事件 A 和 B 独立的定义，即 $\rho=0$ 是 A 和 B 独立的充分必要条件.

(II) 考虑随机变量 X 和 Y：

$$X=\begin{cases}1, & \text{若 } A \text{ 出现},\\ 0, & \text{若 } A \text{ 不出现};\end{cases}, \qquad Y=\begin{cases}1, & \text{若 } B \text{ 出现};\\ 0, & \text{若 } B \text{ 不出现}.\end{cases}$$

由条件知，X 和 Y 都服从 $0-1$ 分布：

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ P(\bar{A}) & P(A)\end{pmatrix}, \qquad Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ P(\bar{B}) & P(B)\end{pmatrix}.$$

易见 $EX=P(A)$，$EY=P(B)$；$DX=P(A)P(\bar{A})$，$DY=P(B)P(\bar{B})$；

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=P(AB)-P(A)P(B).$$

因此，事件 A 和 B 的相关系数就是随机变量 X 和 Y 的相关系数. 于是由二随机变量相关系数的基本性质，可见 $|\rho|\leqslant 1$.

二〇〇四年考研数学试卷三解答

一、填空题（1～6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 若 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，则 $a=$________， $b=$________.

解. 应填 $a=1,b=-4$. 因为 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{e^x-a}(\cos x-b)=5$，且 $\lim\limits_{x\to0}\sin x\cdot(\cos x-b)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to0}(e^x-a)=0$，求得 $a=1$. 从而

$$5=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{e^x-1}(\cos x-b)=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}(\cos x-b)=1-b,$$

求得 $b=-4$.

2. 函数 $f(u,v)$ 由关系式 $f[xg(y),y]=x+g(y)$ 确定,其中函数 $g(y)$ 可微,且 $g(y)\neq0$，则 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=$________.

解. 应填 $-\dfrac{g'(v)}{g^2(v)}$. 令 $u=xg(y)$， $v=y$，从而 $f(u,v)=\dfrac{u}{g(v)}+g(v)$，所以

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{1}{g(v)},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{g(v)}\right)=-\frac{g'(v)}{g^2(v)}.$$

3. 设 $f(x)=\begin{cases}xe^{x^2}, & -\dfrac{1}{2}\leqslant x<\dfrac{1}{2},\\ -1, & x\geqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$，则 $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)\,dx=..$

解. 应填 $-\dfrac{1}{2}$. 令 $x-1=t$，则有

$$\int_{\frac{1}{2}}^{2}f(x-1)\,dx=\int_{-\frac{1}{2}}^{1}f(t)\,dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}xe^{x^2}\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\,dx=0-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

4. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$ 的秩为________.

解. 应填 2. 因为

$$\begin{aligned}f(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2\\&=2x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3,\end{aligned}$$

所以二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&-1\\1&-1&2\end{pmatrix}$. 由初等变换得

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&1\\1&-1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-3&3\\0&-3&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix},$$

从而 $r(A)=2$，于是二次型的秩也为 2.

5. 同试卷一第一 [6] 题.

6. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma^2)$, 总体 Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma^2)$, $X_1,X_2,\cdots X_{n_1}$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_{n_2}$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则

$$E\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2+\sum\limits_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2}{n_1+n_2-2}\right]=\underline{\qquad\qquad}.$$

解. 应填 σ^2. 因为

$$E\left[\frac{1}{n_1-1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2\right]=D(X)=\sigma^2,\quad E\left[\frac{1}{n_2-1}\sum_{i=1}^{n_1}(Y_i-\overline{Y})^2\right]=D(Y)=\sigma^2,$$

所以有

$$E\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2\right]=(n_1-1)\sigma^2,\quad E\left[\sum_{i=1}^{n_1}(Y_i-\overline{Y})^2\right]=(n_2-1)\sigma^2.$$

从而

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left\{E\left[\sum_{i=1}^{n_1}(X_i-\overline{X})^2\right]+E\left[\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j-\overline{Y})^2\right]\right\}\\&=\frac{1}{n_1+n_2-2}\left[(n_1-1)\sigma^2+(n_2-1)\sigma^2\right]=\sigma^2.\end{aligned}$$

二、选择题（7～14 小题，每小题 4 分，共 32 分）

7. 函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $(-1,0)$. (B) $(0,1)$. (C) $(1,2)$. (D) $(2,3)$.

解. 应选 (A). 如果 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续, 且极限 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在, 则函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内有界. 因为

$$\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 3}{18},$$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=-\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\frac{\sin 2}{4},$$

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty,$$

$$\lim_{x\to2}f(x)=\lim_{x\to2}\frac{x\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}=\infty$$

所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界, 故选 (A).

8. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义, 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$, $g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq0;\\0, & x=0.\end{cases}$ 则( )

(A) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的第二类间断点.

(C) $x=0$ 必是 $g(x)$ 的连续点.

(D) $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

解. 应选 (D). 因为

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}f\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{u\to\infty}f(u)=a,\quad g(0)=0,$$

所以当 $a=0$ 时, $\lim\limits_{x\to0}g(x)=g(0)$, 即 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处连续; 当 $a\neq0$ 时, $\lim\limits_{x\to0}g(x)\neq g(0)$, 即 $x=0$ 是 $g(x)$ 的第一类间断点. 因此 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与 a 的取值有关.

9. 同试卷二第二 [8] 题.

10. 设有下列命题:

①若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

②若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛.

③若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

④若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛.

则以下命题中正确的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) ①②.　　(B) ②③.　　(C) ③④.　　(D) ①④.

解. 应选 (B). ①是错误的, 反例为 $u_n=(-1)^n$. ②是正确的, 因为改变、增加或减少级数的有限项, 不改变级数的敛散性. ③是正确的, 因为若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$, 则当 n 充分大时, 必有 u_{n+1} 与 u_n 同号 (不妨设均为正), 从而由比值判别法知级数发散. ④是错误的, 反例为 $u_n=\dfrac{1}{n}$, $v_n=-\dfrac{1}{n}$.

11. 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f'(a)>0$, $f'(b)<0$, 则下列结论中错误的是 (　　)

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)>f(a)$.

(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f'(x_0)=0$.

(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$, 使得 $f(x_0)=0$.

解. 应选 (D). 由导数的定义 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$, 根据极限的保号性, 存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}>0$, 即 $f(x_0)>f(a)$, 所以选项 (A) 正确.

同理，$f'(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}<0$，根据极限的保号性，存在 $x_0\in(a,b)$ 使得 $f(x_0)>f(b)$，所以选项 (B) 正确.

由已知 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f'(a)>0$, $f'(b)<0$，则由介值定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $f'(x_0)=0$，所以选项 (C) 正确.

令 $f(x)=4-x^2$（$-1\leqslant x\leqslant 1$），则 $f'(-1)=2>0$，$f'(1)=-2<0$，但在 $[-1,1]$ 上 $f(x)\geqslant 3>0$，所以选项 (D) 是错误的.

12. 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价，则必有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时，$|B|=a$.　　(B) 当 $|A|=a(a\neq 0)$ 时，$|B|=-a$.

(C) 当 $|A|\neq 0$ 时，$|B|=0$.　　(D) 当 $|A|=0$ 时，$|B|=0$.

解. 应选 (D).由矩阵等价的定义,知存在可逆 P,Q,使得 $PAQ=B$,于是 $|P||A||Q|=|B|$. P,Q 可逆，故 $|P|\neq 0$，$|Q|\neq 0$. 从而 $|A|\neq 0$ 时，$|B|$ 不能确定；但 $|A|=0$ 时有 $|B|=0$.

13. 设 n 阶矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*\neq 0$, 若 ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的互不相等的解，则对应的齐次线性方程组 $Ax=0$ 的基础解系 $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 不存在.　　(B) 仅含一个非零解向量.

(C) 含有两个线性无关的解向量.　　(D) 含有三个线性无关的解向量.

解. 应选 (B). 因为

$$r(A^*)=\begin{cases}0, & r(A)<n-1,\\ 1, & r(A)=n-1,\\ n, & r(A)=n,\end{cases}$$

所以由 $A^*\neq 0$，可得 $r(A)=n-1$ 或 $r(A)=n$. 由 ξ_1,ξ_2 是 $Ax=b$ 的不同的解，得 $\xi_1-\xi_2\neq 0$ 是 $Ax=0$ 的解，从而 $r(A)<n$，因此 $r(A)=n-1$. 故基础解系所含向量个数为 $n-(n-1)=1$.

14. 同试卷一第二 [13] 题.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 8 分）

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$.

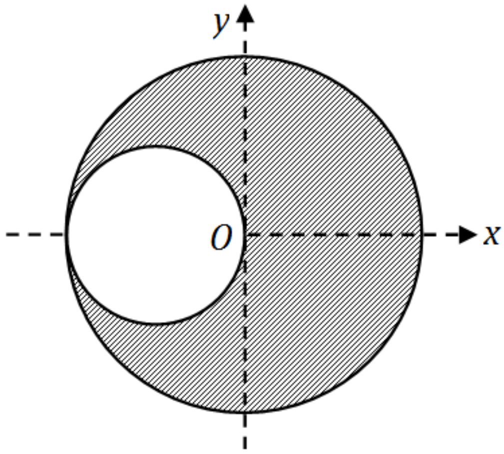
解. 由等价无穷小量代换和洛必达法则，可得

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos^2 x}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{1}{4}\sin^2 2x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{1}{2}\sin 4x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}(4x)^2}{6x^2}=\frac{4}{3}.$$

16.（本题满分 8 分）

求 $\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由圆 $x^2+y^2=4$ 和 $(x+1)^2+y^2=1$ 所围成的平面区域（如图所示）.



解. 令 $D_1=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 4\}$, $D_2=\{(x,y)|(x+1)^2+y^2\leqslant 1\}$，则有

$$\iint_D(\sqrt{x^2+y^2}+y)\mathrm{d}\sigma=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_2}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^2\mathrm{d}r-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{-2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r=2\pi\cdot\frac{8}{3}-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\frac{-8\cos^3\theta}{3}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{16\pi}{3}+\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}(\sin\theta)=\frac{16\pi}{3}+\frac{8}{3}\left(\sin\theta-\frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$=\frac{16\pi}{3}-\frac{32}{9}=\frac{16}{9}(3\pi-2).$$

17.（本题满分 8 分）

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且满足

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ x\in[a,b),\qquad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t=\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.$$

证明：$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x$.

解. 令 $h(x)=f(x)-g(x)$，$H(x)=\int_a^x h(t)\mathrm{d}t$. 则由题设有

$$H(x)\geqslant 0,\ x\in[a,b],\qquad H(a)=(b)=0.$$

从而由分部积分法有

$$\int_a^b xh(x)\mathrm{d}x=\int_a^b x\,\mathrm{d}(H(x))=\big[xH(x)\big]_a^b-\int_a^b H(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b H(x)\mathrm{d}x\leqslant 0.$$

因此得到

$$\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b xg(x)\mathrm{d}x.$$

18.（本题满分 9 分）

设某商品的需求函数为 $Q=100-5P$，其中价格 $P\in(0,20)$，Q 为需求量.

(I) 求需求量对价格的弹性 $E_d(E_d>0)$；

(II) 推导 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q(1-E_d)$（其中 R 为收益），并用弹性 E_d 说明价格在何范围内变化时，降低价格反而使收益增加.

解. (I) 由于需求量对价格的弹性 $E_d>0$，所以

$$E_d=\left|\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right|=\left|\frac{P}{100-5P}\cdot(-5)\right|=\frac{P}{20-P}.$$

(II) 由 $R=PQ$，得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Q\left(1+\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)=Q\left(1+\frac{-P}{20-P}\right)=Q(1-E_d).$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}<0$，可得 $E_d>1$，即 $\dfrac{P}{20-P}>1$，解得 $P>10$. 又已知 $P\in(0,20)$，所以当 $10<P<20$ 时，收益随价格降低反而增加.

19.（本题满分 9 分）

设级数

$$\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\frac{x^8}{2\cdot4\cdot6\cdot8}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty)$$

的和函数为 $S(x)$. 求：

(I) $S(x)$ 所满足的一阶微分方程； (II) $S(x)$ 的表达式.

解. (I) 易知 $S(0)=0$，且有

$$\begin{aligned}S'(x)&=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot4}+\frac{x^7}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\\&=x\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot4}+\frac{x^6}{2\cdot4\cdot6}+\cdots\right)=x\left[\frac{x^2}{2}+S(x)\right].\end{aligned}$$

因此 $S(x)$ 满足一阶线性微分方程及相应的初始条件：

$$S'(x)-xS(x)=\frac{x^3}{2},\quad S(0)=0.$$

(II) 由通解公式，上述微分方程的通解为

$$\begin{aligned}S(x)&=\mathrm{e}^{\int x\,\mathrm{d}x}\left(\int\frac{x^3}{2}\mathrm{e}^{-\int x\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(\int\frac{x^3}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x+c\right)\\&=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(-\int\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)+C\right)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\left(-\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+\int\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x^2}{2}\right)+C\right)\\&=-\frac{x^2}{2}-\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}+C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}=-\frac{x^2}{2}-1+C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.\end{aligned}$$

由初始条件 $S(0)=0$，得 $C=1$. 故 $S(x)=-\dfrac{x^2}{2}-1+\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

20.（本题满分 13 分）

设 $\alpha_1=(1,2,0)^T,\alpha_2=(1,\alpha+2,-3\alpha)^T,\alpha_3=(-1,-b-2,\alpha+2b)^T,\beta=(1,3,-3)^T$，试讨论当 a,b 为何值时，

(Ⅰ) β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

(Ⅱ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表示式；

(Ⅲ) β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，并求出表示式.

解. 设有实数 x_1,x_2,x_3 使得方程组 $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\beta$ 成立. 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，对矩阵 (A,β) 作初等行变换得

$$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\2&a+2&-b-2&3\\0&-3a&a+2b&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-b&1\\0&0&a-b&0\end{pmatrix}.$$

(Ⅰ) 当 $a=0$ 时，由

$$(A,\beta)\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&0&-b&1\\0&0&-b&0\end{pmatrix}.$$

可知 $r(A)\neq r(A,\beta)$. 故方程组无解，即 β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示.

(Ⅱ) 当 $a\neq0$ 且 $a\neq b$ 时，可知 $r(A)=r(A,\beta)=3$，故方程组有唯一解. 由同解阶梯形方程求解得

$$x_1=1-\frac{1}{a},\quad x_2=\frac{1}{a},\quad x_3=0.$$

此时 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一地线性表示，其表示式为 $\beta=\left(1-\frac{1}{a}\right)\alpha_1+\frac{1}{a}\alpha_2$.

(Ⅲ) 当 $a\neq0$ 且 $a=b\neq0$ 时，对矩阵 (A,β) 继续作初等行变换得

$$(A,\beta)\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&a&-a&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\0&1&-1&\frac{1}{a}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&1-\frac{1}{a}\\0&1&-1&\frac{1}{a}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

从而 $r(A)=r(A,\beta)=2$. 故方程组有无穷多解，其全部解为

$$x_1=1-\frac{1}{a},\quad x_2=\frac{1}{a}+c,\quad x_3=c.$$

其中 c 为任意常数. 此时 β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示式不唯一，其表示式为

$$\beta=\left(1-\frac{1}{a}\right)\alpha_1+\left(\frac{1}{a}+c\right)\alpha_2+c\alpha_3.$$

21. (本题满分 13 分)

设 n 阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&b&\cdots&b\\b&1&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&\cdots&1\end{pmatrix}$.

(Ⅰ) 求 A 的特征值和特征向量；(Ⅱ) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解. (Ⅰ) 当 $b\neq 0$ 时,

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & \cdots & -b\\ -b & \lambda-1 & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -b & -b & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1}.$$

故 A 的特征值为 $\lambda_1=1+(n-1)b$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$．对 $\lambda_1=1+(n-1)b$,

$$\lambda_1E-A=\begin{pmatrix}(n-1)b & -b & \cdots & -b\\ -b & (n-1)b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & (n-1)b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & -1\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

求得基础解系 $\xi_1=(1,1,1,\cdots,1)^T$, 所以 A 的属于 λ_1 的全部特征向量为 $k\xi_1=k(1,1,1,\cdots,1)^T$（$k$ 为任意不为零的常数）．对 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$,

$$\lambda_iE-A=\begin{pmatrix}-b & -b & \cdots & -b\\ -b & -b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -b & -b & \cdots & -b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

求得基础解系为

$$\xi_2=(1,-1,0,\cdots,0)^T,\quad \xi_3=(1,0,-1,\cdots,0)^T,\quad \cdots\quad ,\xi_n=(1,0,0,\cdots,-1)^T.$$

故 A 的属于 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n$ 的全部特征向量为 $k_2\xi_2+k_3\xi_3+\cdots+k_n\xi_n$（$k_2,k_3,\cdots,k_n$ 是不全为零的常数）.

当 $b=0$ 时,

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda-1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^n,$$

特征值为 $\lambda_1=\cdots=\lambda_n=1$，任意非零列向量均为特征向量.

(Ⅱ) 当 $b\neq 0$ 时，A 有 n 个线性无关的特征向量．令 $P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1+(n-1)b & & & \\ & 1-b & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1-b\end{pmatrix}.$$

当 $b=0$ 时，$A=E$，对任意可逆矩阵 P，均有 $P^{-1}AP=E$.

22.（本题满分 13 分）

设 A, B 为随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{2}$. 令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{ 发生},\\ 0, & A\text{ 不发生};\end{cases}\qquad Y=\begin{cases}1, & B\text{ 发生},\\ 0, & B\text{ 不发生}.\end{cases}$$

求：

(Ⅰ) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(Ⅱ) X 和 Y 的相关系数 ρ_{XY}；

(Ⅲ) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布.

解. (Ⅰ) 由于 $P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{12}$，所以 $P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1}{6}$. 利用条件概率公式和事件间简单的运算关系，有

$$P\{X=1,Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P(\bar{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=0,Y=0\}=P(\bar{A}\bar{B})=1-P(A+B)=1-P(A)-P(B)+P(AB)=\frac{2}{3}.$$

故 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$

(Ⅱ) X, Y 的概率分布分别为

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{3}{4},$$

$$P\{X=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$$P\{Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.$$

所以 X, Y 的概率分布为

X	0	1
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

由 $0-1$ 分布的数学期望和方差公式，有

$$EX=\frac{1}{4},\quad EY=\frac{1}{6},\quad DX=\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{16},\quad DY=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{36},$$

$$E(XY)=0\cdot P\{XY=0\}+1\cdot P\{XY=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}.$$

故协方差和相关系数等于

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=\frac{1}{24},\quad \rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3},$$

(Ⅲ) Z 的可能取值为 $0,1,2$.且有 $P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=\frac{1}{4},$,

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12}.$$

即 Z 的概率分布为

Z	0	1	2
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

23.（本题满分 13 分）

设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x;\alpha,\beta)=\begin{cases}1-\left(\frac{\alpha}{x}\right)^{\beta}, & x>\alpha,\\ 0, & x\leqslant\alpha,\end{cases}$$

其中参数 $\alpha>0,\beta>1$. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本,

(Ⅰ) 当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的矩估计量;

(Ⅱ) 当 $\alpha=1$ 时，求未知参数 β 的最大似然估计量;

(Ⅲ) 当 $\beta=2$ 时，求未知参数 α 的最大似然估计量.

解. 当 $\alpha=1$ 时，X 的概率密度为 $f(x,\beta)=\begin{cases}\frac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x>1;\\ 0, & x\leqslant 1.\end{cases}$

(Ⅰ) 由数学期望的定义:

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\beta)\mathrm{d}x=\int_{1}^{+\infty}x\cdot\frac{\beta}{x^{\beta+1}}\mathrm{d}x=\frac{\beta}{\beta-1}.$$

用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$ 即 $\frac{\beta}{\beta-1}=\overline{X}$，解得 $\beta=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$，所以参数 β 的矩估计量为 $\hat{\beta}=\frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

(Ⅱ) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一组观测值，则似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\beta)=\begin{cases}\frac{\beta^n}{(x_1x_2\cdots x_n)^{\beta+1}}, & x_i>1\,(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_i>1\,(i=1,2,\cdots,n)$ 时，$L(\beta)>0$，取自然对数得

$$\ln L(\beta)=n\ln\beta-(\beta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

两边对 β 求导，并令导数为零得

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\beta)}{\mathrm{d}\beta}=\frac{n}{\beta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0 \quad\Rightarrow\quad \beta=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}.$$

从而 β 的最大似然估计量为 $\hat{\beta}=\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$.

(III) 当 $\beta=2$ 时，X 的概率密度为 $f(x,\beta)=\begin{cases}\dfrac{2\alpha^2}{x^3}, & x>\alpha;\\ 0, & x\leqslant\alpha.\end{cases}$ 对于总体 X 的样本值 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，似然函数为

$$L(\beta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\alpha)=\begin{cases}\dfrac{2^n\alpha^{2n}}{(x_1x_2\cdots x_n)^3}, & x_i>\alpha\,(i=1,2,\cdots,n),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $x_i>\alpha$（$i=1,2,\cdots,n$）时，α 越大，$L(\alpha)$ 越大．但是必须满足条件 $\alpha\leqslant x_i$（$i=1,2,\cdots,n$），所以 α 的最大似然估计值为 $\hat{\alpha}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$．于是 α 的最大似然估计量为 $\hat{\alpha}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$.

二〇〇四年考研数学试卷四解答

一、填空题（1～6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 同试卷三第一 [1] 题.

2. 设 $y=\arctan \mathrm{e}^x-\ln\sqrt{\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x}+1}}$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=$ ________.

解. 应填 $\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^2+1}$.

3. 同试卷三第一 [3] 题.

4. 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$，$B=P^{-1}AP$，其中 P 为三阶可逆矩阵，则 $B^{2004}-2A^2=$ ________.

解. 应填 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$.

5. 设 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 是实正交矩阵，且 $a_{11}=1$, $b=(1,0,0)^T$，则线性方程组 $Ax=b$ 的解是 ________.

解. 应填 $(1,0,0)^T$.

6. 同试卷一第一 [6] 题.

二、选择题（7～14 小题，每小题 4 分，共 32 分）

7. 同试卷三第二 [7] 题.

8. 同试卷三第二 [8] 题.

9. 同试卷二第二 [8] 题.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$，则 · ( )

(A) $F(x)$ 在 $x=0$ 点不连续.

(B) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，但在 $x=0$ 点不可导.

(C) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且满足 $F'(x)=f(x)$.

(D) $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，但不一定满足 $F'(x)=f(x)$.

解. 应选 (B).

11. 同试卷三第二 [11] 题.

12. 同试卷三第二 [12] 题.

13. 同试卷一第二 [13] 题.

14. 同试卷一第二 [14] 题.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15. 同试卷三第三 [15] 题.

16. 同试卷三第三 [16] 题.

17.（本题满分 8 分）

设 $f(u,v)$ 具有连续偏导数, 且满足 $f_u'(u,v)+f_v'(u,v)=uv$. 求 $y(x)=\mathrm{e}^{-2x}f(x,x)$ 所满足的一阶微分方程，并求其通解.

解. $y(x)$ 满足一阶微分方程 $y'+2y=x^2\mathrm{e}^{-2x}$，其通解为 $y=\left(\frac{1}{3}x^3+C\right)\mathrm{e}^{-2x}$（$C$ 为任意常数）.

18. 同试卷三第三 [18] 题.

19.（本题满分 9 分）

设 $F(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2x}, & x\leqslant 0,\\ \mathrm{e}^{-2x}, & x>0,\end{cases}$ S 表示夹在 x 轴与曲线 $y=F(x)$ 之间的面积．对任何 $t>0$，$S_1(t)$ 表示矩形 $-t\leqslant x\leqslant t,\ 0\leqslant y\leqslant F(t)$ 的面积．求:

(I) $S(t)=S-S_1(t)$ 的表达式；(II) $S(t)$ 的最小值.

解. (I) $S(t)=1-2t\mathrm{e}^{-2t},\ t\in(0,+\infty)$;

(II) $S\left(\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{e}$ 为最小值.

20.（本题满分 13 分）

设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+\lambda x_2+\mu x_3+x_4=0,\\ 2x_1+x_2+x_3+2x_4=0,\\ 3x_1+(2+\lambda)x_2+(4+\mu)x_3+4x_4=1.\end{cases}$$

已知 $(1,-1,1,-1)^T$ 是该方程组的一个解，试求:

(I) 方程组的全部解，并用对应的齐次线性方程组的基础解系表示全部解;

(II) 该方程组满足 $x_2=x_3$ 的全部解.

解. 将 $(1,-1,1,-1)^T$ 代入方程组得 $\lambda=\mu$.

(I) 当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时，方程组的全部解为

$$\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^T+k(-2,1,-1,2)^T,$$

其中 k 为任意常数. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，方程组的全部解为

$$\left(-\frac{1}{2},1,0,0\right)^T+k_1(1,-3,1,0)^T+k_2(-1,-2,0,2)^T,$$

其中 k_1,k_2 为任意常数.

(II) 当 $\lambda\neq\frac{1}{2}$ 时，满足 $x_2=x_3$ 的全部解为 $(-1,0,0,1)^T$. 当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，满足 $x_2=x_3$ 的全部解为 $(-1,0,0,1)^T+k_1(3,1,1,-4)^T$，其中 k_1 为任意常数.

21.（本题满分 13 分）

设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1=\lambda_2=6$ 是 A 的二重特征值. 若 $\alpha_1=(1,1,0)^T$，$\alpha_2=(2,1,1)^T$, $\alpha_3=(-1,2,-3)^T$ 都是 A 的属于特征值 6 的特征向量.

(I) 求 A 的另一特征值和对应的特征向量； (II) 求矩阵 A.

解. (I) 求 A 的另一特征值 $\lambda_3=0$，其所对应的特征向量为 $k(-1,1,1)^T$，其中 k 为任意非零常数.

(II) 矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&2&2\\2&4&-2\\2&-2&4\end{pmatrix}$.

22. 同试卷三第三 [22] 题.

23.（本题满分 13 分）

设随机变量 X 在区间 $(0,1)$ 上服从均匀分布，在 $X=x$（$0<x<1$）的条件下，随机变量 Y 在区间 $(0,x)$ 上服从均匀分布，求：

(I) 随机变量 X 和 Y 的联合概率密度;

(II) Y 的概率密度;

(III) 概率 $P\{X+Y>1\}$.

解. (I) X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{x}. & 0<y<x<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(II) Y 的概率密度 $f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y. & 0<y<1;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(III) 概率 $P\{X+Y>1\}=1-\ln 2$.

二〇〇五年考研数学试卷三解答

一、填空题（1～6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 极限 $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{2x}{x^2+1}=$ ________.

解. 应填 2．这是一个 $\infty\cdot 0$ 型未定式，令 $t=\dfrac{1}{x}$ 有

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{2x}{x^2+1}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\dfrac{2t}{1+t^2}}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 2t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{t}=2.$$

2. 微分方程 $xy'+y=0$ 满足初始条件 $y(1)=2$ 的特解为 ________.

解. 应填 $xy=2$．观察原微分方程知 $(xy)'=xy'+y=0$，积分得原方程的通解 $xy=C$．代入初始条件得 C=2，故所求特解为 $xy=2$.

3. 设二元函数 $z=xe^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=$ ________.

解. 应填 $2e\,\mathrm{d}x+(e+2)\mathrm{d}y$．求偏导数得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x+y}+xe^{x+y}+\ln(1+y),\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=xe^{x+y}+\frac{x+1}{1+y}.$$

于是 z 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\left(e^{x+y}+xe^{x+y}+\ln(1+y)\right)\mathrm{d}x+\left(xe^{x+y}+\frac{x+1}{y+1}\right)\mathrm{d}y.$$

所以 $\mathrm{d}z\big|_{(1,0)}=2e\,\mathrm{d}x+(e+2)\mathrm{d}y$.

4. 设行向量组 $(2,1,1,1)$，$(2,1,a,a)$，$(3,2,1,a)$，$(4,3,2,1)$ 线性相关，且 $a\neq 1$，则 $a=$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{2}$．由题设，向量组线性相关，故其组成的行列式为零，即

$$\begin{vmatrix}2&1&1&1\\2&1&a&a\\3&2&1&a\\4&3&2&1\end{vmatrix}=(a-1)(2a-1)=0,$$

从而 $a=1$ 或 $a=\frac{1}{2}$；但题设 $a\neq 1$，故 $a=\frac{1}{2}$.

5. 同试卷一第一 [6] 题.

6. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，则 $a=$________，$b=$________.

解. 应填 0.4 和 0.1. 由二维离散型随机变量联合概率分布的性质有

$$0.4+a+b+0.1=1 \quad \Rightarrow \quad a+b=0.5.$$

可知 $a+b=0.5$，又事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，于是有

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0\}P\{X+Y=1\}.$$

计算各个概率得到

$$P\{X=0,X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}=a,$$

$$P\{X=0\}=P\{X=0,Y=0\}+P\{X=0,Y=1\}=0.4+a,$$

$$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=a+b=0.5.$$

代入前面等式，得到 $a=(0.4+a)\times 0.5$，解得 $a=0.4, b=0.1$.

二、选择题（7～14 小题，每小题 4 分，共 32 分）

7. 当 a 取下列哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰好有两个不同的零点…………………………………………………………………( )

(A) 2. (B) 4. (C) 6. (D) 8.

解. 应选 (C). 因为 $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$，知可能极值点为 $x=1$ 和 $x=2$. 从而可将函数划分为 3 个严格单调区间:

x	$(-\infty,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

并且 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. 若 $f(x)$ 恰好有两个零点，则必有 $f(1)=0$ 或 $f(2)=0$（否则有一个或三个零点），解之得 $a=5$ 或 $a=4$. 故选 (B).

8. 设 $I_1=\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$, $I_2=\iint_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma$, $I_3=\iint_D \cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant 1\}$，则…………………………………………( )

(A) $I_3>I_2>I_1$. (B) $I_1>I_2>I_3$. (C) $I_2>I_1>I_3$. (D) $I_3>I_1>I_2$.

解. 应选 (A). 在区域 $D=\{(x,y)\big|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上, 除原点 $x^2+y^2=0$ 及边界 $x^2+y^2=1$ 外，总有

$$\sqrt{x^2+y^2}>x^2+y^2>(x^2+y^2)^2.$$

而在 $0\leqslant u\leqslant 1$ 内，$\cos u$ 是严格单调减函数，于是

$$\cos(x^2+y^2)^2>\cos(x^2+y^2)>\cos\sqrt{x^2+y^2}.$$

因此二重积分

$$\iint_D \cos(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}\sigma>\iint_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma>\iint_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma,$$

即 $I_3>I_2>I_1$.

9. 设 $a_n>0$, $n=1,2,\cdots$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则下列结论正确的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 发散.

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 发散.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛.

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 收敛.

解. 应选 (D). 由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}-a_{2n})$ 是对收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 添加括号之后得到的, 因此它必定收敛. 取 $a_n=\frac{1}{n}$, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 均发散，排除 (A) 和 (B) 选项．又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 的通项 $\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 发散，故排除 (C).

10. 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $f(0)$ 是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$ 是极小值.

(B) $f(0)$ 是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值.

(C) $f(0)$ 是极大值，$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极大值.

(D) $f(0)$ 是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$ 也是极小值.

解. 应选 (B). 先求函数的导数 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$. 显然 $f'(0)=0, f'(\frac{\pi}{2})=0$，所以 $x=0, x=\frac{\pi}{2}$ 为驻点. 又 $f''(x)=\cos x-x\sin x$，且 $f''(0)=1>0, f''(\frac{\pi}{2})=-\frac{\pi}{2}<0$，故 $f(0)$ 是极小值，$f(\frac{\pi}{2})$ 是极大值.

11. 以下四个命题中，正确的是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(B) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内连续，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(C) 若 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

(D) 若 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界，则 $f'(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

解. 应选 (C). 设 $f(x)=\frac{1}{x}$, 则 $f(x)$ 及 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ 均在 $(0,1)$ 内连续, 但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内无界, 故排除 (A) 和 (B). 又 $f(x)=\sqrt{x}$ 在 $(0,1)$ 内有界, 但 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内无界，故排除 (D). 如果 $f'(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内有界，则对于正数 M，使 $(0,1)$ 内的一切 x，有 $|f'(x)|\leqslant M$. 在 $(0,1)$ 内取定点 x_0，则对于任意 $x\in(0,1)$ 有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0),\quad \xi\in(0,1).$$

于是

$$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|\leqslant|f(x_0)|+M,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内有界.

12. 设矩阵 $A=(a_{ij})_{3\times3}$ 满足 $A^*=A^T$，其中 A^* 是 A 的伴随矩阵，A^T 为 A 的转置矩阵．若 a_{11},a_{12},a_{13} 为三个相等的正数，则 a_{11} 为 ························ (　)

(A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.　　(B) 3.　　(C) $\frac{1}{3}$.　　(D) $\sqrt{3}$.

解. 应选 (A)．由已知条件

$$A^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}=A^T,$$

则有 $a_{ij}=A_{ij},i,j=1,2,3$，其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式．又由 $A^*=A^T$ 和 $AA^*=|A|E$ 得 $AA^T=|A|E$，两边取行列式，得到 $|A|^2=|A|^3$，于是有 $|A|=0$ 或 $|A|=1$．而

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2=3a_{11}^2\neq0,$$

于是 $|A|=1$，即 $3a_{11}^2=1$，故 $a_{11}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．故正确选项为 (A).

13. 同试卷一第二 [11] 题.

14. 设一批零件的长度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知．现从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\overline{x}=20(cm)$，样本标准差 $s=1(cm)$，则 μ 的置信度为 0.90 的置信区间是 ·· (　)

(A) $\left(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$.　　(B) $\left(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$.

(C) $\left(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$.　　(D) $\left(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$.

解. 应选 (C)．由正态总体抽样分布的性质：$N(\mu,\sigma^2)$ 中，当 μ,σ^2 未知时，估计 μ 用统计量 t，$\frac{\overline{x}-\mu}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，期望值 u 的置信区间公式

$$\left(\overline{x}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\overline{x}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right).$$

即 $\left(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$．故应选 (C).

三、解答题（本题共 9 小题，满分 94 分）

15.（本题满分 8 分）

求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)$.

解. 由等价无穷小量代换和洛必达法则，有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1+x}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}\right)&=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x(1-e^{-x})}=\lim_{x\to0}\frac{x+x^2-1+e^{-x}}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1+2x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

16. (本题满分 8 分)

设 $f(u)$ 具有二阶连续导数，且 $g(x,y)=f\left(\frac{y}{x}\right)+yf\left(\frac{x}{y}\right)$，求 $x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解. 先求对 x 的偏导数:

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f'\left(\frac{x}{y}\right),\qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^4}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right).$$

先求对 y 的偏导数:

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{1}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y}f'\left(\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{y^2}f'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{x^2}{y^3}f''\left(\frac{x}{y}\right).$$

所以

$$x^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{y^2}{x^2}f''\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{x^2}{y}f''\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{2y}{x}f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

17. 同试卷二第三 [21] 题.

18. (本题满分 9 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$.

解. 将幂级数分为两部分:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=S_1(x)-S_2(x).$$

先求级数 $S_2(x)$:

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{x^2}{1-x^2}.$$

再求级数 $S_1(x)$：由于

$$(xS_1(x))'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},$$

因此由微积分基本公式得

$$xS_1(x)=0\times S_1(0)+\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}\,\mathrm{d}t=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

又由于 $S_1(0)=0$，故

$$S_1(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & |x|<1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

所以原幂级数的和函数

$$S(x)=S_1(x)-S_2(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}, & |x|<1, x\neq 0;\\ 0 & x=0.\end{cases}$$

19.（本题满分 8 分）

设 $f(x),g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0,f'(x)\geqslant 0,g'(x)\geqslant 0$. 证明：对任何 $a\in[0,1]$，有 $\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1)$.

解. 将 a 看成变限，设

$$F(x)=\int_0^x g(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t-f(x)g(1),$$

则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，并且

$$F'(x)=g(x)f'(x)-f'(x)g(1)=f'(x)[g(x)-g(1)].$$

由 $x\in[0,1]$ 时, $g'(x)\geqslant 0$ 知 $g(x)$ 是单调递增的, 所以 $g(x)-g(1)\leqslant 0$; 又 $f'(x)\geqslant 0$, 因此 $F'(x)\leqslant 0$，即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减. 另一方面,

$$F(1)=\int_0^1 g(t)f'(t)\mathrm{d}t+\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t-f(1)g(1).$$

由分部积分公式

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)f'(t)\mathrm{d}t&=\int_0^1 g(t)\mathrm{d}[f(t)]=\big[g(t)f(t)\big]_0^1-\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t\\&=f(1)g(1)-\int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

故 $F(1)=0$. 因此当 $x\in[0,1]$ 时 $F(x)\geqslant F(1)=0$. 由此对任何 $a\in[0,1]$ 有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 f(x)g'(x)\mathrm{d}x\geqslant f(a)g(1).$$

20.（本题满分 13 分）

已知齐次线性方程组 (I) $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=0,\\2x_1+3x_2+5x_3=0,\\x_1+x_2+ax_3=0,\end{cases}$ 和 (II) $\begin{cases}x_1+bx_2+cx_3=0,\\2x_1+b^2x_2+(c+1)x_3=0,\end{cases}$ 同解，求 a,b,c 的值.

解. 因方程组 (II) 的未知量个数大于方程个数，故方程组 (II) 有无穷多解. 因为方程组 (I) 与 (II) 同解，所以方程组 (I) 也有无穷多解，故系数矩阵的秩小于 3. 对方程组 (I) 的系数矩阵作初等行变换得

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&a-2\end{pmatrix}.$$

显然 $r(A)\geqslant 2$，又 $r(A)<3$，故 $r(A)=2$，从而 $a=2$. 此时方程组 (I) 的系数矩阵可化为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&5\\1&1&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $(-1,-1,1)^T$ 是方程组 (I) 的基础解系. 将方程组 (I) 的解 $x_1=-1, x_2=-1, x_3=1$ 代入方程组 (II) 可得 $b=1, c=2$ 或 $b=0, c=1$. 当 $b=1, c=2$ 时，对方程组 (II) 的系数矩阵做初等行变换，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

故此时方程组 (I) 与 (II) 同解. 当 $b=0, c=1$ 时，方对方程组 (II) 的系数矩阵做初等行变换，有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故此时方程组 (I) 与 (II) 的解不相同. 综上所述，当 $a=2, b=1, c=2$ 时，方程组 (I) 与 (II) 同解.

21.（本题满分 13 分）

设 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 为正定矩阵，其中 A, B 分别为 m 阶，n 阶对称矩阵，C 为 $m\times n$ 矩阵.

(I) 计算 P^TDP，其中 $P=\begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix}$;

(II) 利用 (I) 的结果判断矩阵 $B-C^TA^{-1}C$ 是否为正定矩阵，并证明你的结论.

解. (I) 因为 $P=\begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix}$，所以 $P^T=\begin{pmatrix} E_m & O \\ -C^T(A^{-1})^T & E_n \end{pmatrix}$. 因为 A 为对称矩阵，故 $A^T=A$, 左右两边取逆, $(A^T)^{-1}=A^{-1}$. 根据可逆矩阵的性质, 又有 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$，故 $(A^{-1})^T=A^{-1}$，故 $P^T=\begin{pmatrix} E_m & O \\ -C^TA^{-1} & E_n \end{pmatrix}$，所以

$$\begin{aligned} P^TDP &= \begin{pmatrix} E_m & O \\ -C^TA^{-1} & E_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & C \\ O & B-C^TA^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B-C^TA^{-1}C \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(II) 矩阵 $B-C^TA^{-1}C$ 是正定矩阵. 事实上，因为 P 可逆，所以由 D 是正定矩阵知 P^TDP 也是正定的. 根据正定的定义，对任意的 $\begin{pmatrix} O \\ Y \end{pmatrix}\neq O$，恒有

$$(O, Y^T)P^TDP\begin{pmatrix} O \\ Y \end{pmatrix} = (O, Y^T)\begin{pmatrix} A & O \\ O & B-C^TA^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O \\ Y \end{pmatrix} > 0.$$

计算分块矩阵乘积得

$$(O, Y^T)\begin{pmatrix} A & O \\ O & B-C^TA^{-1}C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} O \\ Y \end{pmatrix} = (O, Y^T(B-C^TA^{-1}C))\begin{pmatrix} O \\ Y \end{pmatrix}$$

$$=Y^T(B-C^TA^{-1}C)Y.$$

故对任意 $Y\neq O$，有 $Y^T(B-C^TA^{-1}C)Y>0$，从而 $B-C^TA^{-1}C$ 为正定矩阵.

22.（本题满分 13 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ 求：

(Ⅰ) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；

(Ⅱ) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$；

(Ⅲ) $P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X\leqslant\frac{1}{2}\right\}$.

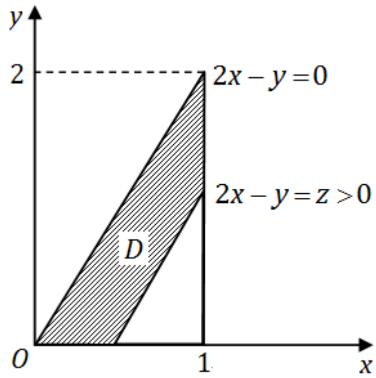
解. (Ⅰ) 由边缘密度函数的定义，关于 X 的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^{2x}\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_{\frac{y}{2}}^{1}\mathrm{d}x, & 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}=\begin{cases}1-\frac{y}{2}, & 0<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(Ⅱ) 由分布函数的定义：$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{2X-Y\leqslant z\}$. 当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=0$. 当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=1$. 当 $0\leqslant z<2$ 时，如图转换成阴影部分的二重积分



$$F_Z(z)=P\{2X-Y\leqslant z\}=\iint_{2x-y\leqslant z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=1-\iint_{2x-y>z}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=1-\int_{\frac{z}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{2x-z}\mathrm{d}y=z-\frac{1}{4}z^2.$$

所以分布函数为

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ z-\frac{1}{4}z^2, & 0\leqslant z<2,\\ 1, & z\geqslant 2.\end{cases}$$

由密度函数与分布函数的关系，所求的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}z, & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(III) 因为

$$P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\iint_{x\leqslant\frac{1}{2},y\leqslant\frac{1}{2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\int_{\frac{y}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x=\frac{3}{16},$$

$$P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

所以由条件概率公式得

$$P\left\{Y\leqslant\frac{1}{2}\middle|X\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\frac{P\left\{X\leqslant\frac{1}{2},Y\leqslant\frac{1}{2}\right\}}{P\left\{X\leqslant\frac{1}{2}\right\}}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{4}}=\frac{3}{4}.$$

23.（本题满分 13 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}$，记 $Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$.

(I) 求 Y_i 的方差 DY_i，$i=1,2,\cdots,n$；

(II) 求 Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$；

(III) 若 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，求常数 c.

解. 由题设知 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 相互独立，且 $EX_i=0,DX_i=\sigma^2(i=1,2,\cdots,n)$,

$$E\overline{X}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=0,$$

$$D\overline{X}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{\sigma^2}{n}.$$

(I) 因为 $Y_i=X_i-\overline{X}$，所以对 $i=1,2,\cdots,n$，有 $EY_i=0$,

$$DY_i=D(X_i-\overline{X})=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}X_j\right]$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

(II) 由协方差的定义：

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=E(Y_1Y_n)-EY_1EY_n=E(Y_1Y_n)$$

$$=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]=E(X_1X_n-X_1\overline{X}-X_n\overline{X}+\overline{X}^2)$$

$$=E(X_1X_n)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})+E(\overline{X}^2).$$

因为 X_1,X_n 独立，有

$$E(X_1X_n)=EX_1EX_n=0\times0=0.$$

由方差的公式，有

$$E(\overline{X}^2)=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{\sigma^2}{n}+0=\frac{\sigma^2}{n}.$$

由期望的性质和方差的公式有

$$E(X_1\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_1X_j\right)=E\left(\frac{1}{n}X_1^2+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}X_1X_j\right)$$

$$=\frac{1}{n}E(X_1^2)+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}EX_1EX_j=\frac{1}{n}\left[DX_1+(EX_1)^2\right]+0$$

$$=\frac{1}{n}(\sigma^2+0)=\frac{\sigma^2}{n}.$$

同理 $E(X_n\overline{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}$．所以

$$\operatorname{Cov}(Y_1,Y_n)=E(X_1X_n)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})+E(\overline{X}^2)$$

$$=0-\frac{\sigma^2}{n}-\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}=-\frac{\sigma^2}{n}.$$

(III) 由 $c(Y_1+Y_n)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，则 $E[c(Y_1+Y_n)^2]=\sigma^2$．而

$$E[c(Y_1+Y_n)^2]=cE[(Y_1+Y_n)^2]=c\left[D(Y_1+Y_n)+[E(Y_1+Y_n)]^2\right]$$

又 $E(Y_1+Y_n)=EY_1+EY_n=0$,

$$D(Y_1+Y_n)=DY_1+DY_2+2\operatorname{Cov}(Y_1,Y_n)$$

$$=\frac{n-1}{n}\sigma^2+\frac{n-1}{n}\sigma^2+2\left(-\frac{\sigma^2}{n}\right)=\frac{2(n-2)}{n}\sigma^2,$$

所以得到

$$E[c(Y_1+Y_n)^2]=c\left[D(Y_1+Y_n)+[E(Y_1+Y_n)]^2\right]=\frac{2(n-2)}{n}c\sigma^2.$$

由 $E[c(Y_1+Y_n)^2]=\sigma^2$，得 $\dfrac{2(n-2)}{n}c\sigma^2=\sigma^2$，解得 $c=\dfrac{n}{2(n-2)}$.

二〇〇五年考研数学试卷四解答

一、填空题（1～6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 同试卷三第一 [1] 题.

2. 同试卷三第一 [2] 题.

3. 同试卷三第一 [3] 题.

4. 同试卷三第一 [4] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

6. 同试卷一第一 [6] 题.

二、选择题（7～14 小题，每小题 4 分，共 32 分）

7. 同试卷三第二 [7] 题.

8. 同试卷三第二 [8] 题.

9. 下列结论中正确的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 都收敛.

(B) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 与 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 都发散.

(C) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 发散，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 收敛.

(D) $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 收敛，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$ 发散.

解. 应选 (D). 计算相应积分并判定其敛散性:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}=\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_1^{+\infty}=\ln 2,$$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}=\left[\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right]_0^1=0-(-\infty)=+\infty.$$

10. 同试卷三第二 [10] 题.

11. 同试卷三第二 [11] 题.

12. 设 A,B,C 均为 n 阶矩阵，E 为 n 阶单位矩阵，若 $B=E+AB$, $C=A+CA$，则 $B-C$ 为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) E.　　　　(B) $-E$.　　　　(C) A.　　　　(D) $-A$.

解. 应选 (A). 事实上，由 $B=E+AB, C=A+CA$ 知

$$(E-A)B=E,\quad C(E-A)=A.$$

可见 $E-A$ 与 B 互为逆矩阵，于是有 $B(E-A)=E$. 从而有

$$(B-C)(E-A)=E-A.$$

而 $E-A$ 可逆，故 $B-C=E$.

13. 同试卷一第二 [13] 题.

14. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为独立同分布的随机变量列，且均服从参数为 $\lambda(\lambda>1)$ 的指数分布，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $\cdots\cdots$ ( )

(A) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(B) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(C) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

(D) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$.

解. 应选 (C). 由题设，$EX_i=\dfrac{1}{\lambda}, DX_i=\dfrac{1}{\lambda^2}$，$i=1,2,\cdots,n,\cdots$，于是

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\frac{n}{\lambda},\quad D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\frac{n}{\lambda^2}.$$

由中心极限定理知

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-\dfrac{n}{\lambda}}{\sqrt{n/\lambda^2}}=\frac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-n}{\sqrt{n}}$$

的极限分布服从标准正态分布，故应选 (C).

三、**解答题**（15～23 小题，共 94 分）

15. 同试卷三第三 [15] 题.

16. 同试卷三第三 [16] 题.

17. 同试卷二第三 [21] 题.

18. (本题满分 9 分)

求 $f(x,y)=x^2-y^2+2$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+\dfrac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$ 上的最大值和最小值.

解. 先求 z 在 D 的内部 $x^2+\dfrac{y^2}{4}<1$ 中的驻点：由 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x, \dfrac{\partial z}{\partial y}=-2y$ 得驻点 $(0,0)$，对应的 $z=f(0,0)=2$. 再求 $z=x^2-y^2+2$ 在 D 的边界 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上的最值：把 $y^2=4(1-x^2)$ 代入 z 的表达式有

$$z=x^2-y^2+2=5x^2-2,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

令 $z'_x=10x=0$ 解得 $x=0$，对应的 $y=\pm2$，$z\big|_{x=0,y=\pm2}=-2$. 还要考虑 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 的端点 $x=\pm1$，对应的 $y=0$，$z\big|_{x=\pm1,y=0}=3$. 由 $z=2,z=-2,z=3$ 比较大小，故 $z=f(x,y)$ 在椭圆域 D 的最小值为 -2（对应于 $x=0$，$y=\pm2$），最大值为 3（对应于 $x=0$，$y=\pm2$）.

19. 同试卷三第三 [19] 题.

20. 同试卷三第三 [20] 题.

21.（本题满分 13 分）

设 A 为三阶矩阵，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，且满足

$$A\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\quad A\alpha_2=2\alpha_2+\alpha_3,\quad A\alpha_3=2\alpha_2+3\alpha_3.$$

(I) 求矩阵 B，使得 $A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B$；

(II) 求矩阵 A 的特征值；

(III) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解. (I) 由题设条件有

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&2&2\\1&1&3\end{pmatrix}.$$

(II) 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的三维列向量，可知矩阵 $C=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 可逆，所以 $C^{-1}AC=B$，即矩阵 A 与 B 相似，由此可得矩阵 A 与 B 有相同的特征值. 由 $|\lambda E-B|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&0\\-1&\lambda-2&-2\\-1&-1&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-4)=0$，得矩阵 B 的特征值，也即矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=4$.

(III) 对应于 $\lambda_1=\lambda_2=1$，解齐次线性方程组 $(E-B)X=0$，得基础解系

$$\xi_1=(-1,1,0)^T,\quad \xi_2=(-2,0,1)^T;$$

对应于 $\lambda_3=4$，解齐次线性方程组 $(4E-B)X=0$，得基础解系

$$\xi_3=(0,1,1)^T.$$

令矩阵

$$Q=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},$$

则有

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

因 $Q^{-1}BQ=Q^{-1}C^{-1}ACQ=(CQ)^{-1}A(CQ)$，记矩阵

$$P=CQ=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}=(-\alpha_1+\alpha_2,-2\alpha_1+\alpha_3,\alpha_2+\alpha_3),$$

故 P 即为所求的可逆矩阵.

22. 同试卷三第三 [22] 题.

23.（本题满分 13 分）

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 为来自总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，其样本均值为 $\overline{X}$，记 $Y_i=X_i-\overline{X}$，$i=1,2,\cdots,n$．求：

(I) Y_i 的方差 DY_i，$i=1,2,\cdots,n$；

(II) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)$；

(III) $P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}$.

解. 由题设知 $X_1,X_2,\cdots,X_n(n>2)$ 相互独立，且 $EX_i=0,DX_i=\sigma^2(i=1,2,\cdots,n)$,

$$E\overline{X}=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i=0,$$

$$D\overline{X}=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}DX_i=\frac{\sigma^2}{n}.$$

(I) 因为 $Y_i=X_i-\overline{X}$，所以对 $i=1,2,\cdots,n$，有 $EY_i=0$,

$$DY_i=D(X_i-\overline{X})=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{j\neq i}X_j\right]$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}\sigma^2+\frac{1}{n^2}\cdot(n-1)\sigma^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$

(II) 由协方差的定义：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)&=E(Y_1Y_n)-EY_1EY_n=E(Y_1Y_n)\\&=E[(X_1-\overline{X})(X_n-\overline{X})]=E(X_1X_n-X_1\overline{X}-X_n\overline{X}+\overline{X}^2)\\&=E(X_1X_n)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})+E(\overline{X}^2).\end{aligned}$$

因为 X_1,X_n 独立，有

$$E(X_1X_n)=EX_1EX_n=0\times 0=0.$$

由方差的公式，有

$$E(\overline{X}^2)=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=\frac{\sigma^2}{n}+0=\frac{\sigma^2}{n}.$$

由期望的性质和方差的公式有

$$E(X_1\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_1X_j\right)=E\left(\frac{1}{n}X_1^2+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}X_1X_j\right)$$

$$=\frac{1}{n}E(X_1^2)+\frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}EX_1EX_j=\frac{1}{n}\left[DX_1+(EX_1)^2\right]+0$$

$$=\frac{1}{n}(\sigma^2+0)=\frac{\sigma^2}{n}.$$

同理 $E(X_n\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$．所以

$$\mathrm{Cov}(Y_1,Y_n)=E(X_1X_n)-E(X_1\overline{X})-E(X_n\overline{X})+E(\overline{X}^2)$$

$$=0-\frac{\sigma^2}{n}-\frac{\sigma^2}{n}+\frac{\sigma^2}{n}=-\frac{\sigma^2}{n}.$$

(III) 因为 Y_1+Y_n 是相互独立的正态随机变量的线性组合：

$$Y_1+Y_n=X_1-\overline{X}+X_n-\overline{X}=\frac{n-2}{n}X_1-\frac{2}{n}\sum_{i=2}^{n-1}X_i+\frac{n-2}{n}X_n,$$

所以 Y_1+Y_n 服从正态分布．由于 $E(Y_1+Y_n)=0$，故 $P\{Y_1+Y_n\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$.

二〇〇六年考研数学试卷三解答

一、填空题（1～6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{(-1)^n}=$ ________.

解. 应填 1. 由无穷小量的性质有：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left((-1)^n\ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\right)=\mathrm{e}^0=1$.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=2$ 的某邻域内可导，且 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}, f(2)=1$，则 $f'''(2)=$ ________.

解. 应填 $2\mathrm{e}^3$. 由 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$ 可得

$$f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)},\quad f'''(x)=2\mathrm{e}^{2f(x)}f'(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)}.$$

以 $x=2$ 代入，得 $f'''(2)=2\mathrm{e}^{3f(2)}=2\mathrm{e}^3$.

3. 设函数 $f(u)$ 可微, 且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$, 则 $z=f\left(4x^2-y^2\right)$ 在点 $(1,2)$ 处的全微分 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=$ ________.

解. 应填 $4\,\mathrm{d}x-2\,\mathrm{d}y$. 由全微分的形式不变性有

$$\mathrm{d}z=f'(4x^2-y^2)d(4x^2-y^2)=f'(4x^2-y^2)(8x\,\mathrm{d}x-2y\,\mathrm{d}y),$$

所以 $\mathrm{d}z\big|_{(1,2)}=f'(0)(8\,\mathrm{d}x-4\,\mathrm{d}y)=4\,\mathrm{d}x-2\,\mathrm{d}y$.

4. 同试卷一第一 [5] 题.

5. 同试卷一第一 [6] 题.

6. 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}$（$-\infty<x<+\infty$），$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为总体 X 的简单随机样本，其样本方差 S^2，则 $ES^2=$ ________.

解. 应填 2. 因为样本方差是总体方差的无偏估计量，所以

$$E(S^2)=D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x-\left[\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x\right]^2$$

$$=2\int_0^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x-0=-\int_0^{+\infty}x^2\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)=\left[-x^2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\left(x^2\right)$$

$$=0-2\int_0^{\infty}x\,\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)=\left[-2x\mathrm{e}^{-x}\right]_0^{+\infty}+2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=0+2=2.$$

二、选择题（7～14 小题，每小题 4 分，共 32 分）

7. 同试卷一第二 [7] 题.

8. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $f(0)=0$ 且 $f'_-(0)$ 存在. (B) $f(0)=1$ 且 $f'_-(0)$ 存在.

(C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在. (D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

解. 应选 (C). 令 $x=h^2$，由题设可得

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h^2)}{h^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=1.$$

因为函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，所以

$$f(0)=\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}\cdot x=1\cdot0=0.$$

由导数的定义有

$$1=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'_+(0),$$

即 $f'_+(0)$ 存在.

9. 同试卷一第二 [9] 题.

10. 设非齐次线性微分方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 有两个不同的解 $y_1(x),y_2(x)$，C 为任意常数，则该方程通解是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$. (B) $y_1(x)+C\left[y_1(x)-y_2(x)\right]$.

(C) $C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$. (D) $y_1(x)+C\left[y_1(x)+y_2(x)\right]$.

解. 应选 (B). 因为 $y_1(x)\neq y_2(x)$，所以 $y_1(x)-y_2(x)$ 是齐次微分方程的一个非零解，所以 $C(y_1(x)-y_2(x))$ 是对应的齐次微分方程的通解. 再加上原非齐次方程的一个特解，即得原非齐次方程的通解.

11. 同试卷一第二 [10] 题.

12. 同试卷一第二 [11] 题.

13. 同试卷一第二 [12] 题.

14. 同试卷一第二 [14] 题.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 7 分）

设 $f(x,y)=\dfrac{y}{1+xy}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}$, $x>0,y>0$，求

(I) $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f\left(x,y\right)$； (II) $\lim\limits_{x\to0^+}g(x)$.

解. (I) 由于 $x\neq 0$，所以

$$\lim_{y\to+\infty}\frac{y}{1+xy}=\lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{y}+x}=\frac{1}{x},\quad \lim_{y\to+\infty}y\sin\frac{\pi x}{y}=\lim_{y\to+\infty}y\cdot\frac{\pi x}{y}=\pi x,$$

所以 $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,y)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1-\pi x}{\arctan x}$.

(II) 由等价无穷小量代换和洛必达法则有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+}g(x)&=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1+2\pi x}{2x}\\&=\lim_{x\to0^+}\frac{-x+2\pi+2\pi x^2}{2(1+x^2)}=\pi.\end{aligned}$$

16. (本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是由直线 $y=x,y=1,x=0$ 所围成的平面区域.

解. 积分区域 $D=\{(x,y)\big|0\leqslant y\leqslant1,0\leqslant x\leqslant y\}$，故

$$\begin{aligned}\iint_D\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y\sqrt{y^2-xy}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{2}{3}\int_0^1\left[\sqrt{y}(y-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^1y^2\,\mathrm{d}y=\frac{2}{9}.\end{aligned}$$

17. 同试卷二第三 [19] 题.

18. (本题满分 8 分)

在 xOy 坐标平面上，连续曲线 L 过点 $M(1,0)$，其上任意点 $P(x,y)$ ($x\neq0$) 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 ax (常数 $a>0$).

(I) 求 L 的方程;

(II) 当 L 与直线 $y=ax$ 所围成平面图形的面积为 $\frac{8}{3}$ 时，确定 a 的值.

解. (I) 设所求的曲线方程为 $y=y(x)$，按题意有 $y'-\frac{y}{x}=ax$，而且有初始条件 $y(1)=0$. 解一阶线性微分方程，得到

$$y=\mathrm{e}^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int ax\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=x\left[\int a\,\mathrm{d}x+C\right]=x(ax+C).$$

再由 $y(1)=0$ 得 $C=-a$，于是所求的曲线方程为 $y=ax(x-1)$.

(II) 直线 $y=ax$ 与曲线 $y=ax(x-1)$ 的交点 $(0,0)$ 与 $(2,2a)$. 所以直线 $y=ax$ 与曲线 $y=ax(x-1)$ 所围平面图形的面积为

$$S(a)=\int_0^2[ax-ax(x-1)]\mathrm{d}x=\int_0^2[2ax-ax^2]\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a.$$

于是按题意得 $\frac{4}{3}a=\frac{8}{3}$，故 $a=2$.

19.（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $S(x)$.

解. 记 $u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=x^2$. 所以当 $x^2<1$ 即 $|x|<1$ 时，级数绝对收敛；当 $x^2>1$，即 $|x|>1$ 时，级数发散；在 $x=\pm1$ 处 $u_n=\dfrac{\pm(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛；从而级数的收敛域为 $[-1,1]$. 由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)},$$

令 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$ $(-1<x<1)$，则有

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1},\qquad f''(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{2}{1+x^2}.$$

从而有

$$f'(x)=f'(0)+\int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t=0+\int_0^x\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t=2\arctan x,$$

$$\begin{aligned}f(x)&=f(0)+\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t=0+2\int_0^x\arctan t\,\mathrm{d}t\\&=2[t\arctan t]_0^x-2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2x\arctan x-\ln(1+x^2).\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),\quad -1<x<1.$$

又因为在 $x=\pm1$ 处级数收敛，右边和函数的表达式在 $x=\pm1$ 处连续，因此在 $x=\pm1$ 处上式仍成立，从而有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}=2x^2\arctan x-x\ln(1+x^2),\quad -1\leqslant x\leqslant 1.$$

20.（本题满分 13 分）

设 4 维向量组 $\alpha_1=(1+a,1,1,1)^T$, $\alpha_2=(2,2+a,2,2)^T$, $\alpha_3=(3,3,3+a,3)^T$, $\alpha_4=(4,4,4,4+a)^T$. 问 a 为何值时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关？当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时，求其一个极大线性无关组，并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

解. 记 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，对 A 作初等行变换，得到

$$A=\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\1&2+a&3&4\\1&2&3+a&4\\1&2&3&4+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a&2&3&4\\-a&a&0&0\\-a&0&a&0\\-a&0&0&a\end{pmatrix}=B.$$

当 $a=0$ 时，$r(A)=r(B)=1$，因而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关. 此时 α_1 为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\alpha_2=2\alpha_1,\alpha_3=3\alpha_1,\alpha_4=4\alpha_1$. 当 $a\neq 0$ 时，再对 B 作初等行变换，得到

$$B\rightarrow\begin{pmatrix}1+a & 2 & 3 & 4\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}a+10 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}=C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4).$$

若 $a\neq -10$，则 C 的秩为 4，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关. 若 $a=-10$，则 C 的秩为 3，故 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关. 由于 $\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 是 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\gamma_1=-\gamma_2-\gamma_3-\gamma_4$，于是 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的一个极大线性无关组，且 $\alpha_1=-\alpha_2-\alpha_3-\alpha_4$.

21. (本题满分 13 分)

设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3,向量 $\alpha_1=(-1,2,-1)^T$,$\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 是线性方程组 $Ax=0$ 的两个解.

(I) 求 A 的特征值与特征向量;

(II) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ，使得 $Q^TAQ=\Lambda$;

(III) 求 A 及 $\left(A-\frac{3}{2}E\right)^6$，其中 E 为 3 阶单位矩阵.

解. (I) 由题设条件 $A\alpha_1=0=0\alpha_1$，$A\alpha_2=0=0\alpha_2$，故 α_1,α_2 是 A 的对应于 $\lambda=0$ 的特征向量，又因为 α_1,α_2 线性无关，故 $\lambda=0$ 至少是 A 的二重特征值. 又因为 A 的每行元素之和为 3，所以有 $A(1,1,1)^T=(3,3,3)^T=3(1,1,1)^T$，所以 $\alpha_3=(1,1,1)^T$ 是 A 的对应于特征值 $\lambda_3=3$ 的特征向量，从而知 $\lambda=0$ 是二重特征值. 于是 A 的特征值为 $0,0,3$；属于 0 的特征向量是 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，k_1,k_2 不都为 0；属于 3 的特征向量是 $k_3\alpha_3$，$k_3\neq 0$.

(II) 将特征向量 α_1,α_2 正交化得

$$\beta_1=\alpha_1=(-1,2,-1)^T,\quad \beta_2=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right).$$

再将 β_1,β_2,α_3 单位化，得

$$\eta_1=\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^T,\quad \eta_2=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T,\quad \eta_3=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^T.$$

令 $Q=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$，则 Q 是正交矩阵，并且 $Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$.

(III) 由 $Q^TAQ=\Lambda$，其中 $Q^T=Q^{-1}$，得到

$$A=Q\Lambda Q^T=\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt6}{6}&\frac{-\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{\sqrt6}{3}&0&\frac{\sqrt3}{3}\\ \frac{-\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt2}{2}&\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&&\\&0&\\&&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt6}{6}&\frac{\sqrt6}{3}&\frac{-\sqrt6}{6}\\ \frac{-\sqrt2}{2}&0&\frac{\sqrt2}{2}\\ \frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}&\frac{\sqrt3}{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},$$

$$\left(A-\frac32E\right)^6=\left(Q\Lambda Q^T-\frac32E\right)^6=\left(Q\left(\Lambda-\frac32E\right)Q^T\right)^6=Q\left(\Lambda-\frac32E\right)^6Q^T$$

$$=Q\begin{pmatrix}-\frac32&&\\&-\frac32&\\&&\frac32\end{pmatrix}^6Q^T=\left(\frac32\right)^6QEQ^T=\left(\frac32\right)^6E.$$

22.（本题满分 13 分）

随机变量 x 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac12, & -1<x<0;\\ \frac14, & 0\leqslant x<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

令 $Y=X^2$，$F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数．求

(I) Y 的概率密度 $f_Y(y)$；(II) $\mathrm{Cov}(X,Y)$；(III) $F\left(-\frac12,4\right)$.

解. (I) 因为 $F_Y(y)=P\left\{Y\leqslant y\right\}=P\left\{X^2\leqslant y\right\}$，分情况讨论：当 $y<0$ 时，$F_Y(y)=0$；

当 $0\leqslant y<1$ 时，

$$F_Y(y)=P(-\sqrt y\leqslant X\leqslant\sqrt y)=\int_{-\sqrt y}^0\frac12\,\mathrm dx+\int_0^{\sqrt y}\frac14\,\mathrm dx=\frac34\sqrt y;$$

当 $1\leqslant y<4$ 时，

$$F_Y(y)=P(-\sqrt y\leqslant X\leqslant\sqrt y)=\int_{-1}^0\frac12\,\mathrm dx+\int_0^{\sqrt y}\frac14\,\mathrm dx=\frac12+\frac14\sqrt y;$$

当 $y\geqslant4$ 时，$F_Y(y)=1$．综上所述，有

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0;\\ \frac34\sqrt y, & 0\leqslant y<1;\\ \frac12+\frac14\sqrt y, & 1\leqslant y<4;\\ 1, & y\geqslant4.\end{cases}$$

由概率密度是分布函数在对应区间上的的微分，所以

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\frac{3}{8\sqrt y}, & 0<y<1;\\ \frac{1}{8\sqrt y}, & 1\leqslant y<4;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(II) 因为数学期望

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x^2}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{6},$$

$$E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f_X(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{x^3}{2}\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\frac{x^3}{4}\,\mathrm{d}x=\frac{7}{8},$$

所以协方差

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(X,X^2)=E(X^3)-E(X)(X^2)=\frac{7}{8}-\frac{1}{4}\times\frac{5}{6}=\frac{2}{3}.$$

(III) 根据二维随机变量的定义有

$$F\left(-\frac{1}{2},4\right)=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},Y\leqslant 4\right\}=P\left\{X\leqslant-\frac{1}{2},X^2\leqslant 4\right\}$$

$$=P\left\{-2\leqslant X\leqslant-\frac{1}{2}\right\}=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}.$$

23.（本题满分 13 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta, & 0<x<1,\\ 1-\theta, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中 θ 是未知参数（$0<\theta<1$），$X_1,X_2\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，记 N 为样本值 $x_1,x_2\cdots,x_n$ 中小于 1 的个数，求：

(I) θ 的矩估计；(II) θ 的最大似然估计.

解. (I) 由数学期望的定义有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x;\theta)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\theta x\,\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(1-\theta)x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\theta+\frac{3}{2}(1-\theta)=\frac{3}{2}-\theta.$$

用样本均值估计期望有 $EX=\overline{X}$，即 $\frac{3}{2}-\theta=\overline{X}$，解得 $\theta=\frac{3}{2}-\overline{X}$. 所以参数 θ 的矩估计为 $\hat{\theta}=\frac{3}{2}-\overline{X}$，其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$.

(II) 依题设，似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}\theta^N(1-\theta)^{n-N}, & 0<x_{i_1},x_{i_2},\cdots x_{i_N}<1,1\leqslant x_{i_{N+1}},x_{i_{N+2}},\cdots x_{i_n}<2;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在 $0<x_{i_1},x_{i_2},\cdots x_{i_N}<1$，$1\leqslant x_{i_{N+1}},x_{i_{N+2}},\cdots x_{i_n}<2$ 时，等式两边同取对数得

$$\ln L(\theta)=N\ln\theta+(n-N)\ln(1-\theta).$$

两边对 θ 求导并令导数为零，得到

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=\frac{N}{\theta}-\frac{n-N}{1-\theta}=0,$$

解得 $\theta=\dfrac{N}{n}$，所以 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{N}{n}$.

二〇〇六年考研数学试卷四解答

一、填空题（1～6 小题，每小题 4 分，共 24 分）

1. 同试卷三第一 [1] 题.

2. 同试卷三第一 [2] 题.

3. 同试卷三第一 [3] 题.

4. 已知 a_1, a_2 为 2 维列向量，矩阵 $A=(2a_1+a_2, a_1-a_2)$，$B=(a_1, a_2)$. 若行列式 $|A|=6$，则 $|B|=$ ________.

解. 应填 -2. 因为

$$A=(2a_1+a_2, a_1-a_2)=(a_1, a_2)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

所以 $|A|=|B|\cdot(-3)$，从而 $|B|=-2$.

5. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, E 为 2 阶单位矩阵, 矩阵 B 满足 $BA=B+2E$, 则 B ________.

解. 应填 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$. 由 $BA=B+2E$ 可得 $B(A-E)=2E$，于是

$$B=2(A-E)^{-1}=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}=2\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

6. 同试卷一第一 [6] 题.

二、选择题（7～14 小题，每小题 4 分，共 32 分）

7. 同试卷一第二 [7] 题.

8. 同试卷三第二 [8] 题.

9. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(x)\leqslant g(x)$，且对任何 $C\in(0,1)$, $\cdots$ (　)

(A) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)\mathrm{d}t$.　　(B) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{c} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{\frac{1}{2}}^{c} g(t)\mathrm{d}t$.

(C) $\displaystyle\int_{c}^{1} f(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_{c}^{1} g(t)\mathrm{d}t$.　　(D) $\displaystyle\int_{c}^{1} f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_{c}^{1} g(t)\mathrm{d}t$.

解. 应选 (D). 由定积分在区间上的保号性即可得到.

10. 同试卷三第二 [10] 题.

11. 同试卷一第二 [10] 题.

12. 同试卷一第二 [12] 题.

13. 同试卷一第二 [13] 题.

14. 同试卷一第二 [14] 题.

三、**解答题**（15～23 小题，共 94 分）

15. 同试卷三第三 [15] 题.

16. 同试卷三第三 [16] 题.

17. 同试卷二第三 [19] 题.

18. 同试卷三第三 [18] 题.

19. 同试卷二第三 [15] 题.

20. 同试卷三第三 [20] 题.

21. 同试卷三第三 [21] 题.

22.（本题满分 13 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1
-1	a	0	0.2
0	0.1	b	0.2
1	0	0.1	c

其中 a, b, c 为常数，且 X 的数学期望 $EX=-0.2$，$P\{Y\leqslant 0|X\leqslant 0\}=0.5$，记 $Z=X+Y$，求：

(I) a,b,c 的值；(II) Z 的概率分布；(III) $P\{X=Z\}$.

解. (I) 由概率分布的性质知

$$a+b+c+0.2+0.2+0.1+0.1=a+b+c+0.6=1.$$

又由已知条件得

$$E(X)=-(a+0.2)+(c+0.1)=-0.2,$$

$$P\{Y\leqslant 0|X\leqslant 0\}=\frac{P\{X\leqslant 0,Y\leqslant 0\}}{P\{X\leqslant 0\}}=\frac{a+b+0.1}{a+b+0.5}=0.5.$$

所以可以解得 $a=0.2,b=0.1,c=0.1$.

(II) Z 的概率分布为

Z	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.3	0.3	0.1

(III) $P\{X=Z\}=P\{Y=0\}=0+0.1+0.1=0.2.$

23. 同试卷三第三 [22] 题.

二〇〇七年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$.　　(B) $\ln(1+\sqrt{x})$.　　(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$.　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$.

解. 应选 (B). 由几个常见的等价无穷小，当 $x \to 0$ 时，

$$1-e^{\sqrt{x}} \sim -\sqrt{x},\qquad \ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x},$$

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1 \sim \frac{1}{2}\sqrt{x},\qquad 1-\cos\sqrt{x} \sim \frac{1}{2}(\sqrt{x})^2.$$

由此可以排除 (A)，(C)，(D). 并选择 (B).

2. 同试卷一第一 [4] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷二第一 [8] 题.

5. 设某商品的需求函数为 $Q=160-2p$，其中 Q，p 分别表示需要量和价格，如果该商品需求弹性的绝对值等于 1，则商品的价格是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) 10.　　(B) 20.　　(C) 30.　　(D) 40.

解. 应选 (D). 由需求弹性的定义知

$$\left|\frac{Q'(p)}{Q(p)}p\right| = \left|\frac{-2}{160-2p}p\right| = \left|\frac{p}{80-p}\right| = 1.$$

若 $\dfrac{p}{p-80}=1$，$p=p-80$，无意义；若 $\dfrac{p}{80-p}=1$，解得 $p=40$. 所以选 (D).

6. 同试卷一第一 [2] 题.

7. 同试卷一第一 [7] 题.

8. 同试卷一第一 [8] 题.

9. 同试卷一第一 [9] 题.

10. 同试卷一第一 [10] 题.

二、填空题（11～16 小题，每小题 4 分，共 24 分）

11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x) = $ ________.

解. 应填 0. 事实上，由洛必达法则，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^2+2x}{2^x\ln 2+3x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x+2}{2^x(\ln 2)^2+6x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{2^x(\ln 2)^3+6}=0,$$

而 $\sin x+\cos x$ 是有界变量，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2+1}{2^x+x^3}(\sin x+\cos x)=0.$$

12. 同试卷二第二 [13] 题.

13. 同试卷二第二 [15] 题.

14. 微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^3$ 满足 $y\big|_{x=1}=1$ 的特解为 $y=$________.

解. 应填 $\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$. 令 $u=\frac{y}{x}$，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}(ux)}{\mathrm{d}x}=ux'+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

原方程化为

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=u-\frac{1}{2}u^3 \quad\Rightarrow\quad \frac{2\,\mathrm{d}u}{u^3}=-\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

此式为变量可分离的微分方程，两边积分，

$$\int\frac{2\,\mathrm{d}u}{u^3}=-\int\frac{\mathrm{d}x}{x} \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{u^2}=-\ln x+C_1.$$

得 $\frac{1}{u^2}=\ln x+C$，即 $\frac{x^2}{y^2}=\ln|x|+C$. 由 $y\big|_{x=1}=1$ 知应取 $x>0,y>0$ 且 $C=1$，所以得特解 $y=\frac{x}{\sqrt{1+\ln x}}$.

15. 同试卷一第二 [15] 题.

16. 同试卷一第二 [16] 题.

三、解答题（17～24 小题，共 86 分）

17.（本题满分 10 分）

设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y\ln y-x+y=0$ 确定，试判断曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,1)$ 附近的凹凸性.

解. 对方程两边求导得

$$y'\ln y+y\cdot\frac{1}{y}\cdot y'-1+y'=y'\ln y+2y'-1=0.$$

移项得 $y'=\frac{1}{2+\ln y}$. 再两边求导得

$$y''=-\frac{(\ln y)'}{(2+\ln y)^2}=-\frac{y'}{y(2+\ln y)^2}=-\frac{1}{y(2+\ln y)^3}.$$

在 $(1,1)$ 点的值为

$$y''\big|_{x=1}=-\frac{1}{1\cdot(2+\ln 1)^3}=-\frac{1}{8}<0.$$

又由 y'' 在 $y=1$ 的附近连续，所以在 $y=1$ 的附近 $y''<0$，曲线为凸.

18. 同试卷二第三 [22] 题.

19.（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导且存在相等的最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明:

(I) 存在 $\eta\in(a,b)$，使得 $f(\eta)=g(\eta)$;

(II) 存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

解. (I) 令 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，由题设 $f(x),g(x)$ 存在相等的最大值，设 $x_1\in(a,b)$，$x_2\in(a,b)$ 使得

$$f(x_1)=\max_{[a,b]}f(x)=g(x_2)=\max_{[a,b]}g(x).$$

于是 $\varphi(x_1)=f(x_1)-g(x_1)\geqslant 0$，$\varphi(x_2)=f(x_2)-g(x_2)\leqslant 0$. 若 $\varphi(x_1)=0$，则取 $\eta=x_1\in(a,b)$，有 $\varphi(\eta)=0$. 若 $\varphi(x_2)=0$，则取 $\eta=x_2\in(a,b)$，有 $\varphi(\eta)=0$. 若 $\varphi(x_1)>0,\varphi(x_2)<0$，则由连续函数介值定理知，存在 $\eta\in(x_1,x_2)$ 使 $\varphi(\eta)=0$. 不论以上哪种情况，总存在 $\eta\in(a,b)$，使 $\varphi(\eta)=0$，即 $f(\eta)=g(\eta)$.

(II) 因为

$$\varphi(a)=f(a)-g(a)=0,\quad \varphi(\eta)=0,\quad \varphi(b)=f(b)-g(b)=0.$$

则由罗尔定理，存在 $\xi_1\in(a,\eta),\xi_2\in(\eta,b)$，使得 $\varphi'(\xi_1)=0,\varphi'(\xi_2)=0$；再由罗尔定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $\varphi''(\xi)=0$，即有 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

20.（本题满分 10 分）

将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数，并指出其收敛区间.

解. 先对函数作恒等变形，得到

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x-4}=\frac{1}{(x-4)(x+1)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+1}\right).$$

当 $\left|\dfrac{x-1}{3}\right|<1$ 即 $-2<x<4$ 时有

$$\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-1-3}=\frac{1}{-3+(x-1)}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{3}\right)}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n.$$

当 $\left|-\dfrac{x-1}{2}\right|<1$ 即 $-1<x<3$ 时有

$$\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x-1+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(-\frac{x-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n.$$

所以，$f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x-4}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数为：

$$f(x)=\frac{1}{5}\left[-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{3}\right)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-1}{2}\right)^n\right]=-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right)(x-1)^n,$$

其中 $-1<x<3$.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23. 同试卷一第三 [23] 题.

24. 同试卷一第三 [24] 题.

二〇〇七年考研数学试卷四解答

一、**选择题**（1～10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

1. 同试卷三第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [4] 题.

3. 同试卷一第一 [3] 题.

4. 同试卷二第一 [8] 题.

5. 同试卷三第一 [5] 题.

6. 同试卷一第一 [2] 题.

7. 同试卷一第一 [7] 题.

8. 同试卷一第一 [8] 题.

9. 同试卷一第一 [9] 题.

10. 同试卷一第一 [10] 题.

二、**填空题**（11～16 小题，每小题 4 分，共 24 分）

11. 同试卷三第二 [11] 题.

12. 同试卷二第二 [13] 题.

13. 同试卷二第二 [15] 题.

14. 同试卷三第二 [14] 题.

15. 同试卷一第二 [15] 题.

16. 同试卷一第二 [16] 题.

三、**解答题**（17～24 小题，共 86 分）

17. 同试卷三第三 [17] 题.

18. 同试卷二第三 [22] 题.

19. 同试卷三第三 [19] 题.

20.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，且满足 $f(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)\mathrm{d}t+x^2$，求 $f(x)$ 的表达式.

解. 易知 $f(0)=0$，对恒等式两边求导得 $f'(x)-2xf(x)=2x$，解得 $y=\mathrm{e}^{x^2}-1$.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23. 同试卷一第三 [23] 题.

24.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的概率分布为

X	1	2
P	2/3	1/3

记 $U=\max\{X,Y\}$, $V=\min\{X,Y\}$.

(I) 求 (U,V) 的概率分布；

(II) 求 U 与 V 的协方差 $\mathrm{Cov}(U,V)$.

解. (I) (U,V) 有三个可能值：(1,1)，(2,1)，(2,2). 计算概率分布：

$$P\{U=1,V=1\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9},$$

$$P\{U=2,V=1\}=P\{X=2,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}=2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{9},$$

$$P\{U=2,V=2\}=P\{X=2,Y=2\}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9}.$$

(II) 因为

$$EU=P\{U=1\}\cdot 1+P\{U=2\}\cdot 2=\frac{14}{9},$$

$$EV=P\{V=1\}\cdot 1+P\{V=2\}\cdot 2=\frac{10}{9},$$

$$E(UV)=P\{U=1,V=1\}\cdot 1+P\{U=2,V=1\}\cdot 2+P\{U=2,V=2\}\cdot 4=\frac{16}{9}.$$

所以 $\mathrm{Cov}(U,V)=E(UV)-EU\cdot EV=\frac{4}{81}$.

二〇〇八年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上连续，则 $x=0$ 是函数 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}$ 的 $\cdots\cdots$ (　　)

(A) 跳跃间断点.　(B) 可去间断点.　(C) 无穷间断点.　(D) 振荡间断点.

解. 应选 (B). 因为由洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0} f(x)=f(0),$$

所以 $x=0$ 是函数 $g(x)$ 的可去间断点.

2. 同试卷二第一 [2] 题.

3. 设 $f(x,y)=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^4}}$，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都存在.　(B) $f_x'(0,0)$ 存在，$f_y'(0,0)$ 不存在.

(C) $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在.　(D) $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都不存在.

解. 应选 (C). 因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x},$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{\mathrm{e}^{y^2}-1}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y}=0,$$

所以 $f_x'(0,0)$ 不存在，$f_y'(0,0)$ 存在.

4. 同试卷二第一 [6] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

6. 同试卷二第一 [8] 题.

7. 同试卷一第一 [7] 题.

8. 同试卷一第一 [8] 题.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\leqslant c,\\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，则 $c=$ ________.

解. 应填 1. 由题设知 $f(x)$ 在 $x=c$ 和 $x=-c$ 处都连续，所以

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c),\quad \lim_{x\to -c^+} f(x)=\lim_{x\to -c^-} f(x)=f(-c),$$

从而 $\frac{2}{c}=c^2+1$，解得 $c=1$.

10. 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}$，则积分 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=$________.

解. 应填 $\frac{1}{2}\ln 3$. 因为

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{\frac{1}{x}+x}{\frac{1}{x^2}+x^2}=\frac{\frac{1}{x}+x}{\left(\frac{1}{x}+x\right)^2-2},$$

令 $t=\frac{1}{x}+x$，得 $f(t)=\frac{t}{t^2-2}$. 所以

$$\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{x}{x^2-2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2-2\right)\right]_2^{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

11. 设 $D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\right\}$，则 $\iint_D (x^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$________.

解. 应填 $\frac{\pi}{4}$. 奇偶对称性和轮换对称性，可得

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2 r\,\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

12. 同试卷一第二 [9] 题.

13. 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 1,2,2，E 为 3 阶单位矩阵，则 $\left|4A^{-1}-E\right|=$________.

解. 应填 3. A 的特征值为 $1,2,2$，所以 A^{-1} 的特征值为 $1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}$，所以 $4A^{-1}-E$ 的特征值为 $3,1,1$，所以 $\left|4A^{-1}-E\right|=3\times 1\times 1=3$.

14. 同试卷一第二 [14] 题.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 9 分）

计算 $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}$.

解. 由等价无穷小量代换和洛必达法则，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{x}-1}{x^2}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

16. (本题满分 10 分)

设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2+y^2-z=\varphi(x+y+z)$ 所确定的函数，其中 φ 具有 2 阶导数且 $\varphi'\neq-1$.

(I) 求 $\mathrm{d}z$；(II) 记 $u(x,y)=\dfrac{1}{x-y}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$.

解. (I) 对方程 $x^2+y^2-z=\varphi\left(x+y+z\right)$ 两端求微分得

$$2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y-\mathrm{d}z=\varphi'\left(x+y+z\right)\cdot\left(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z\right)$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}z=\frac{\left(-\varphi'+2x\right)\mathrm{d}x+\left(-\varphi'+2y\right)\mathrm{d}y}{\varphi'+1}.$$

(II) 由 (I) 可知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1}.$$

所以

$$u(x,y)=\frac{1}{x-y}\left(\frac{-\varphi'+2x}{\varphi'+1}-\frac{-\varphi'+2y}{\varphi'+1}\right)=\frac{1}{x-y}\cdot\frac{-2y+2x}{\varphi'+1}=\frac{2}{\varphi'+1},$$

从而

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2\varphi''\left(1+\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(\varphi'+1\right)^2}=-\frac{2\varphi''\left(1+\dfrac{2x-\varphi'}{1+\varphi'}\right)}{\left(\varphi'+1\right)^2}=-\frac{2(1+2x)\varphi''}{\left(\varphi'+1\right)^3}.$$

17. 同试卷二第三 [18] 题.

18. (本题满分 10 分)

设 $f(x)$ 是周期为 2 的连续函数.

(I) 证明对任意实数 t 都有 $\displaystyle\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$；

(II) 证明 $G(x)=\displaystyle\int_0^x\left[2f(t)-\int_t^{t+2}f(s)\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}t$ 是周期为 2 的周期函数.

解. (I) 设 $F(t)=\displaystyle\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x$，由于 $F'(t)=f(t+2)-f(t)=0$，所以 $F(t)$ 为常数，从而有 $F(t)=F(0)=\displaystyle\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$，即 $\displaystyle\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

(II) 由 (I) 知，对任意的 t 有 $\displaystyle\int_t^{t+2}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^2 f(x)dx$，记 $a=\displaystyle\int_0^2 f(x)dx$，则

$$G(x)=2\int_0^x f(u)\mathrm{d}u-ax,\quad G(x+2)=2\int_0^{x+2}f(u)\mathrm{d}u-a(x+2).$$

由于对任意 x，

$$(G(x))'=2f(x)-a,\quad (G(x+2))'=2f(x+2)-a=2f(x)-a.$$

所以 $(G(x+2)-G(x))'=0$，从而 $G(x+2)-G(x)$ 是常数，即有

$$G(x+2)-G(x)=G(2)-G(0)=0,$$

所以 $G(x)$ 是周期为 2 的周期函数.

19.（本题满分 10 分）

设银行存款的年利率为 $r=0.05$，并依年复利计算．某基金会希望通过存款 A 万元实现第一年提取 19 万元，第二年提取 28 万元，……，第 n 年取出 $10+9n$ 万元，并能按此规律一直提取下去，问 A 至少应为多少万元?

解. 设 A_n 为用于第 n 年提取 $10+9n$ 万元的贴现值，则

$$A_n=(1+r)^{-n}(10+9n),$$

从而有

$$A=\sum_{n=1}^{\infty}A_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+9n}{(1+r)^n}=10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+r)^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9n}{(1+r)^n}=200+9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(1+r)^n}.$$

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n,\ x\in(-1,1)$．因为

$$S(x)=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2},$$

所以 $S\left(\frac{1}{1+r}\right)=S\left(\frac{1}{1.05}\right)=420$，故 $A=200+9\times420=3980$，即至少应存入 3980 万元.

20. 同试卷一第三 [21] 题.

21. 同试卷二第三 [23] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23. 同试卷一第三 [23] 题.

二〇〇八年考研数学试卷四解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 设 $0<a<b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$ ································( )

(A) a.　　(B) a^{-1}.　　(C) b.　　(D) b^{-1}.

解. 应选 (B). $\lim\limits_{n\to\infty}\left(a^{-n}+b^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{-1}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{-1}$.

2. 同试卷三第一 [1] 题.

3. 设 $f(x)$ 是连续的奇函数，$g(x)$ 是连续的偶函数，区域 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,-\sqrt{x}\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\}$，则以下结论正确的是··············( )

(A) $\iint_D f(y)g(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$.　　(B) $\iint_D f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$.

(C) $\iint_D [f(x)+g(y)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$.　　(D) $\iint_D [f(y)+g(x)]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$.

解. 应选 (A). 因积分区域 D 关于 x 轴对称，当被积函数是关于 y 的奇函数时，二重积分的值必为 0.

4. 同试卷二第一 [2] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

6. 同试卷二第一 [8] 题.

7. 同试卷一第一 [7] 题.

8. 同试卷一第一 [8] 题.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 同试卷三第二 [9] 题.

10. 已知函数 $f(x)$ 连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，则曲线 $y=f(x)$ 上对应 $x=0$ 处的切线方程是 ________.

解. 应填 $y=2x$. 由 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ 及 $f(x)$ 连续可得

$$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\lim_{x\to 0}x=2\times 0=0,$$

进而得到

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2.$$

因此 $x=0$ 处的切线方程是 $y=2x$.

11. $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^1 x^y \ln x \,\mathrm{d}y =$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{2}$. $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_0^1 x^y \ln x \,\mathrm{d}y = \int_1^2 [x^y]_0^1 \mathrm{d}x = \int_1^2 (x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

12. 同试卷二第二 [10] 题.

13. 设 3 阶矩阵 A 的特征值互不相同，且行列式 $|A|=0$，则 A 的秩为 ________.

解. 应填 2. 因 $|A|$ 的值等于 A 的所有特征值的乘积，故由 $|A|=0$，知 A 有特征值 0. 又因为 A 的特征值互不相同，故 A 还有两个非零特征值，从而 A 的秩等于 2.

14. 同试卷一第二 [14] 题.

三、**解答题**（15～23 小题，共 94 分）

15. 同试卷三第三 [15] 题.

16.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t(t-x)|\mathrm{d}t$ （$0<x<1$），求 $f(x)$ 的极值、单调区间及曲线 $y=f(x)$ 的凹凸区间.

解. 首先计算 $f(x)$ 的表达式得到

$$f(x) = \int_0^x t(x-t)\mathrm{d}t + \int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}.$$

令 $f'(x) = x^2 - \frac{1}{2} = 0$，得 $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 内单调减少，在 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ 内单调增加，$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 为极小值. 又因为当 $0<x<1$ 时 $f''(x) = 2x > 0$，所以曲线 $y=f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内是凹的.

17. 同试卷二第三 [21] 题.

18. 同试卷三第三 [16] 题.

19. 同试卷三第三 [18] 题.

20. 同试卷一第三 [21] 题.

21. 同试卷二第三 [23] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23.（本题满分 11 分）

设某企业生产线上产品合格率为 0.96，不合格产品中只有 $\frac{3}{4}$ 产品可进行再加工，且再加工合格率为 0.8，其余均为废品．每件合格品获利 80 元，每件废品亏损 20 元，为保证该企业每天平均利润不低于 2 万元，问企业每天至少应生产多少件产品？

解. 进行再加工后，产品的合格率

$$p = 0.96 + 0.04 \times 0.75 \times 0.8 = 0.984.$$

设 X 为 n 件产品中的合格产品数，则有

$$X \sim B(n, p), \quad EX = np = 0.984n.$$

设 Y 为 n 件产品的利润，则有

$$Y = 80X - 20(n - X), \quad EY = 100EX - 20n = 78.4n.$$

为保证 $EY \geqslant 20000$，则 $n \geqslant 256$，即该企业每天至少应生产 256 件产品.

二〇〇九年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 同试卷二第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [1] 题.

3. 使不等式 $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t > \ln x$ 成立的 x 的范围是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $(0,1)$.　　(B) $\left(1,\frac{\pi}{2}\right)$.　　(C) $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.　　(D) $(\pi,+\infty)$.

解. 应选 (A). 原问题可转化为求 $f(x)=\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\ln x>0$ 成立时 x 的取值范围.

$$\begin{aligned} f(x)&=\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\ln x=\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t-\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &=\int_1^x \frac{\sin t-1}{t}\,\mathrm{d}t=\int_x^1 \frac{1-\sin t}{t}\,\mathrm{d}t>0. \end{aligned}$$

由 $t\in(0,1)$ 时，$\frac{1-\sin t}{t}>0$，知当 $x\in(0,1)$ 时，$f(x)>0$.

4. 同试卷一第一 [3] 题.

5. 同试卷一第一 [6] 题.

6. 同试卷二第一 [8] 题.

7. 设事件 A 与事件 B 互不相容，则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$.　　(B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(A)=1-P(B)$.　　(D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

解. 应选 (D). 因为 A,B 互不相容，所以 $P(AB)=0$. 从而

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1.$$

8. 同试卷一第一 [8] 题.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=$ ________.

解. 应填 $\frac{3}{2}\mathrm{e}$. 由等价无穷小量代换可得

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}(1-\mathrm{e}^{\cos x-1})}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}(1-\cos x)}{\frac{1}{3}x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}\cdot\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{3}x^2}=\frac{3}{2}\mathrm{e}.$$

10. 设 $z=(x+e^y)^x$，则 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=$ ________.

解. 应填 $1+2\ln 2$. 由于 $(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2$，故 $z(x,0)=(x+1)^x$，因此

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=0}=\left[(x+1)^x\right]'=\left[e^{x\ln(1+x)}\right]'=e^{x\ln(1+x)}\left[\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}\right],$$

代入 $x=1$ 得

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0)}=e^{\ln 2}\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)=2\ln 2+1.$$

11. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n-(-1)^n}{n^2}x^n$ 的收敛半径为 ________.

解. 应填 e^{-1}. 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n+1}-(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\cdot\frac{n^2}{e^n-(-1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{e^{n+1}\left[1-(-e^{-1})^{n+1}\right]}{e^n\left[1-(-e^{-1})^n\right]}=e,$$

所以幂级数的收敛半径为 e^{-1}.

12. 设某产品的需求函数为 $Q=Q(p)$，其对价格 p 的弹性 $\varepsilon_p=0.2$，则当需求量为 10000 件时，价格增加 1 元会使产品收益增加________ 元.

解. 应填 8000. 因为 $\varepsilon_p=-\dfrac{Q'p}{Q}=0.2$，所以 $Q'p=-0.2Q$，从而

$$R'=(Qp)'=Q'p+Q=-0.2Q+Q=0.8Q.$$

将 $Q=10000$ 代入有 $R'=8000$.

13. 设 $\alpha=(1,1,1)^T,\beta=(1,0,k)^T$. 若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$ ________.

解. 应填 2. 由相似矩阵有相同的迹（它等于对角元素之和），以及

$$\alpha\beta^T=\begin{pmatrix}1&0&k\\1&0&k\\1&0&k\end{pmatrix},$$

可得 $1+0+k=3+0+0$，解得 $k=2$.

14. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差，记统计量 $T=\overline{X}-S^2$，则 $ET=$ ________.

解. 应填 np^2. $ET=E(\overline{X}-S^2)=E\overline{X}-ES^2=EX-DX=np-np(1-p)=np^2$.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15. 同试卷一第三 [15] 题.

16. 同试卷二第三 [16] 题.

17. 同试卷二第三 [19] 题.

18. 同试卷一第三 [18] 题.

19.（本题满分 10 分）

设曲线 $y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是可导函数，且 $f(x)>0$. 已知曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0, x=1$ 及 $x=t$（$t>1$）所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得的立体体积值是该曲边梯形面积值的 πt 倍，求该曲线方程.

解. 由题意知

$$\pi\int_1^t f^2(x)\,\mathrm{d}x=\pi t\int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x,\quad\Rightarrow\quad \int_1^t f^2(x)\,\mathrm{d}x=t\int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x.$$

两边对 t 求导得

$$f^2(t)=\int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x+tf(t).$$

代入 $t=1$ 得 $f(1)=0$（舍去）或 $f(1)=1$. 再求导得

$$2f(t)f'(t)=2f(t)+tf'(t).$$

记 $f(t)=y$，则 $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}+\dfrac{1}{2y}t=1$，因此

$$\begin{aligned}t&=\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{2y}\mathrm{d}y}\left(\int\mathrm{e}^{\int\frac{1}{2y}\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y+C\right)=y^{-\frac{1}{2}}\left(\int\sqrt{y}\,\mathrm{d}y+C\right)\\&=y^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+C\right)=\frac{C}{\sqrt{y}}+\frac{2}{3}y.\end{aligned}$$

代入 $t=1, y=1$ 得 $C=\dfrac{1}{3}$，从而 $t=\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3\sqrt{y}}$. 故所求曲线方程为 $x=\dfrac{2}{3}y+\dfrac{1}{3\sqrt{y}}$.

20. 同试卷一第三 [20] 题.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(I) 求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；(II) 求条件概率 $P\{X\leqslant 1|Y\leqslant 1\}$.

解. (I) X 的概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}y, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0\end{cases}=\begin{cases}x\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

当 $x>0$ 时，Y 的条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(II) Y 的概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0.\end{cases}$$

因此条件概率

$$\begin{aligned}P\{X\leqslant 1|Y\leqslant 1\}&=\frac{P\{X\leqslant 1,Y\leqslant 1\}}{P\{Y\leqslant 1\}}\\ &=\frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}=\frac{\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}y}{1-\mathrm{e}^{-1}}=\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}.\end{aligned}$$

23. 同试卷一第三 [22] 题.

二〇一〇年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 若 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}-\left(\dfrac{1}{x}-a\right)e^x\right]=1$，则 a 等于 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

解. 应选 (C)．由极限的运算法则和等价无穷小量代换可得

$$1=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-a\right)e^x\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-e^x}{x}+ae^x\right)=-1+a,$$

所以 $a=2$.

2. 同试卷二第一 [2] 题.

3. 设函数 $f(x),g(x)$ 具有二阶导数，且 $g''(x)<0$，若 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，则 $f(g(x))$ 在 x_0 取极大值的一个充分条件是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $f'(a)<0$.　　(B) $f'(a)>0$.　　(C) $f''(a)<0$.　　(D) $f''(a)>0$.

解. 应选 (B)．由求导法则可得

$$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]\cdot g'(x),$$

$$\{f[g(x)]\}''=\{f'[g(x)]\cdot g'(x)\}'=f''[g(x)]\cdot[g'(x)]^2+f'[g(x)]\cdot g''(x).$$

由于 $g(x_0)=a$ 是 $g(x)$ 的极值，所以 $g'(x_0)=0$．所以

$$\{f[g(x)]\}'\Big|_{x=x_0}=0,\qquad \{f[g(x)]\}''\Big|_{x=x_0}=f'(a)\cdot g''(x_0).$$

由于 $g''(x_0)<0$，所以 $f'(a)>0$ 时就有 $\{f[g(x)]\}''\Big|_{x=x_0}<0$.

4. 设 $f(x)=\ln^{10}x$，$g(x)=x$，$h(x)=e^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$.　　(B) $h(x)<g(x)<f(x)$.

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$.　　(D) $g(x)<f(x)<h(x)$.

解. 应选 (C)．由洛必达法则有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}=10\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^9 x}{x}=10\cdot9\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^8 x}{x}=\cdots=10!\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{x}{10}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{10}e^{\frac{x}{10}}=+\infty.$$

所以当 x 充分大时有 $f(x)<g(x)<h(x)$.

5. 同试卷二第一 [7] 题.

6. 同试卷一第一 [6] 题.

7. 同试卷一第一 [7] 题.

8. 同试卷一第一 [8] 题.

二、**填空题**（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 设可导函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^x x\sin t^2\,\mathrm{d}t$ 确定，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________.

解. 应填 -1. 令 $x=0$，得 $y=0$. 方程两端对 x 求导得

$$\mathrm{e}^{-(x+y)^2}\left(1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\int_0^x \sin t^2\,\mathrm{d}t+x\sin x^2.$$

将 $x=0,y=0$ 代入上式，解得 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-1$.

10. 设位于曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x(1+\ln^2 x)}}$（$\mathrm{e}\leqslant x<+\infty$）下方，$x$ 轴上方的无界区域为 G，则 G 绕 x 轴旋转一周所得空间区域的体积是 ________.

解. 应填 $\frac{\pi^2}{4}$. 根据旋转体体积公式，有

$$V=\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\pi y^2\,\mathrm{d}x=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\left(1+\ln^2 x\right)}=\pi\int_{\mathrm{e}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{1+\ln^2 x}=\pi\cdot[\arctan(\ln x)]_{\mathrm{e}}^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4}.$$

11. 设某商品的收益函数为 $R(p)$，收益弹性为 $1+p^3$，其中 p 为价格，且 $R(1)=1$，则 $R(p)=$ ________.

解. 应填 $p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$. 由弹性的定义得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\cdot\frac{p}{R}=1+p^3 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}R}{R}=\left(\frac{1}{p}+p^2\right)dp \quad\Rightarrow\quad \ln R=\ln p+\frac{1}{3}p^2+C.$$

又 $R(1)=1$，所以 $C=-\frac{1}{3}$. 故 $\ln R=\ln p+\frac{1}{3}p-\frac{1}{3}$，即 $R=p\mathrm{e}^{\frac{1}{3}(p^3-1)}$.

12. 若曲线 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 有拐点 $(-1,0)$，则 $b=$ ________.

解. 应填 3. 对函数 $y=x^3+ax^2+bx+1$ 求导得

$$y'=3x^2+2ax+b,\quad y''=6x+2a.$$

因为 $(-1,0)$ 是拐点，所以 $y''\big|_{x=-1}=0$，解得 $a=3$；又因为曲线过点 $(-1,0)$，解得 $b=3$.

13. 同试卷二第二 [14] 题.

14. 设 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 是来自总体 $N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$ 的简单随机样本,统计量 $T=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$，则 $E(T)=$ ________.

解. 应填 $\sigma^2+\mu^2$. 直接计算可得

$$E(T)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=\frac{1}{n}nE\left(X^2\right)=E\left(X^2\right)=\sigma^2+\mu^2.$$

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)^{\frac{1}{\ln x}}$.

解. 由于

$$\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\exp\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}\right)=\exp\left(\frac{\ln\left(x^{\frac{1}{x}}-1\right)}{\ln x}\right)=\exp\left(\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\right)}{\ln x}\right),$$

且由洛必达法则和 $\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1\sim\dfrac{\ln x}{x}$ 可得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}}{\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}-1}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{1}{\ln x}-1\right)=-1,$$

所以原式 $=\mathrm{e}^{-1}$.

16.（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint_D(x+y)^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中 D 由曲线 $x=\sqrt{1+y^2}$ 与直线 $x+\sqrt{2}y=0$ 及 $x-\sqrt{2}y=0$ 围成.

解. 积分区域 $D=D_1\cup D_2$，其中

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant y\leqslant 1,\sqrt{2}y\leqslant x\leqslant\sqrt{1+y^2}\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\middle|-1\leqslant y\leqslant 0,-\sqrt{2}y\leqslant x\leqslant\sqrt{1+y^2}\right\}.$$

因为区域 D 关于 x 轴对称，所以由奇偶对称性可得

$$\begin{aligned}I&=\iint_D(x+y)^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D\left(x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=2\left[\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}\left(x^3+3xy^2\right)\mathrm{d}x\right]=2\int_0^1\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{2}x^2y^2\right]_{\sqrt{2}y}^{\sqrt{1+y^2}}\mathrm{d}y\\&=2\int_0^1\left(-\frac{9}{4}y^4+2y^2+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}y=\frac{14}{15}.\end{aligned}$$

17.（本题满分 10 分）

求函数 $u=xy+2yz$ 在约束条件 $x^2+y^2+z^2=10$ 下的最大值和最小值.

解. 令 $F(x,y,z,\lambda)=xy+2yz+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-10\right)$，由拉格朗日乘数法得

$$\begin{cases} F_x'=y+2\lambda x=0, \\ F_y'=x+2z+2\lambda y=0, \\ F_z'=2y+2\lambda z=0, \\ F_\lambda'=x^2+y^2+z^2-10=0. \end{cases}$$

求解得六个驻点如下：

$$A(1,\sqrt{5},2),\qquad B(-1,-\sqrt{5},-2),\qquad C(1,-\sqrt{5},2),$$

$$D(-1,\sqrt{5},-2),\qquad E(2\sqrt{2},0,-\sqrt{2}),\qquad F(-2\sqrt{2},0,\sqrt{2}).$$

因为在点 A 与 B 点处 $u=5\sqrt{5}$，在点 C 与 D 处 $u=-5\sqrt{5}$，在点 E 与 F 处 $u=0$，所以 $u_{\max}=5\sqrt{5}$，$u_{\min}=-5\sqrt{5}$.

18. 同试卷一第三 [17] 题.

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 上连续，在 $(0,3)$ 内存在二阶导数，且

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f(2)+f(3).$$

(I) 证明存在 $\eta\in(0,2)$，使 $f(\eta)=f(0)$；(II) 证明存在 $\xi\in(0,3)$，使 $f''(\xi)=0$.

解. (I) 由积分中值定理知，存在 $\eta\in(0,2)$，使得

$$2f(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2f\left(\eta\right)\quad\Rightarrow\quad f\left(\eta\right)=f(0).$$

(II) 因为 $f(2)+f(3)=2f(0)$，即 $\dfrac{f(2)+f(3)}{2}=f(0)$，所以 $f(0)$ 介于 $f(2)$ 和 $f(3)$ 之间. 由介值定理知，存在 $\eta_1\in[2,3]$，使得 $f\left(\eta_1\right)=f(0)$. 现在已知 $f(0)=f\left(\eta\right)=f\left(\eta_1\right)$，所以由罗尔中值定理知，存在 $\xi_1\in\left(0,\eta\right)$，$\xi_2\in\left(\eta,\eta_1\right)$，使得 $f'(\xi_1)=0$，$f'(\xi_2)=0$. 再在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔中值定理可得，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(0,3)$，使得 $f''(\xi)=0$.

20. 同试卷一第三 [20] 题.

21. 同试卷二第三 [23] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23.（本题满分 11 分）

箱中装有 6 个球，其中红、白、黑球的个数分别为 1,2,3 个，现从箱中随机取出 2 个球，记 X 为取出的红球个数，Y 为取出的白球个数.

(I) 求随机变量 (X,Y) 的概率分布；(II) 求 $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

解. (Ⅰ) X 的所有可能取值为 $0,1$， Y 的所有可能取值为 $0,1,2$． 且有

$$P\{X=0, Y=0\}=\frac{C_3^2}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}, \qquad P\{X=1, Y=0\}=\frac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{3}{15}=\frac{1}{5},$$

$$P\{X=0, Y=1\}=\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}, \qquad P\{X=1, Y=1\}=\frac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{2}{15},$$

$$P\{X=0, Y=2\}=\frac{C_2^2}{C_6^2}=\frac{1}{15}, \qquad P\{X=1, Y=2\}=\frac{0}{C_6^2}=0.$$

因此二维随机变量 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{15}$	0

(II) 因为 X, Y 和 XY 的数学期望分别为

$$E(X)=0\times\frac{2}{3}+1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}, \quad E(Y)=0\times\frac{2}{5}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}=\frac{2}{3},$$

$$E(XY)=1\times1\times\frac{2}{15}=\frac{2}{15},$$

所以 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{2}{15}-\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=-\frac{4}{45}$.

二〇一一年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 同试卷二第一 [1] 题.

2. 同试卷二第一 [2] 题.

3. 设 $\{u_n\}$ 是数列，则下列命题正确的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛.

(D) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

解. 应选 (A). 由数项级数的性质：收敛级数任意添加括号后仍收敛.

4. 同试卷一第一 [4] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

6. 设 A 为 4×3 矩阵，η_1,η_2,η_3 是非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的 3 个线性无关的解，k_1,k_2 为任意常数，则 $Ax=\beta$ 的通解为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$.　　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)$.

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$.　　(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$.

解. 应选 (C). 首先 $A\neq O$（否则非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 无解），故 $r(A)\geqslant 1$. 由于 η_1,η_2,η_3 是 $Ax=\beta$ 的 3 个线性无关的解，所以 $\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$ 是 $Ax=0$ 的两个线性无关的解，故 $3-r(A)\geqslant 2$ 即 $r(A)\leqslant 1$. 从而得知 $r(A)=1$. 这样 $\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$ 是 $Ax=0$ 的一个基础解系. 因为 η_2,η_3 是 $Ax=\beta$ 的解，所以 $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}$ 也是 $Ax=\beta$ 的解. 由非齐次线性方程组解的结构，可知 $Ax=\beta$ 的通解为

$$\frac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1).$$

7. 同试卷一第一 [7] 题.

8. 设总体 X 服从参数为 λ（$\lambda>0$）的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots,X_n$（$n\geqslant 2$）为来自总体 X 的简单随机样本，则对于统计量 $T_1=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，$T_2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}X_i+\dfrac{1}{n}X_n$，有(　　)

(A) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$.　　(B) $E(T_1)>E(T_2)$，$D(T_1)>D(T_2)$.

(C) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$.　　(D) $E(T_1)<E(T_2)$，$D(T_1)<D(T_2)$.

解. 应选 (D). 因为 $X_1,X_2,\cdots,X_n \sim P(\lambda)$, 所以 $E(X_i)=\lambda$, $D(X_i)=\lambda$, 从而有

$$E(T_1)=\lambda<E(T_2)=\left(1+\frac{1}{n}\right)\lambda,$$

$$D(T_1)=\frac{\lambda}{n}<D(T_2)=\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n^2}\right)\lambda.$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}$, 则 $f'(x)=$ ________.

解. 应填 $e^{3x}(1+3x)$. 因为

$$f(x)=\lim_{t\to 0}x(1+3t)^{\frac{x}{t}}=x\lim_{t\to 0}\left[(1+3t)^{\frac{1}{3t}}\right]^{3t\cdot\frac{x}{t}}=x\cdot e^{3x},$$

所以 $f'(x)=e^{3x}(1+3x)$.

10. 设函数 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}$, 则 $dz\big|_{(1,1)}=$ ________.

解. 应填 $(1+2\ln 2)(dx-dy)$. 因为 $z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}=\exp\left(\frac{x}{y}\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)\right)$, 所以,

$$\frac{dz}{dx}=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}\frac{1}{y}\left[\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{x+y}\right],$$

$$\frac{dz}{dy}=\left(1+\frac{x}{y}\right)^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\left[\ln\left(1+\frac{x}{y}\right)+\frac{x}{x+y}\right].$$

所以 $\left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,1)}=1+2\ln 2$, $\left.\frac{dz}{dy}\right|_{(1,1)}=-(1+2\ln 2)$. 从而

$$dz\big|_{(1,1)}=(1+2\ln 2)dx-(1+2\ln 2)dy=(1+2\ln 2)(dx-dy).$$

11. 曲线 $\tan\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)=e^y$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程为 ________.

解. 应填 $y=-2x$. 方程两边对 x 求导得

$$\sec^2\left(x+y+\frac{\pi}{4}\right)\cdot(1+y')=e^y y'.$$

将 $x=0$, $y=0$ 代入上式, 解得 $y'\big|_{(0,0)}=-2$, 故切线方程为 $y=-2x$.

12. 曲线 $y=\sqrt{x^2-1}$, 直线 $x=2$ 及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转所成的旋转体的体积为 ________.

解. 应填 $\frac{4}{3}\pi$. 由旋转体的公式有 $V=\pi\int_1^2 y^2\,dx=\pi\int_1^2(x^2-1)\,dx=\frac{4}{3}\pi$.

13. 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 的秩为 1, A 的各行元素之和为 3, 则 f 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 ________.

解. 应填 $3y_1^2$. 因为 A 的各行元素之和为 3，所以 $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，故 3 为矩阵 A 的特征值. 由 $r(A)=1$ 知矩阵 A 有两个特征值为零，从而 $\lambda_1=3,\lambda_2=\lambda_3=0$. 所以二次型在正交变换下的标准形为 $3y_1^2$.

14. 同试卷一第二 [14] 题.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

解. 由等价无穷小量代换和洛必达法则，可得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}-1}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x\sqrt{1+2\sin x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sqrt{1+2\sin x}}{2x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\dfrac{\cos x}{\sqrt{1+2\sin x}}}{2}=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{2\sqrt{1+2\sin x}}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

16.（本题满分 10 分）

已知函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数，$f(1,1)=2$ 是 $f(u,v)$ 的极值，$z=f[x+y,f(x,y)]$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(1,1)}$.

解. 依次求偏导数可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'[x+y,f(x,y)]+f_2'[x+y,f(x,y)]\cdot f_1'(x,y),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=&f_{11}''\big[x+y,f(x,y)\big]\cdot 1+f_{12}''[x+y,f(x,y)]\cdot f_2'(x,y)\\&+\big\{f_{21}''[x+y,f(x,y)]+f_{22}''[x+y,f(x,y)]f_2'(x,y)\big\}\cdot f_1'(x,y)\\&+f_2'[x+y,f(x,y)]\cdot f_{12}''(x,y).\end{aligned}$$

由于 $f(1,1)=2$ 为 $f(u,v)$ 的极值，故 $f_1'(1,1)=f_2'(1,1)=0$，所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{11}''(2,2)+f_2'(2,2)\cdot f_{12}''(1,1).$$

17.（本题满分 10 分）

求 $\displaystyle\int\frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

解. 令 $t=\sqrt{x}$，则 $x=t^2, \mathrm{d}x=2t\,\mathrm{d}t$，所以

$$\int \frac{\arcsin\sqrt{x}+\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int \frac{\arcsin t+\ln t^2}{t}\cdot 2t\,\mathrm{d}t=2\int \arcsin t\,\mathrm{d}t+2\int \ln t^2\,\mathrm{d}t$$

$$=2t\cdot\arcsin t-2\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t+2t\cdot\ln t^2-2\int t\cdot\frac{2t}{t^2}$$

$$=2t\cdot\arcsin t+2\sqrt{1-t^2}+2t\cdot\ln t^2-4t+C$$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x+2\sqrt{1-x}-4\sqrt{x}+C.$$

18.（本题满分 10 分）

证明 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根.

解. 设 $f(x)=4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$，则

$$f'(x)=\frac{4}{1+x^2}-1=\frac{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}{1+x^2}.$$

令 $f'(x)=0$，解得驻点 $x_1=\sqrt{3}, x_2=-\sqrt{3}$. 当 $x<-\sqrt{3}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减；当 $-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$ 时，$f'(x)>0$，故 $f(x)$ 单调递增；当 $x>\sqrt{3}$ 时，$f'(x)<0$，故 $f(x)$ 单调递减. 因为 $f(-\sqrt{3})=0$，故 $x\in(-\infty,\sqrt{3})$ 时只有这一个零点. 又

$$f(\sqrt{3})=\frac{8\pi}{3}-2\sqrt{3}>0,\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}\right)=-\infty,$$

由零值定理可知，存在 $x_0\in\left(\sqrt{3},+\infty\right)$，使得 $f(x_0)=0$. 所以方程 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根.

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数，$f(0)=1$，且

$$\iint_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$D_t=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant y\leqslant t-x, 0\leqslant x\leqslant t\right\}$（$0<t\leqslant 1$），求 $f(x)$ 的表达式.

解. 首先化简所给的两个二重积分得

$$\iint_{D_t} f(t)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}t^2 f(t),$$

$$\iint_{D_t} f'(x+y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^t \mathrm{d}x\int_0^{t-x} f'(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^t (f(t)-f(x))\mathrm{d}x=tf(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x.$$

从而由题设有 $tf(t)-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}t^2 f(t)$. 上式两端求导，整理得

$$(2-t)f'(t)=2f(t).$$

这是可分离变量微分方程，解得 $f(t)=\frac{C}{(t-2)^2}$. 代入 $f(0)=1$，得 $C=4$. 所以 $f(x)=\frac{4}{(x-2)^2}$（$0\leqslant x\leqslant 1$）.

20. 同试卷一第三 [20] 题.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23.（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 服从区域 G 上的均匀分布，其中 G 是由 $x-y=0$, $x+y=2$ 与 $y=0$ 所围成的区域.

(I) 求边缘概率密度 $f_X(x)$； (II) 求条件密度函数 $f_{X|Y}(x|y)$.

解. (I) 二维连续型随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<1, y<x<2-y,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

当 $0<x<1$ 时, $f_X(x)=\int_0^x 1\,\mathrm{d}y=x$; 当 $1\leqslant x<2$ 时, $f_X(x)=\int_0^{2-x}1\,\mathrm{d}y=2-x$.

故 X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\ 2-x, & 1\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(II) 当 $0<y<1$ 时， Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\int_y^{2-y}1\,\mathrm{d}x=2-2y.$$

此时有条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & y<x<2-y,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

二〇一二年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷一第一 [2] 题.

3. 设函数 $f(t)$ 连续，则二次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_{2\cos\theta}^{2} f(r^2) r \,\mathrm{d}r = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\quad)$

(A) $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$.

(B) $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$.

(C) $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$.

(D) $\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{1+\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y$.

解. 应选 (B). 将积分区域化为直角坐标, 得到 $\{(x,y)|x \geqslant 0, y \geqslant 0, 2x \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4\}$, 解得 $\sqrt{2x-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{4-x^2}$. 将被积表达式化为直角坐标，得到 $f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

4. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，则 α 范围为 $\cdots (\quad)$

(A) $0<\alpha\leqslant\frac{1}{2}$.　(B) $\frac{1}{2}<\alpha\leqslant 1$.　(C) $1<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$.　(D) $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

解. 应选 (D). 由 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sqrt{n}\sin\frac{1}{n^\alpha}$ 绝对收敛，得 $\alpha>\frac{3}{2}$；由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{2-\alpha}}$ 条件收敛，得 $1\leqslant\alpha<2$. 从而 $\frac{3}{2}<\alpha<2$.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

6. 同试卷一第一 [6] 题.

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从区间 $(0,1)$ 上的均匀分布，
则 $P\left\{X^2+Y^2\leqslant 1\right\} = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (\quad)$

(A) $\frac{1}{4}$.　(B) $\frac{1}{2}$.　(C) $\frac{\pi}{8}$.　(D) $\frac{\pi}{4}$.

解. 应选 (D). 由题意得,

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0<x<1, 0<y<1, \\ 0, & \text{其它}; \end{cases}$$

$$P\left\{X^2+Y^2\leqslant 1\right\} = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

其中 D 表示单位圆在第一象限的部分，被积函数是 1．根据二重积分的几何意义，知 $P\left\{X^2+Y^2\leqslant 1\right\}=\frac{\pi}{4}$.

8. 设 $|A|=3$ 为来自总体 $N\left(1,\sigma^2\right)(\sigma>0)$ 的简单随机样本，则统计量 $\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}$ 的分布为……（　）

(A) $N(0,1)$.　　(B) $t(1)$.　　(C) $\chi^2(1)$.　　(D) $F(1,1)$.

解. 应选 (B)．由正态分布的性质可知，$\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}$ 与 $\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}$ 均服从标准正态分布，且相互独立，从而

$$\frac{X_1-X_2}{|X_3+X_4-2|}=\frac{\frac{X_1-X_2}{\sqrt{2}\sigma}}{\sqrt{\left(\frac{X_3+X_4-2}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2}}\sim t(1).$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=$ ________.

解. 应填 $\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$．$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\exp\left(\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}\right)$．由等价无穷小量代换有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(\tan x)}{\cos x-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x-1}{\cos x-\sin x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{(\cos x-\sin x)\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x}=-\sqrt{2}.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\frac{1}{\cos x-\sin x}}=\mathrm{e}^{-\sqrt{2}}$.

10. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1\\ 2x-1, & x<1\end{cases}$，$y=f(f(x))$，则 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{\mathrm{e}}$．由复合函数的求导法则，有

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=f'(f(x))f'(x)\big|_{x=\mathrm{e}}=f'\big(f(\mathrm{e})\big)f'(\mathrm{e})=f'(1/2)f'(\mathrm{e}).$$

由 $f(x)$ 的表达式可知 $f'(1/2)=2$，$f'(\mathrm{e})=\frac{1}{2\mathrm{e}}$．因此 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

11. 函数 $z=f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{f(x,y)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$ ________.

解. 应填 $2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$. 由题意可知分子应为分母的高阶无穷小，即

$$f(x,y)=2x-y+2+o\left(\sqrt{x^2+(y-1)^2}\right).$$

所以 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=2$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=-1$，故 $\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x-\mathrm{d}y$.

12. 由曲线 $y=\frac{4}{x}$ 和直线 $y=x$ 及 $y=4x$ 在第一象限中所围图形的面积为________.

解. 应填 $4\ln 2$. $S=\int_0^1(4x-x)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(\frac{4}{x}-x\right)\mathrm{d}x=4\ln 2.$

13. 同试卷二第二 [14] 题.

14. 同试卷一第二 [14] 题.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

计算 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$.

解. 由等价无穷小量代换和泰勒公式，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}=\lim_{x\to 0}\mathrm{e}^{2-2\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2-2+2\cos x}-1}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\cos x}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2+2\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^2\right)\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{12}+o\left(x^2\right)}{x^4}=\frac{1}{12}.$$

16.（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint_D \mathrm{e}^x xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是以曲线 $y=\sqrt{x}$，$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 及 y 轴为边界的无界区域.

解. 由题意知，区域 $D=\left\{(x,y)|0<x\leqslant 1,\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}\right\}$，所以

$$\iint_D \mathrm{e}^x xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\mathrm{e}^x xy\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^x x\left(\frac{1}{2x}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{e}^x(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^x(-1+2x-x^2)\right]_0^1=\frac{1}{2}.$$

17.（本题满分 10 分）

某企业为生产甲、乙两种型号的产品，投入的固定成本为 10000（万元），设该企业生产甲、乙两种产品的产量分别为 x（件）和 y（件），且这两种产品的边际成本分别为 $20+\frac{x}{2}$（万元/件）与 $6+y$（万元/件）.

(I) 求生产甲、乙两种产品的总成本函数 $C(x,y)$(万元)；

(II) 当总产量为 50 件时，甲乙两种的产量各为多少时可以使总成本最小？求最小的成本；

(III) 求总产量为 50 件时且总成本最小时甲产品的边际成本，并解释其经济意义.

解. (I) 设成本函数为 $C(x,y)$，由题意有：$C'_x(x,y)=20+\frac{x}{2}$，对 x 积分得

$$C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+g(y).$$

对 y 求导得 $C'_y(x,y)=g'(y)=6+y$，再对 y 积分得 $g(y)=6y+\frac{1}{2}y^2+c$. 所以

$$C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{1}{2}y^2+c.$$

又 $C(0,0)=10000$，故 $c=10000$，所以 $C(x,y)=20x+\frac{x^2}{4}+6y+\frac{1}{2}y^2+10000$.

(II) 若 $x+y=50$，则 $y=50-x(0\leqslant x\leqslant 50)$，代入到成本函数中，有

$$\begin{aligned}C(x)&=20x+\frac{x^2}{4}+6(50-x)+\frac{1}{2}(50-x)^2+10000\\&=\frac{3}{4}x^2-36x+11550.\end{aligned}$$

令 $C'(x)=\frac{3}{2}x-36=0$，得 $x=24,y=26$，这时总成本最小 $C(24,26)=11118$.

(III) 总产量为 50 件且总成本最小时，甲产品的边际成本为 $C'_x(24,26)=32$. 这表示在总产量为 50 件的条件下，当甲产品为 24 件时，这时甲产品再增加一件，成本将会增加 32 万元.

18. 同试卷一第三 [15] 题.

19. 同试卷二第三 [19] 题.

20. 同试卷一第三 [20] 题.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23. (本题满分 10 分)

设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从参数为 1 的指数分布，$U=\max(X,Y)$，$V=\min(X,Y)$.

(I) 求随机变量 V 的概率密度 $f_V(v)$； (II) 求 $E(U+V)$.

解. (I) X 和 Y 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$ 所以

$$F_V(v)=P\{V\leqslant v\}=P\{\min(X,Y)\leqslant v\}=1-P\{X>v,Y>v\}$$

$$= 1-[1-F(v)]^2 = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-2v}, & v>0, \\ 0, & v \leqslant 0. \end{cases}$$

故 $f_V(v) = F_V'(v) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2v}, & v>0, \\ 0, & v \leqslant 0. \end{cases}$

(II) 因为 $U+V = \max(X,Y)+\min(X,Y) = X+Y$，所以

$$E(U+V) = E(X+Y) = E(X)+E(Y) = 2.$$

二〇一三年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 当 $x \to 0$ 时，用 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是 $\cdots$ (　　)

(A) $x \cdot o(x^2) = o(x^3)$.　　(B) $o(x) \cdot o(x^2) = o(x^3)$.

(C) $o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$.　　(D) $o(x) + o(x^2) = o(x^2)$.

解. 应选 (D)．这是因为 $o(x) + o(x^2) = o(x)$.

2. 函数 $f(x) = \dfrac{|x|^x - 1}{x(x+1)\ln|x|}$ 的可去间断点的个数为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

解. 应选 (C)．依题意可知 $f(x)$ 的间断点为 $-1, 0, 1$．因为

$$|x|^x - 1 = \mathrm{e}^{x\ln|x|} - 1 \sim x\ln|x| \quad (x \to -1, 0, 1),$$

所以 $x = -1$ 是无穷间断点，$x = 0$ 和 $x = 1$ 是可去间断点.

3. 同试卷二第一 [6] 题.

4. 设 $\{a_n\}$ 为正项数列，下列选项正确的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 若 $a_n > a_{n+1}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛.

(B) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n > a_{n+1}$.

(C) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $p > 1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在.

(D) 若存在常数 $p > 1$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

解. 应选 (D)．当 $p > 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛．根据正项级数的比较判别法，由 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p a_n$ 存在可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 同敛散，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

6. 同试卷一第一 [6] 题.

7. 同试卷一第一 [7] 题.

8. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，则 X 和 Y 的概率分布分别为

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

则 $P\{X+Y=2\}=$ ·· (　　)

(A) $\frac{1}{12}$.　　(B) $\frac{1}{8}$.　　(C) $\frac{1}{6}$.　　(D) $\frac{1}{2}$.

解. 应选 (C). 因为 X 和 Y 相互独立，所以

$$P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}+P\{X=3,Y=-1\}$$
$$=P\{X=1\}P\{Y=1\}+P\{X=2\}P\{Y=0\}+P\{X=3\}P\{Y=-1\}=\frac{1}{6}.$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 设曲线 $y=f(x)$ 和 $y=x^2-x$ 在点 $(1,0)$ 处有公共的切线，则 $\lim\limits_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=$ ________.

解. 应填 -2. 因为 $y=x^2-x$ 在 $(1,0)$ 处的导数为 1，所以 $f(1)=0$，$f'(1)=1$. 则

$$\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{n}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{n}{n+2}\right)-f(1)}{\frac{n}{n+2}-1}\times\left(-\frac{2n}{n+2}\right)=f'(1)\times(-2)=-2.$$

10. 设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(z+y)^x=xy$ 确定，则 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2)}=$ ________.

解. 应填 $2(1-\ln 2)$. 方程两边对 x 求导得

$$(z+y)^x\left[\ln(z+y)+x\cdot\frac{z_x}{z+y}\right]=y.$$

将 $x=1$，$y=2$，$z=0$ 代入上式，得 $z_x=2(1-\ln 2)$.

11. 同试卷一第二 [12] 题.

12. 微分方程 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 通解为 $y=$ ________.

解. 应填 $e^{\frac{1}{2}x}(C_1x+C_2)$. 微分方程的特征方程 $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0$ 有二重根 $\lambda=\frac{1}{2}$，所以通解为 $y=e^{\frac{1}{2}x}(C_1x+C_2)$.

13. 同试卷一第二 [13] 题.

14. 设随机变量 X 服从标准正态分布 $X\sim N(0,1)$，则 $E(Xe^{2X})=$ ________.

解. 应填 $2e^2$. 由随机变量函数的期望公式及 X 的概率密度函数可得

$$E\left(Xe^{2X}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}xe^{2x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{e^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[(x-2)+2]e^{-\frac{1}{2}\left[(x-2)^2\right]}\,dx$$

$$=e^2\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}2e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt\right]=e^2(0+2)=2e^2.$$

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15. 同试卷二第三 [15] 题.

16. 同试卷二第三 [16] 题.

17. 同试卷二第三 [17] 题.

18.（本题满分 10 分）

设生产某产品的固定成本为 6000 元，可变成本为 20 元/件，价格函数为 $P=60-\frac{Q}{1000}$，（P 是单价，单位：元；Q 是销量，单位：件），已知产销平衡，求：

(I) 该商品的边际利润；

(II) 当 $P=50$ 时的边际利润，并解释其经济意义；

(III) 使得利润最大的定价 P.

解. (I) 利润函数

$$L(Q)=PQ-(20Q+6000)=-\frac{Q^2}{1000}+40Q-6000,$$

所以边际利润 $L'(Q)=-\frac{Q}{500}+40$.

(II) 当 $P=50$ 时，$Q=10000$，边际利润为 $L'(10000)=20$. 其经济意义为：当 $P=50$ 时，销量增加一个，利润增加 20.

(III) 令 $L'(Q)=0$，得唯一驻点 $Q=20000$. 又 $L''(20000)=-\frac{1}{500}<0$，所以当 $Q=20000$ 时利润最大，此时 $P=40$.

19.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，$f(0)=0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，证明：

(I) 存在 $a>0$，使得 $f(a)=1$；

(II) 对 (Ⅰ) 中的 a，存在 $\xi\in(0,a)$，使得 $f'(\xi)=\frac{1}{a}$.

解. (I) 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$，所以存在 $x_0>0$ 使得 $f(x_0)>1$. 又由 $f(x)$ 可导知 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 上连续，故由介值定理，存在 $a\in(0,x_0)$，使得 $f(a)=1$.

(II) 已知 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续且可导，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,a)$ 使

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(0)}{a-0}=\frac{1}{a}.$$

20. 同试卷一第三 [20] 题.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22.（本题满分 11 分）

设 (X,Y) 是二维随机变量，X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在给定 $X=x$（$0<x<1$）的条件下，Y 的条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{x^3}, & 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(I) 求 (X,Y) 的概率密度 $f(x,y)$；(II) Y 的边缘概率密度 $f_Y(y)$；(III) 求 $P\{X>2Y\}$.

解. (I) (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_{Y|X}(y|x)f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{9y^2}{x}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(II) Y 的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}-9y^2\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(III) 所求概率为

$$P\{X>2Y\}=\iint_{x>2y}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x/2}\frac{9y^2}{x}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{8}.$$

23. 同试卷一第三 [23] 题.

二〇一四年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 且 $a\neq 0$，则当 n 充分大时有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $|a_n| > \dfrac{|a|}{2}$.　(B) $|a_n| < \dfrac{|a|}{2}$.　(C) $a_n > a - \dfrac{1}{n}$.　(D) $a_n > a + \dfrac{1}{n}$.

解. 应选 (A). 由 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$，取 $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$，则由极限的定义有

$$\frac{|a|}{2} < |a_n| < |\frac{3|a|}{2}.$$

2. 同试卷一第一 [1] 题.

3. 设 $p(x) = a + bx + cx^2 + \mathrm{d}x^3$，当 $x\to 0$ 时，若 $p(x) - \tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小，则下列选项中错误的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $a = 0$.　(B) $b = 1$,　(C) $c = 0$.　(D) $d = \dfrac{1}{6}$.

解. 应选 (D). 由麦克劳林公式有 $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$. 所以 $a = 0$，$b = 1$，$c = 0$，$d = \dfrac{1}{3}$.

4. 同试卷一第一 [2] 题.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

6. 同试卷一第一 [6] 题.

7. 同试卷一第一 [7] 题.

8. 设 X_1, X_2, X_3 为来自正态总体 $N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，则统计量 $\dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|}$ 服从的分布为 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $F(1,1)$.　(B) $F(2,1)$.　(C) $t(1)$.　(D) $t(2)$.

解. 应选 (C). 依题意，$\dfrac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$，$\dfrac{X_3^2}{\sigma^2} = \chi^2(1)$，且两者相互独立，于是

$$\frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}|X_3|} = \frac{(X_1 - X_2)/(\sqrt{2}\sigma)}{\sqrt{\left(X_3^2/\sigma^2\right)/1}} \sim t(1).$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 设某商品的需求函数为 $Q = 40 - 2P$（P 为商品价格），则该商品的边际收益为 ________.

解. 应填 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=20-Q$. 注意按定义 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$ 是边际效益，而 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$ 是边际收益. 由于 $R=PQ=\frac{(40-Q)Q}{2}$，所以 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=20-Q$.

10. 设 D 是由曲线 $xy+1=0$ 与直线 $y+x=0$ 及 $y=2$ 围成的有界区域，则 D 的面积为________.

解. 应填 $\frac{3}{2}-\ln 2$. 由题意，D 的面积 $S=\int_1^2\left(y-\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\frac{3}{2}-\ln 2$.

11. 设 $\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}$，则 $a=$________.

解. 应填 $a=\frac{1}{2}$. 由分部积分法可得

$$\frac{1}{4}=\int_0^a x\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\int_0^a x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)=\left[\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{2x}\right]_0^a-\int_0^a\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x=\frac{a\mathrm{e}^{2a}}{2}-\frac{\mathrm{e}^{2a}}{4}+\frac{1}{4}.$$

故可解得 $a=\frac{1}{2}$.

12. 二次积分 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x=$________.

解. 应填 $\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1)$. 交换积分次序可得

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\left(\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}-\mathrm{e}^{y^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^1\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x}\,\mathrm{d}y-\int_0^1(1-y)\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x-\int_0^1(1-y)\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y-\int_0^1(1-y)\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{e}^{y^2}\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).\end{aligned}$$

13. 同试卷一第二 [13] 题.

14. 同试卷一第二 [14] 题.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15. 同试卷一第三 [15] 题.

16. 同试卷二第三 [17] 题.

17.（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有连续导数，$z=f(\mathrm{e}^x\cos y)$ 满足

$$\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=(4z+\mathrm{e}^x\cos y)\mathrm{e}^{2x}.$$

若 $f(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

解. 设 $u=\mathrm{e}^x\cos y$，则 $z=f(u)=f(\mathrm{e}^x\cos y)$，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\mathrm{e}^x\cos y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-f'(u)\mathrm{e}^x\sin y.$$

因此由题设条件可得

$$(4f(u)+u)\mathrm{e}^{2x}=\cos y\frac{\partial z}{\partial x}-\sin y\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\mathrm{e}^{2x}\quad\Rightarrow\quad f'(u)=4f(u)+u.$$

解得 $f(u)=C\mathrm{e}^{4u}-\frac{u}{4}-\frac{1}{16}$（$C$ 为任意常数）．由 $f(0)=0$ 得 $C=\frac{1}{16}$．所以 $f(u)=\frac{1}{16}\mathrm{e}^{4u}-\frac{u}{4}-\frac{1}{16}$.

18.（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n$ 的收敛域及和函数.

解. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)(n+4)}{(n+1)(n+3)}=1$，得 $R=1$．当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)$ 发散，当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+3)$ 发散，故收敛域为 $(-1,1)$．当 $x\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+3)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+1}\right)'=\left(\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^{n+2}\right)'\\&=\left(\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+3}\right)'\right)'=\left(\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{1-x}\right)'\right)'=\left(\frac{3x-2x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{3-x}{(1-x)^3}.\end{aligned}$$

当 $x=0$ 时，$S(x)=3$．故和函数 $S(x)=\frac{3-x}{(1-x)^3}$，$x\in(-1,1)$.

19. 同试卷二第三 [19] 题.

20. 同试卷一第三 [20] 题.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23.（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布相同，X 的概率分布为

$$P\{X=0\}=\frac{1}{3},\quad P\{X=1\}=\frac{2}{3},$$

且 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\frac{1}{2}$.

(I) 求 (X,Y) 的概率分布；(II) 求 $P\{X+Y\leqslant 1\}$.

解. (I) 由题设可得

$$EX=EY=\frac{2}{3},\quad DX=DY=\frac{2}{9}.$$

因此协方差

$$\operatorname{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\cdot EY=P\{X=1,Y=1\}-\frac{4}{9},$$

相关系数

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\frac{P\{X=1,Y=1\}-\frac{4}{9}}{\frac{2}{9}}=\frac{1}{2}.$$

解得 $P\{X=1,Y=1\}=\frac{5}{9}$. 从而 (X,Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$

(II) $P\{X+Y\leqslant 1\}=1-P\{X+Y>1\}=1-P\{X=1,Y=1\}=\frac{4}{9}.$

二〇一五年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$.

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$.

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{3n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

解. 应选 (D). 若数列收敛，那么它的任何无穷子列均收敛，所以 (A) 与 (C) 是正确的. 反之，若包含原数列所有项的子列均收敛于同一个值，则原数列是收敛的. 因此 (B) 是正确的，(D) 是错误的.

2. 同试卷一第一 [1] 题.

3. 设 $D = \left\{(x,y)\middle| x^2+y^2 \leqslant 2x, x^2+y^2 \leqslant 2y\right\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$.

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,\mathrm{d}r$.

(C) $2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

(D) $2\int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y$.

解. 应选 (B). 在极坐标系下二重积分区域要分成两部分：

$$D_1 = \left\{(r,\theta)\middle| 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant r \leqslant 2\sin\theta\right\},\quad D_2 = \left\{(r,\theta)\middle| \frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, 0 \leqslant r \leqslant 2\cos\theta\right\}$$

所以选项 (B) 是正确的.

4. 下列级数中发散的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$.

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{\ln n}$.

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

解. 应选 (C). 由比值判别法易知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 是收敛的. 因为 $\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\sim\frac{1}{n\sqrt{n}}$, 由比较判别法易知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 是收敛的. 由莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln n}$ 收敛，而由比较判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}\geqslant\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，所以 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+1}{\ln n}$ 是发散的.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

6. 同试卷一第一 [6] 题.

7. 同试卷一第一 [7] 题.

8. 设总体 $X\sim B(m,\theta)$，$X_1,X_2,\dots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2\right]=$ $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$.　　(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$.

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$.　　(D) $mn\theta(1-\theta)$.

解. 应选 (B). 由题设有 $D(X)=m\theta(1-\theta)$. 而由样本方差 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2$ 的性质有 $E(S^2)=D(X)$，从而

$$E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2\right]=(n-1)E(S^2)=m(n-1)\theta(1-\theta).$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 同试卷一第二 [9] 题.

10. 同试卷二第二 [11] 题.

11. 同试卷二第二 [13] 题.

12. 同试卷二第二 [12] 题.

13. 同试卷二第二 [14] 题.

14. 同试卷一第二 [14] 题.

三、解答题（15～23 题，共 94 分）

15. 同试卷一第三 [15] 题.

16. 同试卷二第三 [18] 题.

17.（本题满分 10 分）

为了实现利润的最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为该商品的需求量，P 为价格，MC 为边际成本，η 为需求弹性 $(\eta>0)$.

(I) 证明定价模型为 $P=\dfrac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}$；

(II) 若该商品的成本函数为 $C(Q)=1600+Q^2$，需求函数为 $Q=40-P$，试由 (I) 中的定价模型确定此商品的价格.

解. (I) 由收益 $R=PQ$，得边际收益

$$MR=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=P+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}=P\left(1-\frac{1}{\eta}\right).$$

欲使利润最大，则有 $MR=MC$，即有

$$P\left(1-\frac{1}{\eta}\right)=MC \quad\Rightarrow\quad P=\frac{MC}{1-\dfrac{1}{\eta}}.$$

(II) 由题设可得

$$MC=\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}Q}=2Q=2(40-P),\quad \eta=-\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\frac{P}{40-P}.$$

代入 (I) 中的定价模型得

$$P=\frac{2(40-P)}{1-\dfrac{40-P}{P}} \quad\Rightarrow\quad P=30.$$

18. 同试卷一第三 [16] 题.

19. 同试卷一第三 [18] 题.

20. 同试卷二第三 [22] 题.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23. 同试卷一第三 [23] 题.

二〇一六年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 同试卷二第一 [4] 题.

2. 同试卷二第一 [6] 题.

3. 设 $J_i=\iint_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$（$i=1,2,3$），其中

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant \sqrt{x}\right\},$$

$$D_3=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,x^2\leqslant y\leqslant 1\right\}.$$

则 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (   )

(A) $J_1<J_2<J_3$.　　(B) $J_3<J_1<J_2$.　　(C) $J_2<J_3<J_1$.　　(D) $J_2<J_1<J_3$.

解. 应选 (B). 由积分区域的性质易知.

4. 级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$（$k$ 为常数），则该级数 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (   )

(A) 绝对收敛.　　(B) 条件收敛.

(C) 发散.　　(D) 收敛性与 k 有关.

解. 应选 (A). 因为

$$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}\leqslant\frac{1}{2n\sqrt{n}},$$

由正项级数比较判别法知该级数绝对收敛.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

6. 同试卷二第一 [8] 题.

7. 设 A,B 为随机事件，$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$. 若 $P(A|B)=1$，则下面正确的是 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (   )

(A) $P(\bar{B}\,|\bar{A})=1$.　　(B) $P(A\,|\bar{B})=0$.　　(C) $P(A+B)=1$.　　(D) $P(B\,|A)=1$.

解. 应选 (A). 根据条件得 $P(AB)=P(B)$，所以

$$P(\bar{B}\,|\bar{A})=\frac{P(\bar{A}\bar{B})}{P(\bar{A})}=\frac{P(\overline{A+B})}{1-P(A)}=\frac{1-P(A+B)}{1-P(A)}=1.$$

8. 设随机变量 X,Y 独立，且 $X\sim N(1,2)$，$Y\sim(1,4)$，则 $D(XY)$ 为$\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) 6.　　(B) 8.　　(C) 14.　　(D) 15.

解. 应选 (C)．因为 X,Y 独立，故有

$$D(XY)=E(XY)^2-(EXY)^2=EX^2EY^2-(EXEY)^2$$
$$=\left[DX+(EX)^2\right]\left[DY+(EY)^2\right]-(EXEY)^2=14.$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$________.

解. 应填 6．因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}f(x)\sin 2x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{3}=2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=6$.

10. 同试卷二第二 [10] 题.

11. 同试卷一第二 [11] 题.

12. 设 $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,|x|\leqslant y\leqslant 1,-1\leqslant x\leqslant 1\right\}$，则 $\iint_D x^2e^{-y^2}\,dx\,dy=$________.

解. 应填 $\frac{1}{3}-\frac{2}{3e}$．设 $D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,x\leqslant y\leqslant 1,0\leqslant x\leqslant 1\right\}$，则由对称性有

$$\iint_D x^2e^{-y^2}\,dx\,dy=2\iint_{D_1}x^2e^{-y^2}\,dx\,dy$$
$$=2\int_0^1 dy\int_0^y x^2e^{-y^2}\,dx=\frac{2}{3}\int_0^1 y^3e^{-y^2}\,dy=\frac{1}{3}-\frac{2}{3e}.$$

13. 同试卷一第二 [13] 题.

14. 设袋中有红、白、黑球各 1 个，从中有放回的取球，每次取 1 个，直到三种颜色的球都取到为止，则取球次数恰为 4 的概率为________.

解. 应填 $\frac{2}{9}$．$P(A)=C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{3}\times 2\cdot C_3^1\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$.

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15. 同试卷二第三 [15] 题.

16.（本题满分 10 分）

设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性 $\eta=\dfrac{p}{120-p}$（$\eta>0$），p 为单价（万元）.

(I) 求需求函数的表达式;

(II) 求 $p=100$ 万元时的边际收益，并说明其经济意义.

解. (I) 由弹性的计算公式 $\eta=\left|\dfrac{p}{Q}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\right|$ 可知

$$\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\frac{-p}{120-p}\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=\frac{\mathrm{d}p}{p-120}.$$

两边同时积分可得 $\ln Q=\ln(p-120)+C$．解得 $Q=C(p-120)$．由最大需求量为 1200 可知 $Q(0)=1200$，解得 $C=-10$．故

$$Q=-10(p-120)=1200-10p.$$

(II) 收益 $R=Qp=(1200-10P)P$，因此边际收益为

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}Q}=(1200-20p)(-10)=200p-12000.$$

因此 $\left.\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{p=100}=8000$，其经济学意义是需求量每提高 1 件，收益增加 8000 万元.

17. 同试卷二第三 [16] 题.

18.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1$，求 $f(x)$.

解. 令 $u=x-t$，则有

$$\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t=\int_x^0 f(u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^x f(u)\mathrm{d}u.$$

代入方程可得

$$\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{-x}-1.$$

两边同时求导可得

$$f(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\mathrm{e}^{-x}.$$

在上式两边令 $x=0$ 可得 $f(0)=-1$．由 $f(x)$ 连续知 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可导，从而 $f(x)$ 也可导．对上式两边再求导可得

$$f'(x)=f(x)+\mathrm{e}^{-x}.$$

解此一阶线性微分方程，并代入初始条件可得

$$f(x)=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}.$$

19.（本题满分 10 分）

求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数.

解. 由比值法可得级数的收敛半径为 1．又因为 $x=\pm1$ 时级数收敛，故级数的收敛域为 $[-1,1]$．令

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)},$$

则当 $x\in(-1,1)$ 时，两边同时求导得

$$S'(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)},$$

两边同时求导得

$$S''(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{2}{1-x^2}.$$

两边积分可得

$$S'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+C.$$

由 $S'(0)=0$ 可知

$$S'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x).$$

两边再积分可知

$$S(x)=(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x).$$

由于和函数在收敛域内连续，且在两个端点处有

$$\lim_{x\to1}S(x)=2\ln2,\qquad \lim_{x\to-1}S(x)=2\ln2,$$

所以和函数

$$S(x)=\begin{cases}(1+x)\ln(1+x)+(1-x)\ln(1-x), & x\in(-1,1);\\ 2\ln2, & x=\pm1.\end{cases}$$

20. 同试卷二第三 [22] 题.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23. 同试卷一第三 [23] 题.

二〇一七年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) $(0,0)$. (B) $(0,3)$. (C) $(3,0)$. (D) $(1,1)$.

解. 应选 (D). 首先求偏导数得

$$z'_x=y(3-x-y)-xy=y(3-2x-y),$$

$$z'_y=x(3-x-y)-xy=x(3-x-2y),$$

$$z''_{xx}=-2y,\quad z''_{xy}=3-2x-2y,\quad z''_{yy}=-2x.$$

验证可知这四个点均为驻点，但只有 $(1,1)$ 满足 $AC-B^2>0$.

3. 同试卷一第一 [2] 题.

4. 设函数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛，则 $k=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) 1. (B) 2. (C) -1. (D) -2.

解. 应选 (C). 由麦克劳林公式可得

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)&=\frac{1}{n}-\frac{1}{6}\frac{1}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)+k\frac{1}{n}+\frac{k}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=(1+k)\frac{1}{n}+\frac{k}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

又 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$ 收敛，故有 $k+1=0$，即 $k=-1$.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

6. 同试卷一第一 [6] 题.

7. 设 A,B,C 为三个随机事件，且 A 与 C 相互独立，B 与 C 相互独立，则 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充要条件是$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$( )

(A) A 与 B 相互独立. (B) A 与 B 互不相容.

(C) AB 与 C 相互独立. (D) AB 与 C 互不相容.

解. 应选 (C). 由 A 与 C 相互，B 与 C 相互独立得

$$\begin{aligned}P((A\cup B)C)&=P(AC\cup BC)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)\\&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(ABC),\end{aligned}$$

$$P(A\cup B)P(C)=(P(A)+P(B)-P(AB))P(C)$$

$$=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(AB)P(C).$$

因此 $P((A\cup B)C)=P(A\cup B)P(C)$ 等价于 $P(ABC)=P(AB)P(C)$，即 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充要条件是 AB 与 C 相互独立.

8. 同试卷一第一 [8] 题.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=$ ________.

解. 应填 $\frac{\pi^3}{2}$. 由定积分的对称性和几何意义可得

$$\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^3 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{2}.$$

10. 差分方程 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 的通解为 $y_t=$ ________.

解. 应填 $y_t=C2^t+t2^{t-1},C\in R$. 由 $y_{t+1}-2y_t=2^t$ 可得齐次特征方程为 $r-2=0$，得 $r=2$，故其齐次方程的通解为 $y=C2^t$，设 $y^*=at2^t$，代入得 $a=\frac{1}{2}$，故通解为 $y_t=C2^t+t2^{t-1},C\in R$.

11. 设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}$，其中 Q 为产量，则边际成本为 ________.

解. 应填 $1+\mathrm{e}^{-Q}(1-Q)$. 由 $\overline{C}(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}$ 得

$$C(Q)=Q\overline{C}(Q)=Q(1+\mathrm{e}^{-Q})\quad\Rightarrow\quad C'(Q)=1+\mathrm{e}^{-Q}(1-Q).$$

12. 同试卷二第二 [12] 题.

13. 同试卷一第二 [13] 题.

14. 设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=-2\}=\frac{1}{2}$，$P\{X=1\}=a$，$P\{X=3\}=b$，若 $EX=0$，则 $DX=$ ________.

解. 应填 $\frac{9}{2}$. 由分布律的归一性可知 $\frac{1}{2}+a+b=1$，又由

$$EX=-2\times\frac{1}{2}+1+a+3b=0,$$

解得 $a=\frac{1}{4},b=\frac{1}{4}$，从而

$$EX^2=(-2)^2+\frac{1}{2}+1^2\times\frac{1}{4}+3^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{2},\quad DX=EX^2-(EX)^2=\frac{9}{2}.$$

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15. 同试卷二第三 [15] 题.

16.（本题满分 10 分）

计算积分 $\iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 D 是第一象限中以曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴为边界的无界区域.

解. 将二重积分化为累次积分计算得

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{y^3}{(1+x^2+y^4)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3\,\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^4)^2}=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\frac{\mathrm{d}\left(y^4\right)}{(1+x^2+y^4)^2}\\ &=-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left[\frac{1}{(1+x^2+y^4)^2}\right]_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+2x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &=\frac{1}{4}\left[\arctan x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}x\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).\end{aligned}$$

17. 同试卷一第三 [16] 题.

18.（本题满分 10 分）

已知方程 $\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，求 k 的范围.

解. 令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$，求导得

$$f'(x)=-\frac{1}{\ln^2(1+x)}\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}.$$

令 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$，则当 $x\in(0,1)$ 时有

$$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x,$$

$$g''(x)=2\frac{\ln(1+x)-x}{1+x}<0.$$

故 $g'(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，从而 $x\in(0,1)$ 时 $g'(x)<g'(0)=0$. 故 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减，从而 $x\in(0,1)$ 时 $g(x)<g(0)=0$. 因此有 $f'(x)<0$，可知 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 上单调递减. 因为

$$f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1,\quad \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{2},$$

要使得 $f(x)=k$ 在 $(0,1)$ 内有实根，必有 $\frac{1}{\ln 2}-1<k<\frac{1}{2}$.

19.（本题满分 10 分）

设 $a_0=1$，$a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$（$n=1,2,\cdots$），$S(x)$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(I) 证明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1；

(II) 证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0$（$x\in(-1,1)$），并求 $S(x)$ 的表达式.

解. (I) 由 $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$，两边同时减去 a_n 可知

$$a_{n+1}-a_n=\frac{-1}{n+1}(a_n-a_{n-1}).$$

进而有

$$a_{n+1}-a_n=\frac{-1}{n+1}\cdot\frac{-1}{n}(a_{n-1}-a_{n-2})=\cdots=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}(a_1-a_0)=\frac{(-1)^n}{(n+1)!}.$$

从而有

$$a_n=a_{n-1}+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=a_{n-2}+\frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}=\cdots=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k!}.$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e}=1.$$

故收敛半径 $R\geqslant 1$.

(II) 因为 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，所以

$$(1-x)S'(x)=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-na_n]x^n+a_1x,$$

$$xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n.$$

由 $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})$，可知 $(n+1)a_{n+1}-na_n-a_{n-1}=0$. 又由于 $a_1=0$，故有

$$(1-x)S'(x)-xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)a_{n+1}-na_n-a_{n-1}]x^n+a_1x=0.$$

解此微分方程可得 $S(x)=\frac{Ce^{-x}}{1-x}$；又由于 $S(0)=a_0=1$，可知 $C=1$，从而 $S(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$.

20. 同试卷一第三 [20] 题.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23. 同试卷一第三 [23] 题.

二〇一八年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 同试卷二第一 [4] 题.

3. 同试卷一第一 [4] 题.

4. 某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导，其中 Q 为产量，若产量为 Q_0 时平均成本最小，则 ………………………………………………………………… (　)

(A) $C'(Q_0)=0$.　　(B) $C'(Q_0)=C(Q_0)$.

(C) $C'(Q_0)=Q_0C(Q_0)$.　　(D) $Q_0C'(Q_0)=C(Q_0)$.

解. 应选 (D). 平均成本函数 $\overline{C}(Q)=\dfrac{C(Q)}{Q}$，其取最小值时，则导数为零，即

$$\overline{C}'(Q)\Big|_{Q_0}=\frac{C'(Q)Q-C(Q)}{Q^2}\Big|_{Q_0}=\frac{C'(Q_0)Q_0-C(Q_0)}{Q_0^2}=0,$$

即 $C'(Q_0)Q_0-C(Q_0)=0$.

5. 同试卷一第一 [5] 题.

6. 同试卷一第一 [6] 题.

7. 同试卷一第一 [7] 题.

8. 已知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的简单随机样本，

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2},\quad S^*=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu\right)^2},$$

则 ………………………………………………………………… (　)

(A) $\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}\sim t(n)$.　　(B) $\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}\sim t(n-1)$.

(C) $\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S^*}\sim t(n)$.　　(D) $\dfrac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S^*}\sim t(n-1)$.

解. 应选 (B). 由单个正态总体的分布的性质可知

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1),\quad \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-1).$$

由因为 $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，所以

$$\frac{\sqrt{n}\left(\overline{X}-\mu\right)}{S}=\frac{\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}/(n-1)}}\sim t(n-1).$$

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. 同试卷二第二 [10] 题.

10. 求解 $\int e^x \arcsin\sqrt{1-e^x}\,dx=$ ________.

解. 应填 $e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+C$. 由分部积分法可得

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=\int \arcsin\sqrt{1-e^{2x}}\,d(e^x)\\
&=e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\int\frac{e^x}{\sqrt{1-(1-e^{2x})}}\frac{1}{2\sqrt{1-e^{2x}}}(-2e^{2x})\,dx\\
&=e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}+\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx\\
&=e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,d(1-e^{2x})\\
&=e^x\arcsin\sqrt{1-e^{2x}}-\sqrt{1-e^{2x}}+C.
\end{aligned}
$$

11. 差分方程 $\Delta^2 y_x-y_x=5$ 的解为 ________.

解. 应填 $y_x=C\cdot 2^x-5$. 二阶差分

$$\Delta^2 y_x=\Delta y_{x+1}-\Delta y_x=(y_{x+2}-y_{x+1})-(y_{x+1}-y_x)=y_{x+2}-2y_{x+1}+y_x.$$

因此差分方程化简为 $y_{x+2}-2y_{x+1}=5$. 齐次方程 $y_{x+2}-2y_{x+1}=0$ 的通解为 $y_x=C\cdot 2^x$. 设非齐次的特解为 $y_x^*=A$，代入非齐次方程中得 $A=-5$. 故非齐次的通解为 $y_x=C\cdot 2^x-5$.

12. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x+\Delta x)-f(x)=2xf(x)\Delta x+o(\Delta x)$，且 $f(0)=2$，则 $f(1)=$ ________.

解. 应填 $2e$. 根据线性主部可知 $f'(x)=2xf(x)$，解微分方程可得 $f(x)=Ce^{x^2}$. 由 $f(0)=2$ 得 $C=2$，所以 $f(x)=2e^{x^2}$，故有 $f(1)=2e$.

13. 同试卷二第二 [14] 题.

14. 已知事件 A，B，C 相互独立，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$，则 $P(AC|A\cup B)=$ ________.

解. 应填 $\frac{1}{3}$. 直接计算可得

$$
\begin{aligned}
P(AC|A\cup B)&=\frac{P[AC(A\cup B)]}{P(A\cup B)}=\frac{P[AC\cup ABC]}{P(A\cup B)}=\frac{P(AC)}{P(A\cup B)}\\
&=\frac{P(A)P(C)}{P(A)+P(B)-P(A)P(B)}=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

三、解答题（15～23 小题，共 94 分）

15.（本题满分 10 分）

已知实数 a, b 满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(ax+b)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-x\right]=2$，求 a, b.

解. 令 $x=\frac{1}{t}$，则由题设有

$$2=\lim_{t\to0^+}\left[\left(\frac{a}{t}+b\right)\mathrm{e}^t-\frac{1}{t}\right]=\lim_{t\to0^+}\frac{(a+bt)\mathrm{e}^t-1}{t}.$$

从而有

$$\lim_{t\to0^+}\left[(a+bt)\mathrm{e}^t-1\right]=0\quad\Rightarrow\quad a=1.$$

因此由洛必达法则有

$$2=\lim_{t\to0^+}\frac{(1+bt)\mathrm{e}^t-1}{t}=\lim_{t\to0^+}\left[\mathrm{e}^t(1+bt)+b\mathrm{e}^t\right]=1+b.$$

解得 $b=1$.

16.（本题满分 10 分）

设平面区域 D 由曲线 $y=\sqrt{3(1-x^2)}$ 与直线 $y=\sqrt{3}x$ 及 y 轴围成，计算二重积分 $\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

解. 将二重积分化为累次积分计算得

$$\begin{aligned}\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y&=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{3}x}^{\sqrt{3(1-x^2)}}x^2\,\mathrm{d}y=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2(\sqrt{1-x^2}-x)\,\mathrm{d}x\\&=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^3\,\mathrm{d}x\\&=\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^2t\cdot\cos^2t\,\mathrm{d}t-\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}x^3\,\mathrm{d}x=\sqrt{3}\frac{\pi}{32}-\frac{\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{3}(\pi-2)}{32}.\end{aligned}$$

17. 同试卷一第三 [16] 题.

18.（本题满分 10 分）

已知 $\cos2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ $(-1<x<1)$，求 a_n.

解. 由已知的泰勒级数展开式可得

$$\cos2x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^nx^{2n},$$

$$-\frac{1}{(1+x)^2}=\left(\frac{1}{1+x}\right)'=\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nnx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n.$$

由此可得

$$\cos2x-\frac{1}{(1+x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}4^nx^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

因此所求系数为

$$a_n=\begin{cases}-(2k+1)+(-1)^k\frac{1}{(2k)!}4^k, & n=2k,\\ 2k+2, & n=2k+1,\end{cases}\quad (k=0,1,2\cdots).$$

19. 同试卷一第三 [19] 题.

20. 同试卷一第三 [20] 题.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23. 同试卷一第三 [23] 题.

二〇一九年考研数学试卷三解答

一、选择题（1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分）

1. 同试卷一第一 [1] 题.

2. 已知方程 $x^5-5x+k=0$ 有三个不同的实根，则 k 的取值范围是 $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $(-\infty,-4)$.　　(B) $(4,+\infty)$.　　(C) $(-4,0)$.　　(D) $(-4,4)$.

解. 应选 (D). 设 $f(x)=x^5-5x+k$，则 $f'(x)=5x^4-5=5(x^4-1)$. 令 $f'(x)=0$ 得 $x=\pm1$. 当 $-1<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f'(x)>0$. 因此函数有极大值 $f(-1)=4+k$, 极小值 $f(1)=k-4$. 又 $f(-\infty)=-\infty$, $f(+\infty)=+\infty$, 结合单调性知, 若方程有三个不同实根, 则必须有 $f(-1)=4+k>0$ 且 $f(1)=k-2<0$, 解得 $k\in(-4,4)$.

3. 同试卷二第一 [4] 题.

4. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nu_n$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛，则 $\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 条件收敛.　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_nv_n$ 绝对收敛.

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛.　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散.

解. 应选 (B). 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{v_n}{n}$ 条件收敛知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{v_n}{n}=0$，从而该数列有界，所以 $|u_nv_n|=\left|nu_n\cdot\dfrac{v_n}{n}\right|\leqslant M|nu_n|$. 由正项级数的比较审敛法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛.

5. 同试卷二第一 [7] 题.

6. 同试卷一第一 [5] 题.

7. 同试卷一第一 [7] 题.

8. 同试卷一第一 [8] 题.

二、填空题（9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分）

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}\right)^n=$ ________.

解. 应填 e^{-1}. 这是因为

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n=\mathrm{e}^{-1}.$$

10. 曲线 $y=x\sin x+2\cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标是________.

解. 应填 $(\pi,-2)$. 由 $y=x\sin x+2\cos x$；得

$$y'=x\cos x-\sin x,\quad y''=-x\sin x.$$

令 $y''=0$ 得 $x_1=0,x_2=\pi$. 当 $-\frac{\pi}{2}<x<0$ 或 $0<x<\pi$ 时，$y''<0$；当 $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ 时，$y''>0$. 所以 $(\pi,-2)$ 是曲线的唯一拐点.

11. 已知函数 $f(x)=\int_1^x\sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$，则 $\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x=$________.

解. 应填 $\frac{1-2\sqrt{2}}{18}$. 由分部积分法可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2f(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{3}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\left(x^3\right)=\frac{1}{3}\left[x^3f(x)\right]_0^1-\frac{1}{3}\int_0^1 x^3\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{12}\int_0^1\sqrt{1+x^4}\,\mathrm{d}(1+x^4)=\frac{1-2\sqrt{2}}{18}.\end{aligned}$$

12. 以 P_A,P_B 分别表示 A,B 两个商品的价格. 设商品 A 的需求函数

$$Q_A=500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2,$$

则当 $P_A=10,P_B=20$ 时，商品 A 的需求量对自身价格弹性 η_{AA} $(\eta_{AA}>0)=$ ________.

解. 应填 0.4. 由需求弹性公式可得

$$\eta_{AA}=\frac{EQ_A}{EP_A}=\left|\frac{P_A}{Q_A}\cdot\frac{\partial Q_A}{\partial P_A}\right|=\left|\frac{P_A(-2P_A-P_B)}{500-P_A^2-P_AP_B+2P_B^2}\right|.$$

当 $P_A=10,P_B=20$ 时，求得 $\eta_{AA}=\frac{10\times 40}{1000}=0.4$.

13. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&1&-1\\0&1&a^2-1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}0\\1\\a\end{pmatrix}$. 若线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，则 $a=$________.

解. 应填 1. 对增广矩阵进行初等行变换得

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&1&-1&1\\0&1&a^2-1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&1&a^2-1&a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&1\\0&0&a^2-1&a-1\end{pmatrix}.$$

当 $a=1$ 时，$r(A)=r(A,b)=2<3$，线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解.

14. 同试卷一第二 [14] 题.

三、解答题（15～23 题，共 94 分）

15. 同试卷二第三 [15] 题.

16.（本题满分 10 分）

已知 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数，且 $g(x,y)=xy-f(x+y,x-y)$，求

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

解. 由复合函数的求导法则，可得一阶偏导数为

$$\frac{\partial g}{\partial x}=y-f_1'(x+y,x-y)-f_2'(x+y,x-y),$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}=x-f_1'(x+y,x-y)+f_2'(x+y,x-y).$$

从而二阶偏导数为

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=-f_{11}''-f_{12}''-f_{21}''-f_{22}''=-f_{11}''-2f_{12}''-f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=1-f_{11}''+f_{12}''-f_{21}''+f_{22}''=1-f_{11}''+f_{22}'',$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=-f_{11}''+f_{12}''+f_{21}''-f_{22}''=-f_{11}''+2f_{12}''-f_{22}''.$$

将以上结果代入得

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=1-3f_{11}''(x+y,x-y)-f_{22}''(x+y,x-y).$$

17. 同试卷二第三 [17] 题.

18. 同试卷一第三 [17] 题.

19. 同试卷一第三 [18] 题.

20. 同试卷二第三 [22] 题.

21. 同试卷一第三 [21] 题.

22. 同试卷一第三 [22] 题.

23. 同试卷一第三 [23] 题.