微积分课程

第二章 · 极限与连续

2020 年 8 月 29 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	数列的极限
A	数列极限的定义
B	数列极限的运算
C	数列极限的性质

数列的定义

定义 1　一列按照顺序排列的数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 称为数列，记为 $\{x_n\}$．第 n 项 x_n 的表达式称为数列的通项或一般项．

数列的定义

定义 1 一列按照顺序排列的数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 称为数列，记为 $\{x_n\}$．第 n 项 x_n 的表达式称为数列的通项或一般项.

问题 随着 n 的增大，x_n 也跟着变化．当 n 趋于无穷大时，x_n 是否会无限接近一个确定的数？

数列的例子

1 $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$
2. $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

数列的例子

1 $x_n = 3$ $\quad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$

2 $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

3 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$
2. $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
3. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$
4. $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$

数列的例子

1 $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$

2 $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

3 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$

4 $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$

5 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\quad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$
2. $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
3. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$
4. $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$
5. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
6. $x_n = 2^n$ $\quad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$
2. $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
3. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$
4. $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$
5. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
6. $x_n = 2^n$ $\qquad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$
7. $x_n = (-1)^n$ $\qquad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1 $x_n = 3$ $3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$

2 $x_n = \frac{1}{n}$ $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

3 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$

4 $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$

5 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

6 $x_n = 2^n$ $2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$

7 $x_n = (-1)^n$ $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \qquad \longrightarrow 3$
2. $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
3. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$
4. $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$
5. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
6. $x_n = 2^n$ $\qquad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$
7. $x_n = (-1)^n$ $\qquad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1. $x_n = 3$ $\qquad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \qquad \longrightarrow 3$
2. $x_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots \qquad \longrightarrow 0$
3. $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$
4. $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\qquad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$
5. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\qquad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$
6. $x_n = 2^n$ $\qquad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$
7. $x_n = (-1)^n$ $\qquad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1	$x_n = 3$	$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$	$\longrightarrow 3$
2	$x_n = \frac{1}{n}$	$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
3	$x_n = \frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
4	$x_n = \frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$	
5	$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	
6	$x_n = 2^n$	$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$	
7	$x_n = (-1)^n$	$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$	

数列的例子

1 $x_n = 3$ $\quad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \quad \longrightarrow 3$

2 $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots \quad \longrightarrow 0$

3 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots \quad \longrightarrow 0$

4 $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots \quad \longrightarrow 1$

5 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$

6 $x_n = 2^n$ $\quad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$

7 $x_n = (-1)^n$ $\quad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1 $x_n = 3$ $\quad 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots \longrightarrow 3$

2 $x_n = \frac{1}{n}$ $\quad 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$

3 $x_n = \frac{1}{2^n}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots \longrightarrow 0$

4 $x_n = \frac{n}{n+1}$ $\quad \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots \longrightarrow 1$

5 $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad -1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots \longrightarrow 0$

6 $x_n = 2^n$ $\quad 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$

7 $x_n = (-1)^n$ $\quad -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$

数列的例子

1	$x_n = 3$	$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$	$\longrightarrow 3$
2	$x_n = \frac{1}{n}$	$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
3	$x_n = \frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
4	$x_n = \frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$	$\longrightarrow 1$
5	$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
6	$x_n = 2^n$	$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$	×
7	$x_n = (-1)^n$	$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$	

数列的例子

1	$x_n = 3$	$3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \cdots$	$\longrightarrow 3$
2	$x_n = \frac{1}{n}$	$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
3	$x_n = \frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
4	$x_n = \frac{n}{n+1}$	$\frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots$	$\longrightarrow 1$
5	$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$	$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots$	$\longrightarrow 0$
6	$x_n = 2^n$	$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \cdots$	×
7	$x_n = (-1)^n$	$-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ \cdots$	×

数列的趋势

例子　如下数列不容易凭借观察得出其变化趋势：

1. $x_n = \sqrt[n]{n}$
2. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

数列的极限

定义 2 设 $\{x_n\}$ 为一个数列，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时，总有

$$|x_n - A| < \epsilon$$

则称数列 $\{x_n\}$ 的极限等于 A，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 A，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

如果这样的常数 A 不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 发散.

数列极限的基本公式

1 $\lim\limits_{n\to\infty} C = C$

2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$，（$k > 0$）

3 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^k} = 0$，（$k > 0$）

4 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a^n} = 0$，（$|a| > 1$）

数列极限

例子　设 $x_n = C$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

数列极限

例子 设 $x_n = C$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证明 $\forall \epsilon > 0$，取 $N = 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

数列极限

例子 设 $x_n = C$，证明 $\lim_{n\to\infty} x_n = C$.

证明 $\forall \epsilon > 0$，取 $N = 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

例子 证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

数列极限

例子　设 $x_n = C$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = C$.

证明　$\forall \epsilon > 0$，取 $N = 1$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - C| = |C - C| = 0 < \epsilon.$$

例子　证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

证明　$\forall \epsilon > 0$，取 $N = \frac{1}{\epsilon}$，则当 $n > N$ 时就有

$$|x_n - 0| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \epsilon.$$

数列极限

例子 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0.$

数列极限

例子 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0.$

证明 $\forall\epsilon>0$，取 $N=\frac{1}{\epsilon}$，则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon.$$

数列极限

例子　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$.

证明　$\forall\epsilon>0$，取 $N=\frac{1}{\epsilon}$，则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon.$$

例子　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$.

数列极限

例子 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0.$

证明 $\forall\epsilon>0$，取 $N=\frac{1}{\epsilon}$，则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{(-1)^n}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\epsilon.$$

例子 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$

证明 $\forall\epsilon>0$，取 $N=\frac{1}{\epsilon}$，则当 $n>N$ 时就有

$$|x_n-0|=\left|\frac{1}{2^n}-0\right|=\frac{1}{2^n}<\frac{1}{n}<\epsilon.$$

其中不等式 $2^n>n$ 可由数学归纳法得到.

发散数列

发散的数列至少有这两种可能：

1. 无界型的：比如 $x_n = 2^n$；
2. 摆动型的：比如 $x_n = (-1)^n$.

第一节	数列的极限
A	数列极限的定义
B	数列极限的运算
C	数列极限的性质

数列极限的四则运算

定理 1 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，那么

1 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$；

2 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \cdot B$；

3 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）.

数列极限的四则运算

定理 1 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，那么

1 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \pm B$；

2 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A \cdot B$；

3 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）.

推论 $\lim\limits_{n\to\infty}(c \cdot x_n) = c \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

例 1　求数列极限 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

例 1　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

解答　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=1-0=1.$

例 1　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

解答　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=1-0=1$.

例 2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}$.

例 1 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

解答 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}1-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}=1-0=1.$

例 2 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}$.

解答 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}1}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$

$$=\frac{1}{1+0}=1.$$

数列极限的计算

例 3　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{n^2+4n}$.

数列极限的计算

例 3 求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{n^2+4n}$.

解答 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{1}{n^2}}{1+4\cdot\dfrac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}$

$$=\frac{3+0}{1+4\cdot 0}=3.$$

数列极限的计算

例 4　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4}{n^2+1}$.

数列极限的计算

例 4　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+4}{n^2+1}$.

解答　原式

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}+4\cdot\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+4\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{0+4\times 0}{1+0}=0.$$

数列极限的计算

例 5　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$.

数列极限的计算

例 5　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n+1}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{(-1)^n}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$

$$=\frac{1+0}{1+0}=1.$$

数列极限的计算

例 6　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times 3^n}{3^n+1}$.

数列极限的计算

例 6　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2\times 3^n}{3^n+1}.$

解答　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{1+\dfrac{1}{3^n}}=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3^n}}$

$=\dfrac{2}{1+0}=2.$

数列极限的计算

练习 2　求数列极限

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3n^2}{1+n^3}$$

$$(2)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3n+(-1)^n}{n+(-1)^n}$$

$$(3)\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{6^n+1}$$

第一节	数列的极限
A	数列极限的定义
B	数列极限的运算
C	数列极限的性质

数列极限的性质

性质 1 (有界性)　设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leqslant M$.

数列极限的性质

性质 1 (有界性)　设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leqslant M$.

证明　设 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$. 取 $\epsilon = 1$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \leqslant |x_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_{[N]}, 1 + |A|\}$，则对任何 n 都有 $|x_n| \leqslant M$.

数列极限的性质

性质 1 (有界性)　设 $\{x_n\}$ 收敛，则存在 $M > 0$ 使得 $|x_n| \leqslant M$.

证明　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. 取 $\epsilon = 1$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|x_n| = |(x_n - A) + A| \leqslant |x_n - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = \max\{x_1, x_2, \cdots, x_{[N]}, 1 + |A|\}$，则对任何 n 都有 $|x_n| \leqslant M$.

例子　$x_n = 1 - 5/n$ 收敛于 1，此时有 $|x_n| \leqslant 4$.

数列极限的性质

性质 2 (保号性) 设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

数列极限的性质

性质 2 (保号性)　设数列收敛于 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $x_n > 0$（或 $x_n < 0$）.

证明　取 $\epsilon = A/2$，则存在 $N > 0$，使得当 $n > N$ 时有 $|x_n - A| < \epsilon = A/2$. 此时 $x_n > A/2 > 0$.

数列极限的性质

性质 2 (保号性) 设数列收敛于 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $x_n>0$（或 $x_n<0$）.

证明 取 $\epsilon=A/2$，则存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时有 $|x_n-A|<\epsilon=A/2$．此时 $x_n>A/2>0$.

例子 $x_n=1-5/n$ 收敛于 $1>0$，此时当 $n>5$ 时，有 $x_n>0$.

数列极限的性质

定理 (保号性) 设数列 $x_n \geqslant 0$（或 $x_n \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则有 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

数列极限的性质

定理 (保号性)　设数列 $x_n \geqslant 0$（或 $x_n \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则有 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

推论　如果 $x_n \geqslant y_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，则有 $A \geqslant B$.

复习与提高

选择　已知数列 $\{x_n\}$ 的通项为 $x_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$，则该数列…………………………………（　　）

(A) 收敛且有界　　(B) 收敛且无界

(C) 发散且有界　　(D) 发散且无界

第二节	函数的极限 I
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质

函数极限的例子

1. $y = \dfrac{1}{x}$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$

函数极限的例子

1. $y = \dfrac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \dfrac{1}{x^2}$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
4. $y = 2^x$

函数极限的例子

1. $y = \frac{1}{x}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
2. $y = \frac{1}{x^2}$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$
3. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
   - $x \to +\infty$ 时 $y \to 0$
4. $y = 2^x$
   - $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$

函数的极限 $(x \to \infty)$

定义 1　设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

函数的极限 $(x \to \infty)$

定义 1　设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

注记　$x \to \infty$ 有两种方向，即 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$. 类似地可以定义 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$ 和 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = A$.

函数的极限 $(x \to \infty)$

定义 1 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 足够大时有定义，如果存在常数 A，对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时，总有 $|f(x) - A| < \epsilon$，则称当 $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A.$$

注记 $x \to \infty$ 有两种方向，即 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$. 类似地可以定义 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 和 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

性质 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

函数极限的基本公式 I

(1) $$\lim_{x\to\infty} C = C$$

(2) $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k\text{为正整数})$$

(3) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

(4) $$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0 \quad (b > 1)$$

第二节	函数的极限 I
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质

四则运算法则

定理1　如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$，那么

1 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\pm\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=A\pm B$

2 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=A\cdot B$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

四则运算法则

定理 1 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=B$，那么

1 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\pm\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=A\pm B$

2 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=A\cdot B$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty} g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

推论 $\lim\limits_{x\to\infty}(c\cdot f(x))=c\lim\limits_{x\to\infty} f(x).$

函数的极限 $(x \to \infty)$

例 1　求函数极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x-1}{3x+4}$.

函数的极限 $(x \to \infty)$

例 1　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{3x+4}$.

解答　原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2-\dfrac{1}{x}}{3+4\cdot\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 2 - \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 3 + 4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}$

$$= \frac{2-0}{3+4\times 0} = \frac{2}{3}$$

函数的极限 $(x \to \infty)$

例 2　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{3x^2+2}$.

函数的极限 $(x \to \infty)$

例 2　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x+1}{3x^2+2}$.

解答　原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}{3+2\cdot\dfrac{1}{x^2}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}3+2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}$

$$= \frac{0+0}{3+2\times 0} = 0$$

例 3　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2+5x}$.

函数的极限 $(x \to \infty)$

例 3　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2+5x}$.

解答　原式 $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3+\dfrac{1}{x^2}}{1+5\cdot\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\infty} 3 + \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 + 5\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}}$

$$= \frac{3+0}{1+5\times 0} = 3$$

函数的极限 $(x \to \infty)$

练习 2　求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1+2x^2}{x+2x^2+3x^3}$;

函数的极限 $(x \to \infty)$

练习 2　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1+2x^2}{x+2x^2+3x^3}$;

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3^x+4^x}{2^x+5^x}$.

第二节	函数的极限 I
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质

函数极限的性质

性质 1 (局部有界性) 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，则存在 $N > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

函数极限的性质

性质 1 (局部有界性)　如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，则存在 $N > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

例子　设 $f(x) = 1 - 5/x$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$,

函数极限的性质

性质 1 (局部有界性) 如果 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，则存在 $N > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

例子 设 $f(x) = 1 - 5/x$，则 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$，此时当 $|x| > 5$ 时有 $|f(x)| \leqslant 2$.

函数极限的性质

性质 2 (局部保号性) 如果 $\lim_{x\to\infty} f(x)=A$，且 $A>0$（或 $A<0$），则存在 $N>0$，使得当 $|x|>N$ 时有 $f(x)>\frac{A}{2}>0$（或 $f(x)<\frac{A}{2}<0$）.

函数极限的性质

性质 2 (局部保号性)　如果 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

例子　设 $f(x) = 1 - 5/x$，则 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1 > 0$，

函数极限的性质

性质 2 (局部保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $N > 0$，使得当 $|x| > N$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

例子　设 $f(x) = 1 - 5/x$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 > 0$，此时当 $|x| > 10$ 时，有 $f(x) > 1/2 > 0$.

函数极限的性质

定理（保号性） 设 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），且 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

函数极限的性质

定理 (保号性) 设 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

推论 如果函数 $g(x) \geqslant h(x)$，而且 $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = A$，$\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = B$，则有 $A \geqslant B$.

前两节复习题

复习 1　求下列极限：

(1) $$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n-2n^2}{n^2+(-1)^n};$$

(2) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3}{x^2+2x+1};$$

前两节复习题

复习 1　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n-2n^2}{n^2+(-1)^n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3}{x^2+2x+1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2^x+4}{4^x+1}$.

前两节复习题

复习 1　求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n - 2n^2}{n^2 + (-1)^n}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 2x + 1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2^x + 4}{4^x + 1}$.

解答　(1) -2;　　(2) 2;　　(3) 0.

第三节	函数的极限 II
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质
D	左极限与右极限

函数极限的例子

1 $y = c$

函数极限的例子

1. $y = c$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to c$

函数极限的例子

1. $y = c$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to c$
2. $y = x$

函数极限的例子

1. $y = c$
   - 当 $x \to x_0$ 时， $y \to c$
2. $y = x$
   - 当 $x \to x_0$ 时， $y \to x_0$

函数极限的例子

1. $y = c$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to c$
2. $y = x$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$
3. $y = 2x + 1$

函数极限的例子

1. $y = c$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to c$
2. $y = x$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$
3. $y = 2x + 1$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to 2x_0 + 1$

函数极限的例子

1. $y = c$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to c$
2. $y = x$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$
3. $y = 2x + 1$
   - 当 $x \to x_0$ 时，$y \to 2x_0 + 1$
4. $y = \sqrt{x}$

函数极限的例子

1 $y = c$

- 当 $x \to x_0$ 时，$y \to c$

2 $y = x$

- 当 $x \to x_0$ 时，$y \to x_0$

3 $y = 2x + 1$

- 当 $x \to x_0$ 时，$y \to 2x_0 + 1$

4 $y = \sqrt{x}$

- 当 $x \to x_0$ 时，$y \to \sqrt{x_0}$

函数的极限 $(x \to x_0)$

定义 1　设 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果存在常数 A，对于任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，总有

$$|f(x) - A| < \epsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

函数极限的例子

例子　证明 $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$.

函数极限的例子

例子　证明 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

证明　$\forall \epsilon > 0$，取 $\delta = \epsilon$，则当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，就有

$$|f(x) - A| = |x - x_0| < \epsilon$$

所以 $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$.

函数极限的基本公式 II

定理 (初等函数的连续性)　如果初等函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个邻域有定义，则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

例子　对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim_{x\to x_0} c = c$;

例子　对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$；
2. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$；

例子 对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$;
2. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$;
3. $\lim\limits_{x\to 3} e^x = e^3$;

例子 对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$；
2. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$；
3. $\lim\limits_{x\to 3} e^x = e^3$；
4. $\lim\limits_{x\to 9} \log_3 x = \log_3 9 = 2$；

例子 对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$;
2. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$;
3. $\lim\limits_{x\to 3} e^x = e^3$;
4. $\lim\limits_{x\to 9} \log_3 x = \log_3 9 = 2$;
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$;

例子　对于六种基本初等函数，我们有这些极限：

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$；
2. $\lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$；
3. $\lim\limits_{x\to 3} e^x = e^3$；
4. $\lim\limits_{x\to 9} \log_3 x = \log_3 9 = 2$；
5. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$；
6. $\lim\limits_{x\to 1} \arctan x = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

函数的极限 $(x \to x_0)$

注记 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

函数的极限 $(x \to x_0)$

注记 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

函数的极限 $(x \to x_0)$

注记 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 1 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2.$

函数的极限 $(x \to x_0)$

注记　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 1　设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2.$

注记　即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

函数的极限 $(x \to x_0)$

注记 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 1 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

注记 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 2 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

函数的极限 $(x \to x_0)$

注记 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 与 $f(x_0)$ 未必总是相等.

例 1 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1; \\ 3, & x = 1. \end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

注记 即使 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 仍可能存在.

例 2 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = 2$.

例 3 函数极限 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+1}{x-1}$ 不存在.

第三节	函数的极限 II
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质
D	左极限与右极限

四则运算法则

定理 1 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ 且 $\lim_{x\to x_0} g(x) = B$，那么

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B$
2. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B$
3. $\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

四则运算法则

定理 1 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，那么

1 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\pm B$

2 $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A\cdot B$

3 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{A}{B}$ （要求分母不为零）

推论 $\lim\limits_{x\to x_0}(c\cdot f(x))=c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

函数的极限 $(x \to x_0)$

例 4　求函数极限 $\lim\limits_{x \to 1}(3x^2 - 2x + 1)$.

函数的极限 $(x \to x_0)$

例 4　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 1)$.

解答　$$原式 = 3\lim_{x\to 1} x^2 - 2\lim_{x\to 1} x + \lim_{x\to 1} 1$$

$$= 3 \times 1^2 - 2 \times 1 + 1 = 2$$

例 5　求函数极限 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}$.

例 5 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9}$.

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+1)(x-3)}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+1}{x+3}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{3+1}{3+3}=\frac{2}{3}$$

例 6　求函数极限 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

例 6 求函数极限 $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

解答 原式 $= \lim\limits_{x \to 4} \dfrac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} = \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$$

函数的极限 $(x \to x_0)$

练习 1　求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(x+2\ln(1+x)+e^x+2)$;

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x-2}{\sqrt{x}-1}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$.

函数的极限 $(x \to x_0)$

练习 1　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0}(x + 2\ln(1+x) + e^x + 2)$; ……………… 3

(2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x-2}{\sqrt{x}-1}$; ……………………………… 4

(3) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3}$. ……………………………… $\dfrac{5}{4}$

函数的极限 $(x \to x_0)$

例 7　求函数极限 $\lim\limits_{x \to 1}\left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

函数的极限 $(x \to x_0)$

例 7 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$.

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{1-x^2}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1+x-2}{1-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{1-x^2}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(1-x)(1+x)}=-\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+x}$$

$$=-\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

第三节	函数的极限 II
A	函数极限的定义
B	函数极限的运算
C	函数极限的性质
D	左极限与右极限

函数极限的性质

性质 1 (局部有界性) 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

函数极限的性质

性质 1 (局部有界性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在 $\delta>0$ 和 $M>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明 取 $\epsilon=1$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon=1$. 此时

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |(f(x)-A)+A| \\ &\leqslant |f(x)-A|+|A|<1+|A|\end{aligned}$$

取 $M=1+|A|$，就得到函数极限的局部有界性.

函数极限的性质

性质 1 (局部有界性) 如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，则存在 $\delta > 0$ 和 $M > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x)| \leqslant M$.

证明 取 $\epsilon = 1$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = 1$. 此时

$$|f(x)| = |(f(x) - A) + A|$$

$$\leqslant |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|$$

取 $M = 1 + |A|$，就得到函数极限的局部有界性.

例子 设 $f(x) = 1/x$，则 $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$，

函数极限的性质

性质 1 (局部有界性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则存在 $\delta>0$ 和 $M>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)|\leqslant M$.

证明 取 $\epsilon=1$，则存在 $\delta>0$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时有 $|f(x)-A|<\epsilon=1$. 此时

$$|f(x)|=|(f(x)-A)+A|$$

$$\leqslant|f(x)-A|+|A|<1+|A|$$

取 $M=1+|A|$，就得到函数极限的局部有界性.

例子 设 $f(x)=1/x$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$，此时当 $0<|x-1|<1/2$ 时有 $|f(x)|\leqslant 2$.

函数极限的性质

性质 2 (局部保号性)　如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

函数极限的性质

性质 2 (局部保号性) 如果 $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

证明 取 $\epsilon = A/2$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = A/2$. 此时 $f(x) > A/2 > 0$.

函数极限的性质

性质 2 (局部保号性) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

证明 取 $\epsilon = A/2$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = A/2$. 此时 $f(x) > A/2 > 0$.

例子 设 $f(x) = 2x - 1$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 > 0$，

函数极限的性质

性质 2 (局部保号性)　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，且 $A > 0$（或 $A < 0$），则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $f(x) > \frac{A}{2} > 0$（或 $f(x) < \frac{A}{2} < 0$）.

证明　取 $\epsilon = A/2$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \epsilon = A/2$．此时 $f(x) > A/2 > 0$.

例子　设 $f(x) = 2x - 1$，则 $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 > 0$，此时当 $0 < |x - 1| < 1/4$ 时，有 $f(x) > 1/2 > 0$.

函数极限的性质

定理 (保号性) 设 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

函数极限的性质

定理 (保号性)　设 $f(x) \geqslant 0$（或 $f(x) \leqslant 0$），且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0$（或 $A \leqslant 0$）.

推论　如果函数 $g(x) \geqslant h(x)$，而且 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = B$，则有 $A \geqslant B$.

左极限和右极限

定义 设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad \text{或} \quad f(x_0^-) = A.$$

左极限和右极限

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 左邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为左极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^-) = A.$$

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 右邻域有定义，如果对任何 $\epsilon > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有

$$|f(x) - A| < \epsilon,$$

则称当 $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为右极限，记为

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \quad 或 \quad f(x_0^+) = A.$$

定理 2 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = A = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

定理 2 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

例 8 设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

定理 2 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

例 8 设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

例 9 设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ x, & x\geqslant 0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

定理 2　极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A=\lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

例 8　设 $f(x)=|x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

例 9　设 $f(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ x, & x\geqslant 0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 10　设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1 \\ x^2-x+2, & x>1 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

定理 2 极限存在等价于左右极限都存在且相等，即

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

例 8 设 $f(x) = |x|$，研究函数极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

例 9 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ x, & x \geqslant 0 \end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

例 10 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1 \\ x^2 - x + 2, & x > 1 \end{cases}$，求 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

注记 研究当 $x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的左右极限，不必要求 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

左极限和右极限

练习 2　已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ e^x, & 0<x<1; \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$

判断极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在，若存在求出该极限.

左极限和右极限

练习 2　已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x<0 \\ e^x, & 0<x<1; \\ x^2-1, & x>1 \end{cases}$

判断极限 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 是否存在，若存在求出该极限.

解答　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 存在，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ 不存在.

前三节复习题

复习1　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+(-1)^n}{2n^2+n+(-1)^n}$；

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}$；

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}$.

前三节复习题

复习1　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+(-1)^n}{2n^2+n+(-1)^n}$； ………………………… $\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}$； ………………………… 2

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+3x-5}{x^2+2x-3}$． ………………………… $\dfrac{7}{4}$

第二节	函数的极限 I
第三节	函数的极限 II
第四节	**无穷小量与无穷大量**
第五节	两个重要极限
第六节	无穷小量的比较

第四节	无穷小量与无穷大量
A	无穷小量
B	无穷大量

无穷小量

定义 如果 $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$，就称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的**无穷小量**.

无穷小量

定义　如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，就称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

定义　如果 $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=0$，就称 $f(x)$ 为 $x\to \infty$ 时的无穷小量.

无穷小量

定义 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，就称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷小量.

定义 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，就称 $f(x)$ 为 $x\to\infty$ 时的无穷小量.

注记 类似地，可以定义 $x\to-\infty$、$x\to+\infty$ 时的无穷小量.

无穷小量

例 1　0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

无穷小量

例 1　0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

例 2　函数 $\frac{1}{x}$、$\frac{2}{1+x}$ 和 $\frac{x}{x^2+1}$ 都是 $x\to\infty$ 时的无穷小量.

无穷小量

例 1　0、x、x^2、$\sin x$、$1-\cos x$、$\sqrt{1+x}-1$ 和 e^x-1 都是 $x\to 0$ 时的无穷小量.

例 2　函数 $\dfrac{1}{x}$、$\dfrac{2}{1+x}$ 和 $\dfrac{x}{x^2+1}$ 都是 $x\to\infty$ 时的无穷小量.

例 3　函数 $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 何时是无穷小量?

无穷小量的运算

1 两个无穷小量的和差还是无穷小量.

2 两个无穷小量的乘积还是无穷小量.

3 无穷小量和有界函数的乘积还是无穷小量.

无穷小量的运算

1 两个无穷小量的和差还是无穷小量.

2 两个无穷小量的乘积还是无穷小量.

3 无穷小量和有界函数的乘积还是无穷小量.

例 4　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

无穷小量的运算

1. 两个无穷小量的和差还是无穷小量.
2. 两个无穷小量的乘积还是无穷小量.
3. 无穷小量和有界函数的乘积还是无穷小量.

例 4　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

例 5　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x+\sin x}$.

无穷小量的运算

1 两个无穷小量的和差还是无穷小量.

2 两个无穷小量的乘积还是无穷小量.

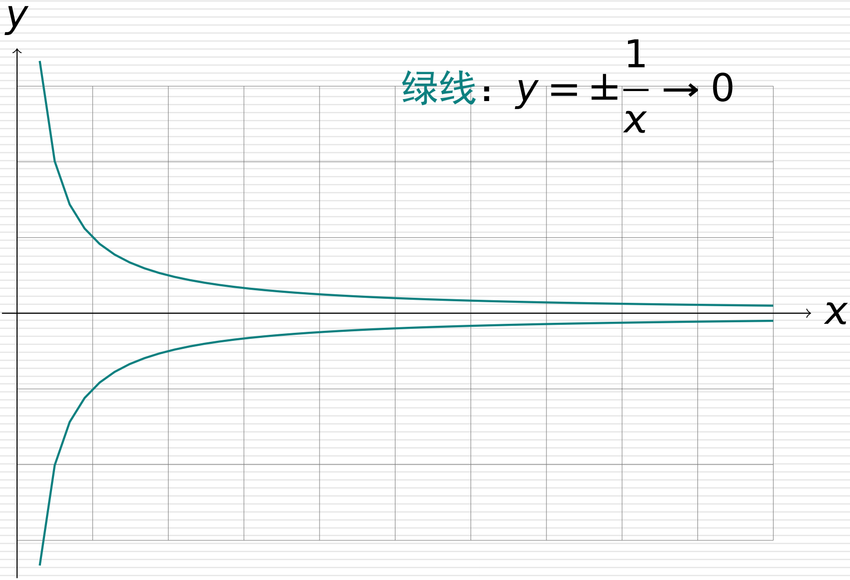
3 无穷小量和有界函数的乘积还是无穷小量.

例 4　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

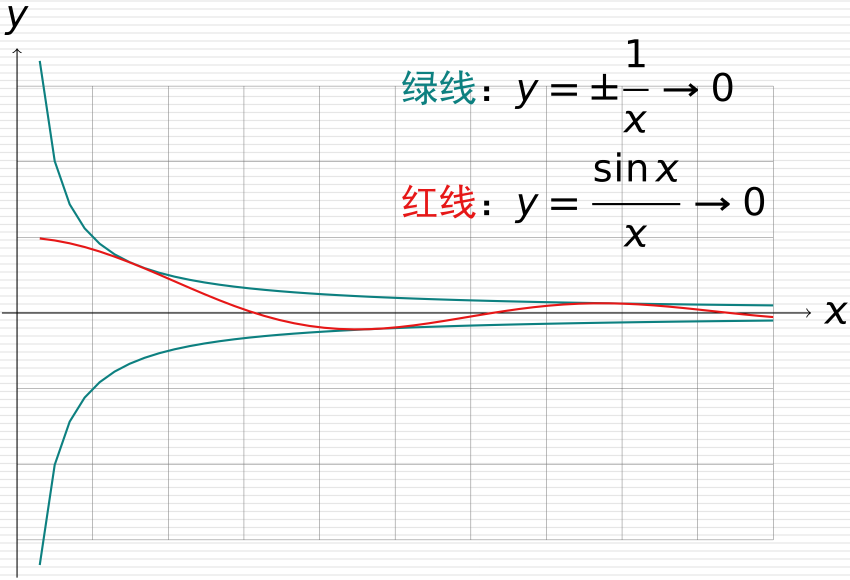
例 5　求函数极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{x+\sin x}$.

例 6　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$.

无穷小量与有界函数的乘积



无穷小量与有界函数的乘积



绿线：$y = \pm\frac{1}{x} \to 0$

红线：$y = \frac{\sin x}{x} \to 0$

练习 1　求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\cos x}{\cos x+3x^2}$.

练习 1　求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x^2}$; ……………………… 0

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+\cos x}{\cos x+3x^2}$. ……………………… $\dfrac{1}{3}$

第四节	无穷小量与无穷大量
A	无穷小量
B	无穷大量

无穷大量 $(x \to \infty)$

定义　设 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某个正数时有定义．如果对任何 $M > 0$，总存在 $N > 0$，使得只要 $|x| > N$，就有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷大量，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad ①$$

无穷大量 $(x \to \infty)$

定义　设 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某个正数时有定义．如果对任何 $M > 0$，总存在 $N > 0$，使得只要 $|x| > N$，就有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷大量，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad ①$$

类似地可以定义 $x \to -\infty$ 的无穷大量，记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad ②$$

无穷大量 ($x \to \infty$)

定义　设 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某个正数时有定义．如果对任何 $M > 0$，总存在 $N > 0$，使得只要 $|x| > N$，就有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷大量，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \qquad ①$$

类似地可以定义 $x \to -\infty$ 的无穷大量，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \qquad ②$$

以及和 $x \to +\infty$ 时的无穷大量，记为

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty \qquad ③$$

无穷大量 $(x \to \infty)$

定义　设 $f(x)$ 在 $|x|$ 大于某个正数时有定义. 如果对任何 $M > 0$，总存在 $N > 0$，使得只要 $|x| > N$，就有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 为 $x \to \infty$ 时的无穷大量，记为

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad ①$$

类似地可以定义 $x \to -\infty$ 的无穷大量，记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad ②$$

以及和 $x \to +\infty$ 时的无穷大量，记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty \qquad ③$$

结论：① 成立等价于 ② 和 ③ 同时成立.

无穷大量 $(x \to \infty)$

例 7 x，x^2，$x+1$ 都是 $x \to \infty$ 时的无穷大量，即

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty.$$

无穷大量 $(x \to \infty)$

例 7　x，x^2，$x+1$ 都是 $x \to \infty$ 时的无穷大量，即

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} (x+1) = \infty.$$

例 8　e^x 是 $x \to +\infty$ 时的无穷大量，即

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = \infty.$$

无穷大量 $(x \to x_0)$

定义 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某个去心邻域有定义．如果对任何给定的 $M > 0$，总存在 $\delta > 0$，使得只要 $0 < |x - x_0| < \delta$，就有 $|f(x)| > M$，则称 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ 时的**无穷大量**，记为 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

无穷大量 $(x \to x_0)$

例 9 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{x+1}{x^2}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大量.

无穷大量 $(x \to x_0)$

例 9 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{x+1}{x^2}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大量.

例 10 $\dfrac{1}{x-1}$ 和 $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x \to 1$ 时的无穷大量.

无穷大量 $(x \to x_0)$

例 9 $\dfrac{1}{x}$ 和 $\dfrac{x+1}{x^2}$ 是 $x \to 0$ 时的无穷大量.

例 10 $\dfrac{1}{x-1}$ 和 $\dfrac{x+2}{x^2-1}$ 是 $x \to 1$ 时的无穷大量.

例 11 函数 $y = \dfrac{x-1}{x^2-1}$ 何时是无穷大量?

无穷大量与无穷小量的关系

定理 1 无穷大量 y 的倒数 $\dfrac{1}{y}$ 为无穷小量，而非零无穷小量 y 的倒数 $\dfrac{1}{y}$ 为无穷大量.

无穷大量与无穷小量的关系

定理 1 无穷大量 y 的倒数 $\frac{1}{y}$ 为无穷小量，而非零无穷小量 y 的倒数 $\frac{1}{y}$ 为无穷大量.

例 12 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x^2+1}=0 \implies \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{3x+1}=\infty.$

有理分式的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{2}{3}\qquad\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1}=0\qquad\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty$$

有理分式的极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x^2+1}=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2+1}=0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{3x+1}=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m;\\ 0, & n<m;\\ \infty, & n>m.\end{cases}$$

前四节复习题

复习1　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

(2) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right)$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x+2x}{x+\cos x}$.

前四节复习题

复习1　求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$; ……………………… 2

(2) $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2-1}\right)$; ……………… $-\dfrac{1}{2}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x+2x}{x+\cos x}$. ……………………… 2

本节基本内容

极限存在准则 I

$$\Downarrow$$

重要极限 I

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

极限存在准则 II

$$\Downarrow$$

重要极限 II

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

第五节	两个重要极限
A	重要极限 I
B	重要极限 II

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I)　如果数列 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I)　如果数列 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

例 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I)　如果数列 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$.

例 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

注记　在上述定理中，如果不等式 $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ 仅在 $n > N$ 时成立，结论不变.

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I)　如果 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I)　如果 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

注记　若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$，定理仍成立.

极限存在准则 I

定理 (极限存在准则 I)　如果 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = A$，则有 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$.

注记　若将 $x \to x_0$ 全部改为 $x \to \infty$，定理仍成立.

注记　在上述定理中，如果不等式 $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ 仅在 x_0 的某个去心邻域上成立，结论不变.

重要极限 I

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

重要极限 I

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

一般地，如果当 $x \to 0$ 时，$\phi(x) \to 0$，则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin \phi(x)}{\phi(x)}=1$$

重要极限 I

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

重要极限 I

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\times\frac{1}{1}=1$$

重要极限 I

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

重要极限 I

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\cdot\dfrac{\sin 3x}{3x}\right)$

$$=3\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\times 1=3$$

重要极限 I

例 4　求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\sin 4x}$.

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sin 4x}$.

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\cdot\dfrac{4x}{\sin 4x}\right)$

$$=\frac{1}{4}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4x}{\sin 4x}$$

$$=\frac{1}{4}\times 1\times 1=\frac{1}{4}$$

重要极限 I

练习 1　求下列函数极限：

$$(1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x^2)}{3x^2}$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$$

$$(3)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{x}\,\tan\sqrt{x}}{x}$$

重要极限 I

例 5 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

例 6 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arctan x}{x}$.

重要极限 I

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

例 6　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

例 7　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}$.

第五节	两个重要极限
A	重要极限 I
B	重要极限 II

极限存在准则 II

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

极限存在准则 II

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

极限存在准则 II

定理 (极限存在准则 II)　单调且有界的数列必定收敛.

1. 单调增加且有上界的数列必定收敛.
2. 单调减少且有下界的数列必定收敛.

注记　若数列是某一项开始单调变化，结论仍然成立.

重要极限 II

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

重要极限 II

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2.250
3	2.370
4	2.441
5	2.488
10	2.594
100	2.705
1000	2.717
10000	2.718

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$$

重要极限 II

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

重要极限 II

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e} \quad \xRightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=\mathrm{e}$$

重要极限 II

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e \quad \xRightarrow{u=1/x} \quad \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}=e$$

一般地，如果当 $x\to a$ 时，$\psi(x)\to 0$，则有

$$\lim_{x\to a}\left(1+\psi(x)\right)^{\frac{1}{\psi(x)}}=e$$

简单情形

例 8　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

简单情形

例 8　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{x}$

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot 2}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}\right]^{2}=e^{2}$$

简单情形

例 9　求极限 $\lim_{x \to \infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{x}$

简单情形

例 9　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-1}{3x}\right)^{\frac{3x}{-1}}\right]^{-\frac{1}{3}}=e^{-1/3}$$

简单情形

例 10　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

简单情形

例 10 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{-x}{2}\right)^{\frac{2}{-x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{-x}{2}\right)^{\frac{2}{-x}}\right]^{-\frac{1}{2}}=e^{-1/2}$$

练习 2　求函数极限:

(1) $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{x}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{3x}}$

练习 2　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{4}{x}\right)^{x}$ ……………………… e^{-4}

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1-2x\right)^{\frac{1}{3x}}$ ……………………… $e^{-\frac{2}{3}}$

幂指情形

例 11　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

幂指情形

例 11　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$

解答　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{x}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2x}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{\frac{2x}{x-1}}=\mathrm{e}^{2}.$$

幂指情形

例 12　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

幂指情形

例 12 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

解答 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{\sin x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+3x\right)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{3x}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+3x\right)^{\frac{1}{3x}}\right]^{\frac{3x}{\sin x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{3x}{\sin x}}=e^{3}.$$

练习 3 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{4x}}$ …………………… $e^{\frac{1}{4}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{x+1}$ …………………… e^{-1}

练习 3 求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{4x}}$ .... $e^{\frac{1}{4}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{x+1}$ .... e^{-1}

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{2x-3}$ .... e^{4}

常数 e 的意义

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

常数 e 的意义

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%) = M \times 1.005$

常数 e 的意义

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%) = M \times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4 = M \times 1.00500938$

常数 e 的意义

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%) = M\times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4 = M\times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360} = M\times 1.00501249$

常数 e 的意义

例子　复利问题：假设银行活期存款的年利率为 0.5%，存入 M 元一年后最多可以得到多少钱？

- 粗略：$M(1+0.5\%) = M \times 1.005$
- 正常：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{4}\right)^4 = M \times 1.00500938$
- 极端：$M\left(1+\dfrac{0.5\%}{360}\right)^{360} = M \times 1.00501249$

事实　常数 e 反映了连续增长的规律.

两个重要极限

复习1　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}$ ……………………… $e^{-\frac{2}{3}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x\sin x}$ ……………………… 1

两个重要极限

复习1　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2\sin x)^{\frac{1}{3x}}$ ………………………… $e^{-\frac{2}{3}}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)^{x\sin x}$ ………………………… 1

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{3x+1}$ ………………………… e^{-3}

复习与提高

例 14　求函数极限 $\lim_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

例 14　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解答　因为当 $x \to 0$ 时，$\cos x$ 不是无穷小量，所以不能用重要极限 II 公式来计算.

复习与提高

例 14　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)^{\frac{1}{\cos x}}$.

解答　因为当 $x \to 0$ 时，$\cos x$ 不是无穷小量，所以不能用重要极限 II 公式来计算.

实际上，这个函数是初等函数，且在 0 的邻域有定义，所以其极限为 $(1+1)^1 = 2$.

复习与提高

例 15 设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

复习与提高

例 15　设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

例 16　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \dfrac{1}{2}$，且当 $n \geqslant 1$ 时有 $x_{n+1} = \dfrac{1+x_n^2}{2}$. 研究数列的极限.

复习与提高

例 15　设数列 $x_n = \dfrac{n!}{n^n}$，研究数列的极限.

例 16　设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 = \dfrac{1}{2}$，且当 $n \geqslant 1$ 时有

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_n^2}{2}.$$ 研究数列的极限.

解答　先说明数列收敛，再根据数列的递归关系求出其极限.

第六节	无穷小量的比较
A	无穷小量的阶
B	等价无穷小量代换

无穷小量的比较

例子　比较 $x \to 0$ 时的三个无穷小量 x，$2x$，x^2.

无穷小量的比较

例子 比较 $x \to 0$ 时的三个无穷小量 x，$2x$，x^2.

x	1	0.1	0.01	0.001	$\cdots$	$\to$	0
$2x$	2	0.2	0.02	0.002	$\cdots$	$\to$	0
x^2	1	0.01	0.0001	0.000001	$\cdots$	$\to$	0

无穷小量的阶

定义　设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1 称 β 比 α 高阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为 $\beta = o(\alpha)$.

无穷小量的阶

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1 称 β 比 α 高阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为 $\beta = o(\alpha)$.

2 称 β 比 α 低阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$.

无穷小量的阶

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1. 称 β 比 α 高阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，记为 $\beta = o(\alpha)$.
2. 称 β 比 α 低阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \infty$.
3. 称 β 和 α 同阶，若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = c \neq 0$.

无穷小量的阶

定义 设 α、β 是同一变化过程中的两个无穷小量.

1 称 β 比 α 高阶，若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，记为 $\beta=o(\alpha)$.

2 称 β 比 α 低阶，若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$.

3 称 β 和 α 同阶，若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$.

★ 称 β 和 α 等价，若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，记为 $\beta\sim\alpha$.

无穷小量的阶

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x 高阶.

无穷小量的阶

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x 高阶.

例 2　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x^3 低阶.

无穷小量的阶

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x 高阶.

例 2　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x^3 低阶.

例 3　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

无穷小量的阶

例 1　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x 高阶.

例 2　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 比 x^3 低阶.

例 3　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 和 $5x^2$ 同阶.

例 4　在 $x \to 0$ 时，无穷小量 x^2 和 $x^2 + 2x^3$ 等价.

无穷小量的阶

练习 1　易知 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ 和 $g(x) = x^2$ 均为 $x \to 0$ 时的无穷小量.

(1) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 高阶?

(2) 何时 $f(x)$ 比 $g(x)$ 低阶?

(3) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶?

(4) 何时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 等价?

常用的等价无穷小量

当 $x \to 0$ 时，有如下这些常用的等价无穷小量：

(1) $\sin x \sim x$	(5) $\ln(1+x) \sim x$
(2) $\tan x \sim x$	(6) $e^x - 1 \sim x$
(3) $\arcsin x \sim x$	(7) $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$
(4) $\arctan x \sim x$	(8) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}$

第六节	无穷小量的比较
A	无穷小量的阶
B	等价无穷小量代换

等价无穷小量代换

定理 1　设当 $x \to x_0$ 时 $\alpha \sim \alpha'$、$\beta \sim \beta'$，则有

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha\gamma = \lim\limits_{x \to x_0} \alpha'\gamma$　　(2) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha'}{\beta'}$

等价无穷小量代换

例 5　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

等价无穷小量代换

例 5　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

例 6　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\sin(x^2)}$.

等价无穷小量代换

例 5 求函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

例 6 求函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos 5x}{\sin(x^2)}$.

例 7 求函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{\sqrt[3]{1 + 2x} - 1}$.

等价无穷小量代换

例 5　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 3x}$.

例 6　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{\sin(x^2)}$.

例 7　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt[3]{1+2x}-1}$.

例 8　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{(\sqrt{1+x}-1)\arcsin x}$.

等价无穷小量代换

练习 2　求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{(e^{2x}-1)\ln(1-2x)}$.

等价无穷小量代换

练习 2　求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\arcsin 2x}$; $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \dfrac{3}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{(e^{2x}-1)\ln(1-2x)}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots -\dfrac{9}{8}$

等价无穷小量代换

例 9　求函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x \cdot (e^{x+1} - 1)}{\sqrt{1 + x + x^2} - 1}$.

等价无穷小量代换

例 9　求函数极限 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot(e^{x+1}-1)}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$.

注记　只能代换无穷小量，不能代换非无穷小量.

等价无穷小量代换

例 9 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot(e^{x+1}-1)}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$.

注记 只能代换无穷小量，不能代换非无穷小量.

例 10 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

等价无穷小量代换

例 9 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\cdot(e^{x+1}-1)}{\sqrt{1+x+x^2}-1}$.

注记 只能代换无穷小量，不能代换非无穷小量.

例 10 求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

注记 只能分别代换乘除项，不能分别代换加减项.

等价无穷小量代换

复习 1　求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)(e^{\sqrt{x}}-1)}{\sin x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2x+x^2)\cdot\tan 3x}{1-\cos 3x}$.

等价无穷小量代换

复习 1　求下列函数极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\sqrt{1+\sqrt{x}}-1)(e^{\sqrt{x}}-1)}{\sin x}$; $\cdots\cdots\cdots\cdots \dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2x+x^2)\cdot\tan 3x}{1-\cos 3x}$. $\cdots\cdots\cdots\cdots -\dfrac{4}{3}$

等价无穷小代换

复习 2　求下列函数极限：

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1-2x^2}-1)(e^{2x+1}-1)}{\sin(x^2)};$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{\sqrt{1-x^3}-1}.$$

复习 2　求下列函数极限：

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1-2x^2}-1)(e^{2x+1}-1)}{\sin(x^2)};$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\tan x}{\sqrt{1-x^3}-1}.$$

解答　(1) $-\frac{2}{3}(e-1)$;　　(2) 1.

复习与提高

选择　当 $x \to 0^+$ 时，下列各无穷小量中与 $\sqrt{x}$ 等价的是……………………………………（　　）

(A) $1-e^{\sqrt{x}}$　　(B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

第七节	函数的连续性
A	函数的连续性
B	函数的间断点
C	闭区间上连续函数

连续的概念

例子　自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小.

2 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小.

连续的概念

例子　自然界中有很多现象都是连续地变化着的.

1. 当时间变化很微小时，气温的变化也很微小.
2. 当边长变化很微小时，正方形的面积变化很微小.

对于 $y = f(x)$ 定义域中的一点 x_0，如果 x 从 x_0 作微小改变 Δx 后，y 的相应改变量 Δy 也很微小，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

连续的概念

定义 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

连续的概念

定义　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right)=0,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

$$\Updownarrow$$

定义　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

连续函数

定义 如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**连续**，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的**连续函数**.

连续函数

定义　如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上连续，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的连续函数.

- $f(x)$ 在区间左端点 a 处连续是指 $f(a^{+})=f(a)$
- $f(x)$ 在区间右端点 b 处连续是指 $f(b^{-})=f(b)$

连续函数

定义　如果 $f(x)$ 在区间 I 的每一点都连续，则称 $f(x)$ 在区间 I 上**连续**，或称 $f(x)$ 是区间 I 上的**连续函数**.

- $f(x)$ 在区间左端点 a 处连续是指 $f(a^+) = f(a)$
- $f(x)$ 在区间右端点 b 处连续是指 $f(b^-) = f(b)$

注记　连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

极限与连续

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$（极限存在）：

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ x \in \mathring{U}(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(A, \epsilon)$$

极限与连续

$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$（极限存在）:

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ x \in \mathring{U}(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(A,\epsilon)$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$（连续）:

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ x \in U(x_0,\delta) \Rightarrow f(x) \in U(f(x_0),\epsilon)$$

连续函数

定理 3　两个连续函数的四则运算仍然是连续函数.

连续函数

定理 3 两个连续函数的四则运算仍然是连续函数.

定理 4 两个连续函数的复合函数仍然是连续函数.

连续函数

定理 3 两个连续函数的四则运算仍然是连续函数.

定理 4 两个连续函数的复合函数仍然是连续函数.

定理 5 基本初等函数在其定义域内都是连续函数.

连续函数

定理 3 两个连续函数的四则运算仍然是连续函数.

定理 4 两个连续函数的复合函数仍然是连续函数.

定理 5 基本初等函数在其定义域内都是连续函数.

定理 6 初等函数在其定义区间内都是连续函数.

函数的连续性

性质　$f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$.

函数的连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$.

例 2 判断函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点的连续性：

(1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0 \\ x-1, & x\geqslant 0 \end{cases}$;

(2) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2\sin x}{x}, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{1+x}-1}, & x>0 \end{cases}$.

函数的连续性

练习 1　已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0\\ 1, & x=0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$，判断它在 $x=0$ 点的连续性.

函数的连续性

练习 1　已知函数 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$，判断它在 $x = 0$ 点的连续性.

解答　$f(x)$ 在 $x = 0$ 点是连续的.

例 3　已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ b, & x=1 \\ ax+1, & x>1 \end{cases}$ 是连续的，

求 a 和 b.

例 3　已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ b, & x=1 \\ ax+1, & x>1 \end{cases}$ 是连续的，求 a 和 b.

练习 2　已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，求 a 和 b：

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{ax}-1}{x}, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \dfrac{\sqrt[3]{1-bx+x^2}-1}{x}, & x>0 \end{cases}.$$

例 3 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ b, & x=1 \\ ax+1, & x>1 \end{cases}$ 是连续的，求 a 和 b.

练习 2 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续，求 a 和 b：

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{ax}-1}{x}, & x<0 \\ 2, & x=0 \\ \dfrac{\sqrt[3]{1-bx+x^2}-1}{x}, & x>0 \end{cases}.$$

解答 $a=2$，$b=-6$.

第七节	函数的连续性
A	函数的连续性
B	函数的间断点
C	闭区间上连续函数

函数的间断点

定义　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域有定义，如果 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称它在点 x_0 间断，或者称点 x_0 是 $f(x)$ 的间断点.

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点：$f(x_0^-) = f(x_0^+)$

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$
- 跳跃间断点：$f(x_0^-)\neq f(x_0^+)$

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点：$f(x_0^-) = f(x_0^+)$
- 跳跃间断点：$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$

第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点：$f(x_0^-) = f(x_0^+)$
- 跳跃间断点：$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$

第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在

- 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大

间断点的分类

第一类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均存在

- 可去间断点：$f(x_0^-) = f(x_0^+)$
- 跳跃间断点：$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$

第二类间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个不存在

- 无穷间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 至少一个为无穷大
- 振荡间断点：$f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 均不为无穷大

函数的间断点

例 4 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ ....可去间断点

函数的间断点

例 4 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ ....可去间断点

例 5 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ ....跳跃间断点

函数的间断点

例 4 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ .... 可去间断点

例 5 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ .... 跳跃间断点

例 6 $f(x)=\frac{1}{x}$ .... 无穷间断点

函数的间断点

例 4 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\neq 1 \\ 1, & x=1 \end{cases}$ .... 可去间断点

例 5 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ .... 跳跃间断点

例 6 $f(x)=\frac{1}{x}$ .... 无穷间断点

例 7 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ .... 振荡间断点

函数的间断点

注记　间断点常见位置：（1）分母为零；（2）分段点.

函数的间断点

注记　间断点常见位置：（1）分母为零；（2）分段点.

例 8　求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点，并判断类型.

函数的间断点

注记　间断点常见位置：（1）分母为零；（2）分段点.

例 8　求函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 的间断点，并判断类型.

例 9　求 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\leqslant 1, x\neq 0\\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$ 的间断点，并判断其类型.

第七节	函数的连续性
A	函数的连续性
B	函数的间断点
C	闭区间上连续函数

闭区间上连续函数

1 最值定理

2 零值定理

3 介值定理

最值定理

定理 7　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

最值定理

定理 7 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界而且一定能取到最大值 M 和最小值 m.

注记 函数 $y=\tan x$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上是连续的，但在这个开区间上它是无界的，而且也没有最大值和最小值.

零值定理

定理 8　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

零值定理

定理 8 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

例 10 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根.

零值定理

定理 8 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)$ 和 $f(b)$ 异号，则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=0$.

例 10 证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间 $(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,3)$ 内各有一个实根.

例 11 证明方程 $2\sin x = x+1$ 有实数解.

介值定理

定理 9 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

介值定理

定理 9 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=A$ 和 $f(b)=B$ 不相等，则对于 A 与 B 之间的任何数 C，在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

证明 令 $g(x)=f(x)-C$．则由零值定理可以得到结论.

复习与提高

选择　已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则点 $x=0$ 属于 $f(x)$ 的 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点

复习与提高

选择 已知函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$，则点 $x=0$ 属于 $f(x)$ 的……………………………（　　）

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点　　(D) 连续点

思考 修改 $f(x)$，使得 $x\to 0$ 时 $f(x)$ 为无穷大量？

复习与提高

选择 已知函数 $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$，则点 $x = 0$ 属于 $f(x)$ 的…………………………（ ）

(A) 可去间断点 (B) 跳跃间断点

(C) 第二类间断点 (D) 连续点

思考 修改 $f(x)$，使得 $x \to 0$ 时 $f(x)$ 为无穷大量？

注记 小心 $e^{\frac{1}{x}}$ 和 $\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ 等复合函数的间断点！