微积分课程

第一章 · 数集与函数

2020 年 8 月 29 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	数集与区间
A	集合
B	实数集
C	区间
D	邻域

集合的概念

- 集合是具有某种属性的事物的全体；
- 构成集合的事物，称为集合的元素.

集合的表示法

1. 列举法：比如 $A = \{a, b, c, d\}$
2. 描述法：比如 $B = \{x \mid x^3 + x - 1 > 0\}$

全集与空集

- 由所研究所有对象构成的集合称为全集，记为 Ω.
- 不包含任何元素的集合称为空集，记为 $\emptyset$.

子集与包含

如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，则称 A 是 B 的子集.

- 记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$
- 或称为 A 包含于 B，或 B 包含 A

集合的运算

1 交运算：$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$

集合的运算

1. 交运算：$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
2. 并运算：$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$

集合的运算

1. 交运算：$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
2. 并运算：$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
3. 差运算：$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$

集合的运算

1. 交运算：$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \in B\}$
2. 并运算：$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 或 } x \in B\}$
3. 差运算：$A - B = \{x | x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
4. 补运算：$\overline{A} = \{x | x \in \Omega \text{ 且 } x \notin A\}$

集合运算律

1 交换律

. . . .

集合运算律

- $A \cap B = B \cap A$

1 交换律

. . . .

集合运算律

1 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

集合运算律

1 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

……………………………………

2 结合律

……………………………………

集合运算律

1 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2 结合律

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

集合运算律

1 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2 结合律

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

集合运算律

1 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2 结合律

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3 分配律

集合运算律

1 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2 结合律

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3 分配律

- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

集合运算律

1 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2 结合律

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3 分配律

- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

集合运算律

1 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2 结合律

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3 分配律

- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

4 对偶律

集合运算律

1 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2 结合律

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3 分配律

- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

4 对偶律

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

集合运算律

1 交换律

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cup B = B \cup A$

2 结合律

- $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3 分配律

- $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
- $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

4 对偶律

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

集合的笛卡尔乘积

设有集合 A 和 B．对任意的 $x \in A$，$y \in B$，所有二元有序数组 (x, y) 构成的集合，称为集合 A 与 B 的笛卡尔乘积，记为 $A \times B$，即有

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A, y \in B\}$$

数集

人类对数的认识是逐步发展的:

- 自然数集 $\mathbb{N}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的：

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的：

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的：

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的：

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$
- 复数集 $\mathbb{C}$

数集

人类对数的认识是逐步发展的:

- 自然数集 $\mathbb{N}$
- 整数集 $\mathbb{Z}$
- 有理数集 $\mathbb{Q}$
- 实数集 $\mathbb{R}$ $\longleftarrow$ 微积分的研究对象
- 复数集 $\mathbb{C}$

第一节	数集与区间
A	集合
B	实数集
C	区间
D	邻域

有限区间

区间可分为有限区间和无限区间两类．有限区间有如下四种（其中 a 和 b 称为区间的端点）：

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$ 开区间

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$ 闭区间

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$ 左开右闭区间

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$ 左闭右开区间

有限区间

区间可分为有限区间和无限区间两类．有限区间有如下四种（其中 a 和 b 称为区间的端点）：

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\} \quad \text{开区间}$$

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\} \quad \text{闭区间}$$

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\} \quad \text{左开右闭区间}$$

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\} \quad \text{左闭右开区间}$$

例子　用区间表示下列数集：

(1) $\{x\mid 1<x<3\}$　　(2) $\{x\mid -5\leqslant x<0\}$

无限区间

无限区间有如下五种：

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\} \qquad (a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\} \qquad [a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

无限区间

无限区间有如下五种：

$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ $(a, +\infty) = \{x \mid x > a\}$

$(-\infty, b] = \{x \mid x \leqslant b\}$ $[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$

$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

例子 用区间表示下列数集：

(1) $\{x \mid x < 3\}$ (2) $\{x \mid x \geqslant 2\}$

绝对值

一个实数的绝对值定义为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

绝对值

一个实数的绝对值定义为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

去绝对值号的方法（设 $a, b > 0$）：

- $|x| < b$ 等价于 $-b < x < b$

绝对值

一个实数的绝对值定义为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

去绝对值号的方法（设 $a, b > 0$）：

- $|x| < b$ 等价于 $-b < x < b$
- $|x| > a$ 等价于 $x < -a$ 或 $x > a$

绝对值

一个实数的绝对值定义为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

去绝对值号的方法（设 $a, b > 0$）：

- $|x| < b$ 等价于 $-b < x < b$
- $|x| > a$ 等价于 $x < -a$ 或 $x > a$
- $a < |x| < b$ 等价于 $-b < x < -a$ 或 $a < x < b$

绝对值

一个实数的绝对值定义为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

去绝对值号的方法（设 $a, b > 0$）：

- $|x| < b$ 等价于 $-b < x < b$
- $|x| > a$ 等价于 $x < -a$ 或 $x > a$
- $a < |x| < b$ 等价于 $-b < x < -a$ 或 $a < x < b$

绝对值的三角不等式：

绝对值

一个实数的绝对值定义为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$

去绝对值号的方法（设 $a, b > 0$）：

- $|x| < b$ 等价于 $-b < x < b$
- $|x| > a$ 等价于 $x < -a$ 或 $x > a$
- $a < |x| < b$ 等价于 $-b < x < -a$ 或 $a < x < b$

绝对值的三角不等式：

- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$

绝对值

一个实数的绝对值定义为 $|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

去绝对值号的方法（设 $a, b > 0$）：

- $|x| < b$ 等价于 $-b < x < b$
- $|x| > a$ 等价于 $x < -a$ 或 $x > a$
- $a < |x| < b$ 等价于 $-b < x < -a$ 或 $a < x < b$

绝对值的三角不等式：

- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$
- $|x - y| \geqslant |x| - |y|$

区间

例 1　用区间表示下列数集:

(1) $\left\{x \,\middle|\, |x-2|<1\right\}$.

(2) $\left\{x \,\middle|\, |x+3| \geqslant 5\right\}$.

(3) $\left\{x \,\middle|\, 1 \leqslant |x+1|<4\right\}$.

练习 1　用区间表示下列数集：

(1) $\left\{x \,\middle|\, |x+2| \leqslant 3\right\}$

(2) $\left\{x \,\middle|\, |x-4| > 7\right\}$

(3) $\left\{x \,\middle|\, 2 < |x+3| \leqslant 5\right\}$

练习 1　用区间表示下列数集：

(1) $\left\{x \,\middle|\, |x+2| \leqslant 3\right\}$

(2) $\left\{x \,\middle|\, |x-4| > 7\right\}$

(3) $\left\{x \,\middle|\, 2 < |x+3| \leqslant 5\right\}$

解答

(1) $[-5, 1]$

(2) $(-\infty, -3) \cup (11, +\infty)$

(3) $[-8, -5) \cup (-1, 2]$

区间

例 2　用区间表示下列数集：

(1) $\left\{x \middle| x^2 - x - 2 < 0\right\}$

(2) $\left\{x \middle| x^2 + x - 6 \geqslant 0\right\}$

区间

例 2　用区间表示下列数集：

(1) $\left\{x \mid x^2 - x - 2 < 0\right\}$

(2) $\left\{x \mid x^2 + x - 6 \geqslant 0\right\}$

练习 2　用区间表示下列数集：

(1) $\left\{x \mid x^2 + 2x - 3 \leqslant 0\right\}$

(2) $\left\{x \mid x^2 - 3x + 2 > 0\right\}$

区间

例 2　用区间表示下列数集：

(1) $\left\{x \middle| x^2 - x - 2 < 0\right\}$

(2) $\left\{x \middle| x^2 + x - 6 \geqslant 0\right\}$

练习 2　用区间表示下列数集：

(1) $\left\{x \middle| x^2 + 2x - 3 \leqslant 0\right\}$

(2) $\left\{x \middle| x^2 - 3x + 2 > 0\right\}$

例 3　用区间表示数集 $\left\{x \middle| |x^2 - 3x - 2| < 2\right\}$.

第一节	数集与区间
A	集合
B	实数集
C	区间
D	邻域

邻域

- a 的邻域 $U(a,\delta)$:

$$\{x \mid |x-a|<\delta\} = (a-\delta, a+\delta)$$

- a 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$:

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\} = (a-\delta, a)\cup(a, a+\delta)$$

邻域

- a 的邻域 $U(a,\delta)$：

$$\left\{x \,\middle|\, |x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a+\delta)$$

- a 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$：

$$\left\{x \,\middle|\, 0<|x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

- a 的左邻域：$(a-\delta,a)$
- a 的右邻域：$(a,a+\delta)$

邻域

- a 的邻域 $U(a,\delta)$：

$$\left\{x \,\middle|\, |x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a+\delta)$$

- a 的去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$：

$$\left\{x \,\middle|\, 0<|x-a|<\delta\right\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

- a 的左邻域：$(a-\delta,a)$
- a 的右邻域：$(a,a+\delta)$

其中 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

第二节	函数的概念
A	函数的定义
B	函数的记号
C	自然定义域

定义 1　设非空数集 $D \subset \mathbb{R}$，如果存在一个对应规则 f，使得对每个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个**函数**，记为 $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$，简记为 $y = f(x)$.

定义 1 设非空数集 $D \subset \mathbb{R}$，如果存在一个对应规则 f，使得对每个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称 f 为定义在 D 上的一个**函数**，记为 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$，简记为 $y = f(x)$.

- x 称为**自变量**；
- y 称为**因变量**；
- D 称为**定义域**；
- $Z = \left\{ y \,\middle|\, y = f(x), x \in D \right\}$ 称为**值域**.

注记　两个函数相同，当且仅当两者的定义域和对应规则都相同.

注记　两个函数相同，当且仅当两者的定义域和对应规则都相同.

例 1　研究 $y = x$ 和 $y = \dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数.

注记　两个函数相同，当且仅当两者的定义域和对应规则都相同.

例 1　研究 $y=x$ 和 $y=\dfrac{x^2}{x}$ 是不是相同的函数.

例 2　研究 $y=x$ 和 $y=\sqrt{x^2}$ 是不是相同的函数.

第二节	函数的概念
A	函数的定义
B	函数的记号
C	自然定义域

函数的记号

例 3　已知 $f(x) = x(x+1)$，求 $f(x-1)$.

函数的记号

例 3　已知 $f(x)=x(x+1)$，求 $f(x-1)$.

例 4　已知 $f(x-1)=x^2+1$，求 $f(x)$.

函数的记号

练习 1　已知 $f(3x-1)=9x^2+6x-2$，求 $f(x)$.

函数的记号

练习 1　已知 $f(3x-1)=9x^2+6x-2$，求 $f(x)$.

解答　$f(x)=x^2+4x+1$.

函数的记号

练习 1　已知 $f(3x-1)=9x^2+6x-2$，求 $f(x)$.

解答　$f(x)=x^2+4x+1$.

练习 2　已知 $f(\frac{x-1}{x+1})=x+2$，求 $f(x)$.

函数的记号

练习 1　已知 $f(3x-1)=9x^2+6x-2$，求 $f(x)$.

解答　$f(x)=x^2+4x+1.$

练习 2　已知 $f(\frac{x-1}{x+1})=x+2$，求 $f(x)$.

解答　$f(x)=\frac{x-3}{x-1}.$

第二节	函数的概念
A	函数的定义
B	函数的记号
C	自然定义域

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

(1) $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $D = [0, +\infty)$，

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

(1) $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $D=[0,+\infty)$,

(2) $y=\log_a x$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$,

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

(1) $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $D = [0, +\infty)$,

(2) $y = \log_a x$ 的定义域为 $D = (0, +\infty)$,

(3) $y = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

(1) $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $D=[0,+\infty)$,

(2) $y=\log_a x$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$,

(3) $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求：

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

(1) $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $D=[0,+\infty)$,

(2) $y=\log_a x$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$,

(3) $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求：

(1) 根号里面要求大于等于零；

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域．例如

(1) $y=\sqrt{x}$ 的定义域为 $D=[0,+\infty)$,

(2) $y=\log_a x$ 的定义域为 $D=(0,+\infty)$,

(3) $y=\frac{1}{x}$ 的定义域为 $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求：

(1) 根号里面要求大于等于零；

(2) 对数里面要求大于零；

自然定义域

对未指明定义域的函数，通常根据函数表达式确定它的自然定义域. 例如

(1) $y = \sqrt{x}$ 的定义域为 $D = [0, +\infty)$,

(2) $y = \log_a x$ 的定义域为 $D = (0, +\infty)$,

(3) $y = \frac{1}{x}$ 的定义域为 $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

求函数的自然定义域时有三个基本要求:

(1) 根号里面要求大于等于零;

(2) 对数里面要求大于零;

(3) 分母要求不能等于零.

自然定义域

例 6　用区间表示下列函数的定义域：

(1) $y = \ln(2x+6) + \sqrt{5-x}$　　(2) $y = \dfrac{1}{\ln(x-5)}$

自然定义域

例 6　用区间表示下列函数的定义域：

(1) $y=\ln(2x+6)+\sqrt{5-x}$　　(2) $y=\frac{1}{\ln(x-5)}$

练习 4　用区间表示下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{4-x^2}+\sqrt{x+3}$　　(2) $y=\ln(\frac{x+1}{x-1})$

第三节	函数的性质
A	函数的奇偶性
B	函数的周期性
C	函数的单调性
D	函数的有界性

函数的奇偶性

定义 1 给定函数 $y = f(x)$,

(1) 若 $\forall x \in D$，总有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 若 $\forall x \in D$，总有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

函数的奇偶性

定义 1 给定函数 $y = f(x)$,

(1) 若 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 若 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例子 $x, x^3, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^3}, \sin x, \tan x$ 为奇函数.

函数的奇偶性

定义 1 给定函数 $y = f(x)$,

(1) 若 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数.

(2) 若 $\forall x \in D$, 总有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

例子 $x, x^3, \dfrac{1}{x}, \dfrac{1}{x^3}, \sin x, \tan x$ 为奇函数.

例子 $x^2, x^4, \dfrac{1}{x^2}, \dfrac{1}{x^4}, \cos x$ 为偶函数.

函数的奇偶性

例 1　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

(2) $f(x) = x^3 + x$

(3) $f(x) = x^2 + x + 1$

函数的奇偶性

例 1　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

(2) $f(x) = x^3 + x$

(3) $f(x) = x^2 + x + 1$

练习 1　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x) = \frac{1-x^2}{\cos x}$

(2) $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

函数的奇偶性

例 1　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^4-2x^2+1$

(2) $f(x)=x^3+x$

(3) $f(x)=x^2+x+1$

练习 1　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\frac{1-x^2}{\cos x}$ ……………………偶函数

(2) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ ……………………奇函数

第三节	函数的性质
A	函数的奇偶性
B	函数的周期性
C	函数的单调性
D	函数的有界性

函数的周期性

定义 2 对于函数 $y = f(x)$，如果存在正常数 T 使得 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称此函数为**周期函数**；满足这个等式的最小正数 T，称为此函数的**周期**.

函数的周期性

定义 2 对于函数 $y = f(x)$，如果存在正常数 T 使得 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称此函数为周期函数；满足这个等式的最小正数 T，称为此函数的周期.

例子 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 以 2π 为周期.

函数的周期性

定义 2　对于函数 $y = f(x)$，如果存在正常数 T 使得 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称此函数为**周期函数**；满足这个等式的最小正数 T，称为此函数的**周期**.

例子　$y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 以 2π 为周期.

例子　$y = \tan x$ 和 $y = \cot x$ 以 π 为周期.

函数的单调性

定义 3　设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义，对于区间 I 上的任意两点 x_1 和 x_2，

(1) 若当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的；

(2) 若当 $x_1 < x_2$ 时有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的；

函数的单调性

例子　$y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的.

函数的单调性

例子　$y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子　$y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

函数的单调性

例子　$y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子　$y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子　$y = 1/x$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调减少.

函数的单调性

例子　$y = x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子　$y = \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上是单调增加的.

例子　$y = 1/x$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调减少.

例子　$y = x^2$ 在 $(-\infty, 0]$ 上单调减少，在 $[0, +\infty)$ 上单调增加.

第三节	函数的性质
A	函数的奇偶性
B	函数的周期性
C	函数的单调性
D	函数的有界性

函数的有界性

定义 4　设函数 $y = f(x)$ 在数集 I 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界．若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

函数的有界性

定义 4 设函数 $y = f(x)$ 在数集 I 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有 $x \in I$，恒有 $|f(x)| \leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界．若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

如果函数在其定义域上有界，则称它为有界函数；否则称它为无界函数.

函数的有界性

定义 4　设函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界．若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界.

如果函数在其定义域上有界，则称它为有界函数；否则称它为无界函数.

例子　$y=\sin x$，$y=\cos x$ 是有界函数.

函数的有界性

定义 4 设函数 $y=f(x)$ 在数集 I 上有定义，如果存在一个正数 M，对于所有 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在数集 I 上有界．若这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 I 上无界．

如果函数在其定义域上有界，则称它为有界函数；否则称它为无界函数．

例子 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 是有界函数．

例子 $y=x^2$，$y=\tan x$，$y=x\cos x$ 是无界函数．

函数的有界性

例 2　证明下列函数为有界函数

(1) $y = \sin x - 2\cos x$　(2) $y = \frac{1}{3+x^2}$

函数的有界性

例 2　证明下列函数为有界函数

(1) $y = \sin x - 2\cos x$　　(2) $y = \frac{1}{3+x^2}$

练习 2　证明下列函数为有界函数

(1) $y = \sin x - \frac{1}{2+x^2}$

函数的有界性

例 2　证明下列函数为有界函数

(1) $y = \sin x - 2\cos x$　(2) $y = \frac{1}{3+x^2}$

练习 2　证明下列函数为有界函数

(1) $y = \sin x - \frac{1}{2+x^2}$　(2) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$

函数的有界性

例 2　证明下列函数为有界函数

(1) $y = \sin x - 2\cos x$　　(2) $y = \frac{1}{3+x^2}$

练习 2　证明下列函数为有界函数

(1) $y = \sin x - \frac{1}{2+x^2}$　　(2) $y = \frac{x^2}{1+x^2}$

解答　(1) $|y| \leqslant \frac{3}{2}$　　(2) $|y| \leqslant 1$

函数的有界性

类似地，我们可以定义函数有上界和有下界的概念.

- 对于所有 x，恒有 $|f(x)| \le M$ ....有界
- 对于所有 x，恒有 $f(x) \leqslant M_1$ ....有上界
- 对于所有 x，恒有 $f(x) \geqslant M_2$ ....有下界

函数的有界性

类似地，我们可以定义函数有上界和有下界的概念.

- 对于所有 x，恒有 $|f(x)| \le M$ ....有界
- 对于所有 x，恒有 $f(x) \leqslant M_1$ ....有上界
- 对于所有 x，恒有 $f(x) \geqslant M_2$ ....有下界

定理 $f(x)$ 有界 $\Longleftrightarrow$ $f(x)$ 有上界而且有下界.

第一节	数集与区间
第二节	函数的概念
第三节	函数的性质
第四节	函数的构建

第四节	函数的构建
A	反函数
B	复合函数
C	初等函数

反函数

定义 1　设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z．如果对每个 $y\in Z$，有唯一的 $x\in D$ 满足 $y=f(x)$，则可以得到定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的反函数．

反函数

定义 1 设 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z. 如果对每个 $y\in Z$，有唯一的 $x\in D$ 满足 $y=f(x)$，则可以得到定义在 Z 上的函数 $x=f^{-1}(y)$，称为 $y=f(x)$ 的**反函数**.

例 1 求函数 $y=3x-1$ 的反函数.

反函数

定义 1　设 $y = f(x)$ 的定义域为 D，值域为 Z．如果对每个 $y \in Z$，有唯一的 $x \in D$ 满足 $y = f(x)$，则可以得到定义在 Z 上的函数 $x = f^{-1}(y)$，称为 $y = f(x)$ 的**反函数**.

例 1　求函数 $y = 3x - 1$ 的反函数.

例 2　求函数 $y = 2\ln x + 1$ 的反函数.

练习 1　求下列函数的反函数

(1) $y = \frac{x-1}{x+2}$　　(2) $y = \frac{e^x-2}{e^x}$

练习 1 求下列函数的反函数

(1) $y = \frac{x-1}{x+2}$ (2) $y = \frac{e^x-2}{e^x}$

解答 (1) $y = \frac{-2x-1}{x-1}$ (2) $y = \ln\left(\frac{2}{1-x}\right)$

第四节	函数的构建
A	反函数
B	复合函数
C	初等函数

复合函数

定义 2　设 $y=f(u)$ 的定义域是 $D(f)$，$u=g(x)$ 的值域是 $Z(g)$，$D(f)\cap Z(G)$ 非空，则称 $y=f[g(x)]$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数.

复合函数

定义 2　设 $y = f(u)$ 的定义域是 $D(f)$，$u = g(x)$ 的值域是 $Z(g)$，$D(f) \cap Z(G)$ 非空，则称 $y = f[g(x)]$ 为 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的复合函数.

例 3　两个函数 $y = \sqrt{u}$ 和 $u = 1 - x^2$ 的复合函数是 $y = \sqrt{1 - x^2}$.

复合函数

定义 2　设 $y=f(u)$ 的定义域是 $D(f)$，$u=g(x)$ 的值域是 $Z(g)$，$D(f)\cap Z(G)$ 非空，则称 $y=f[g(x)]$ 为 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数.

例 3　两个函数 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=1-x^2$ 的复合函数是 $y=\sqrt{1-x^2}$.

例 4　三个函数 $y=\sin u$、$u=v^2-1$ 和 $v=e^x$ 的复合函数是 $y=\sin(e^{2x}-1)$.

第四节	函数的构建
A	反函数
B	复合函数
C	初等函数

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$
3. 正切函数 $y = \tan x$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$
3. 正切函数 $y = \tan x$
4. 余切函数 $y = \cot x$

三角函数

1 正弦函数 $y = \sin x$

2 余弦函数 $y = \cos x$

3 正切函数 $y = \tan x$

4 余切函数 $y = \cot x$

5 正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$
3. 正切函数 $y = \tan x$
4. 余切函数 $y = \cot x$
5. 正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
   - $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$
3. 正切函数 $y = \tan x$
4. 余切函数 $y = \cot x$
5. 正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
   - $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
6. 余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$

三角函数

1. 正弦函数 $y = \sin x$
2. 余弦函数 $y = \cos x$
3. 正切函数 $y = \tan x$
4. 余切函数 $y = \cot x$
5. 正割函数 $y = \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$
   - $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$
6. 余割函数 $y = \csc x = \dfrac{1}{\sin x}$
   - $\csc^2 x = \cot^2 x + 1$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$

反三角函数

1 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$

- $x \in [-1, 1], \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1]$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1]$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$
3. 反正切函数 $y = \arctan x$ .... $x = \tan y$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1]$, $\quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1]$, $\quad y \in [0, \pi]$
3. 反正切函数 $y = \arctan x$ .... $x = \tan y$
   - $x \in (-\infty, +\infty)$, $\quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1]$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$
3. 反正切函数 $y = \arctan x$ .... $x = \tan y$
   - $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
4. 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ .... $x = \cot y$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1], \quad y \in [0, \pi]$
3. 反正切函数 $y = \arctan x$ .... $x = \tan y$
   - $x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
4. 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ .... $x = \cot y$
   - $x \in (-\infty, +\infty), \quad y \in (0, \pi)$

反三角函数

1. 反正弦函数 $y = \arcsin x$ .... $x = \sin y$
   - $x \in [-1, 1]$, $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
2. 反余弦函数 $y = \arccos x$ .... $x = \cos y$
   - $x \in [-1, 1]$, $y \in [0, \pi]$
3. 反正切函数 $y = \arctan x$ .... $x = \tan y$
   - $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
4. 反余切函数 $y = \operatorname{arccot} x$ .... $x = \cot y$
   - $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (0, \pi)$

例子 $\arccos(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{3}$, $\arctan(\frac{\sqrt{3}}{3}) = \frac{\pi}{6}$.

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1 常值函数 $y = c$；

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；
2. 幂函数 $y = x^{\mu}$；

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；
2. 幂函数 $y = x^{\mu}$；
3. 指数函数 $y = a^{x}$；

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；
2. 幂函数 $y = x^\mu$；
3. 指数函数 $y = a^x$；
4. 对数函数 $y = \log_a x$；

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；
2. 幂函数 $y = x^{\mu}$；
3. 指数函数 $y = a^{x}$；
4. 对数函数 $y = \log_{a} x$；
5. 三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，等；

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y = c$；
2. 幂函数 $y = x^{\mu}$；
3. 指数函数 $y = a^{x}$；
4. 对数函数 $y = \log_{a} x$；
5. 三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，等；
6. 反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，等.

初等函数

下面这六种函数，统称为基本初等函数：

1. 常值函数 $y=c$；
2. 幂函数 $y=x^{\mu}$；
3. 指数函数 $y=a^{x}$；
4. 对数函数 $y=\log_{a}x$；
5. 三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，等；
6. 反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，等.

由六种基本初等函数经过有限次四则运算和函数复合所得到的函数，称为初等函数.

初等函数的分解

例 5　将下列初等函数分解为简单函数的复合

(1) $y = e^{2x^2-1}$　　(2) $y = \sqrt{2+\cos^2 x}$

初等函数的分解

例 5　将下列初等函数分解为简单函数的复合

(1) $y = e^{2x^2-1}$　　　　(2) $y = \sqrt{2+\cos^2 x}$

练习 2　将下列初等函数分解为简单函数的复合

(1) $y = (1+\ln x)^5$　　　　(2) $y = \sin^2(3x+1)$

初等函数的分解

例 5　将下列初等函数分解为简单函数的复合

(1) $y = e^{2x^2-1}$　　(2) $y = \sqrt{2+\cos^2 x}$

练习 2　将下列初等函数分解为简单函数的复合

(1) $y = (1+\ln x)^5$　　(2) $y = \sin^2(3x+1)$

解答　(1) $y = u^5,\ u = 1+\ln x$

(2) $y = u^2,\ u = \sin v,\ v = 3x+1$