微积分课程

第三章 · 导数与微分

2020 年 8 月 29 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	导数的概念
A	导数的物理背景
B	导数的几何意义
C	可导性与连续性

导数引例：瞬时速度

例 1　物体作变速直线运动，经过的路程 s 是时刻 t 的函数，$s = f(t)$．求在 t_0 时刻物体的瞬时速度．

导数引例：瞬时速度

例 1　物体作变速直线运动，经过的路程 s 是时刻 t 的函数，$s=f(t)$. 求在 t_0 时刻物体的瞬时速度.

- 从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 的平均速度为

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

导数引例：瞬时速度

例 1　物体作变速直线运动，经过的路程 s 是时刻 t 的函数，$s=f(t)$. 求在 t_0 时刻物体的瞬时速度.

- 从 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 的平均速度为

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

- 在 t_0 时刻的瞬时速度为

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

导数的定义

定义 1　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义．若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，

导数的定义

定义 1 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义．若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数（或微商）.

导数的定义

定义 1 设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义．若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数（或微商）．

记为 $f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}$．

导数的定义

定义 1　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义. 若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的**导数**（或**微商**）.

记为 $f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，或 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)\right|_{x=x_0}$.

注记　导数 $f'(x_0)$ 反映了 $f(x)$ 在点 x_0 处的变化快慢，

导数的定义

定义 1　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的某邻域有定义．若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在 x_0 处的导数（或微商）.

记为 $f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$，或 $\left.\dfrac{d}{dx}f(x)\right|_{x=x_0}$.

注记　导数 $f'(x_0)$ 反映了 $f(x)$ 在点 x_0 处的变化快慢，因此 $f'(x_0)$ 又称为 $f(x)$ 在 x_0 点的变化率.

导数的几种形式

- $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$（定义）

导数的几种形式

- $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$（定义）
- $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$（令 $h=\Delta x$）

导数的几种形式

- $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$（定义）
- $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$（令 $h=\Delta x$）
- $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$（令 $x=x_0+h$）

导数的定义

如果 $f(x)$ 在 x_0 处有导数，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导.

导数的定义

如果 $f(x)$ 在 x_0 处有导数，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导．否则，称 $f(x)$ 在 x_0 处不可导．

导数的定义

如果 $f(x)$ 在 x_0 处有导数，则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导．否则，称 $f(x)$ 在 x_0 处不可导.

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导.

导函数的定义

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，则每个 $x_0 \in (a,b)$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，

导函数的定义

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，则每个 $x_0 \in (a,b)$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，从而得到一个函数 $f'(x)$：

$$f' : x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

导函数的定义

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，则每个 $x_0 \in (a,b)$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，从而得到一个函数 $f'(x)$：

$$f' : x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的导函数（简称导数），

导函数的定义

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，则每个 $x_0 \in (a,b)$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，从而得到一个函数 $f'(x)$：

$$f' : x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的导函数（简称导数），记为 $f'(x)$，或 y'，或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，或 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$.

导函数的定义

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，则每个 $x_0 \in (a,b)$ 都有一个导数值 $f'(x_0)$ 与之对应，从而得到一个函数 $f'(x)$：

$$f' : x_0 \longmapsto f'(x_0)$$

$f'(x)$ 称为 $f(x)$ 在 (a,b) 内的导函数（简称导数），记为 $f'(x)$，或 y'，或 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，或 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)$．此时有

$$f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}.$$

导函数的几种形式

- $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ （定义）

导函数的几种形式

- $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$（定义）
- $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$（令 $h=\Delta x$）

例 2　求常值函数 $f(x) = C$ 的导数.

例 2　求常值函数 $f(x)=C$ 的导数.

例 3　研究幂函数 $f(x)=x^n$ 的导数.

- $n=1$ 时，$(x)'=?$
- $n=2$ 时，$(x^2)'=?$
- $n=3$ 时，$(x^3)'=?$

例 2　求常值函数 $f(x) = C$ 的导数.

例 3　研究幂函数 $f(x) = x^n$ 的导数.

- $n = 1$ 时，$(x)' = ?$
- $n = 2$ 时，$(x^2)' = ?$
- $n = 3$ 时，$(x^3)' = ?$
- $n = -1$ 时，$(\frac{1}{x})' = ?$
- $n = 1/2$ 时，$(\sqrt{x})' = ?$

例 2 求常值函数 $f(x)=C$ 的导数.

例 3 研究幂函数 $f(x)=x^n$ 的导数.

- $n=1$ 时，$(x)'=?$
- $n=2$ 时，$(x^2)'=?$
- $n=3$ 时，$(x^3)'=?$
- $n=-1$ 时，$(\frac{1}{x})'=?$
- $n=1/2$ 时，$(\sqrt{x})'=?$

练习 1 利用导数的定义求 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 的导数.

第一节	导数的概念
A	导数的物理背景
B	导数的几何意义
C	可导性与连续性

导数引例：切线斜率

例 4　求曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x_0, y_0)$ 处的切线斜率.

导数引例：切线斜率

例 4　求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线斜率.

- 设 N 点在 M 点附近，则割线 MN 的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

导数引例：切线斜率

例 4　求曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线斜率.

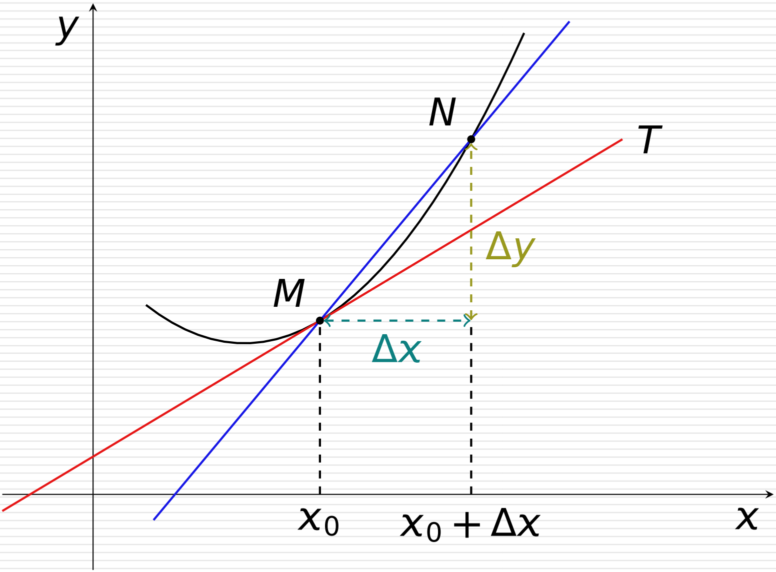
- 设 N 点在 M 点附近，则割线 MN 的斜率为

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

- 让 N 点往 M 点跑，则切线 MT 的斜率为

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

导数引例：切线斜率



导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，就是曲线 $y = f(x)$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线斜率.

导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，就是曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线斜率.

从而点 (x_0,y_0) 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

导数的几何意义

例 5　求 $f(x) = x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程和法线方程.

导数的几何意义

例 5　求 $f(x)=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程和法线方程.

练习 2　求 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

第一节	导数的概念
A	导数的物理背景
B	导数的几何意义
C	可导性与连续性

可导性与连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Longrightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

可导性与连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Longrightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

推论 $f(x)$ 在 x_0 点不连续 $\Longrightarrow f(x)$ 在 x_0 点不可导.

可导性与连续性

性质　$f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Longrightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

推论　$f(x)$ 在 x_0 点不连续 $\Longrightarrow f(x)$ 在 x_0 点不可导.

例 6　判断函数在点 $x=0$ 处的连续性与可导性：

(1) $f(x)=\begin{cases} -x, & x<0; \\ x+1, & x\geqslant 0. \end{cases}$

可导性与连续性

性质 $f(x)$ 在 x_0 点可导 $\Longrightarrow f(x)$ 在 x_0 点连续.

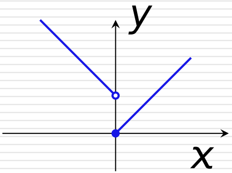
推论 $f(x)$ 在 x_0 点不连续 $\Longrightarrow f(x)$ 在 x_0 点不可导.

例 6 判断函数在点 $x=0$ 处的连续性与可导性:

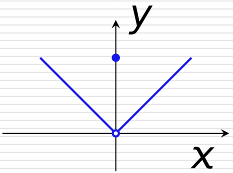
(1) $f(x)=\begin{cases}-x, & x<0;\\ x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(2) $g(x)=|x|=\begin{cases}-x, & x<0;\\ x, & x\geqslant 0.\end{cases}$

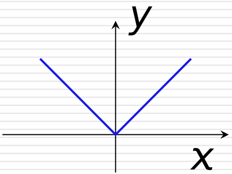
函数曲线的形状（在 $x = 0$ 处）



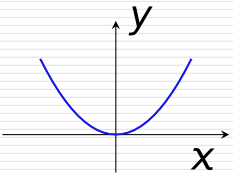
极限不存在



极限存在但不连续



连续但不可导



可导

复习与提高：导数的记号

选择　设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 点可导的一个充分条件是…………（　　）

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f(a+\frac{1}{h})-f(a)\right]$ 存在

(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在

(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

复习与提高

复习 1　求 $y=\dfrac{1}{x^2}$ 在点 $\left(2,\dfrac{1}{4}\right)$ 处的切线方程和法线方程.

基本导数公式 I

(1) $$(C)' = 0$$

(2) $$(x^a)' = ax^{a-1}$$

第二节	导数的运算
A	和与差的导数
B	积与商的导数
C	反函数的导数
D	复合函数的导数
E	分段函数的导数

和与差的导数运算

定理 1

$$[Cu(x)]' = Cu'(x)$$

$$[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$$

例 1　求下列函数的导数.

(1) $f(x)=2x^3-4x^2+x+2$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x}$

例 1　求下列函数的导数.

(1) $f(x)=2x^3-4x^2+x+2$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x}$

练习 1　求下列函数的导数.

(1) $f(x)=x^5-4x^4+x^2+3x+e$

(2) $f(x)=(x+2)(3x^3+2x)$

例 1　求下列函数的导数.

(1) $f(x)=2x^3-4x^2+x+2$

(2) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x}$

练习 1　求下列函数的导数.

(1) $f(x)=x^5-4x^4+x^2+3x+e$

(2) $f(x)=(x+2)(3x^3+2x)$

答案　(1)　$f'(x)=5x^4-16x^3+2x+3$;

(2)　$f'(x)=12x^3+18x^2+4x+4$.

基本导数公式 II

(3) $(e^x)'$

(4) $(a^x)'$

(5) $(\ln x)'$

(6) $(\log_a x)'$

基本导数公式 II

(3) $(e^x)' = e^x$

(4) $(a^x)'$

(5) $(\ln x)'$

(6) $(\log_a x)'$

基本导数公式 II

(3) $$(e^x)' = e^x$$

(4) $$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

(5) $$(\ln x)'$$

(6) $$(\log_a x)'$$

基本导数公式 II

(3) $$(e^x)' = e^x$$

(4) $$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

(5) $$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

(6) $$(\log_a x)'$$

基本导数公式 II

(3) $$(e^x)' = e^x$$

(4) $$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

(5) $$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

(6) $$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

基本导数公式 III

(7) $(\sin x)'$

(8) $(\cos x)'$

基本导数公式 III

(7) $$(\sin x)' = \cos x$$

(8) $$(\cos x)'$$

基本导数公式 III

(7) $$(\sin x)' = \cos x$$

(8) $$(\cos x)' = -\sin x$$

第二节	导数的运算
A	和与差的导数
B	积与商的导数
C	反函数的导数
D	复合函数的导数
E	分段函数的导数

积与商的导数运算

定理 2

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

基本导数公式 IV

利用商的导数运算公式，可以得到:

(9) $(\tan x)'$

(10) $(\cot x)'$

(11) $(\sec x)'$

(12) $(\csc x)'$

基本导数公式 IV

利用商的导数运算公式，可以得到：

(9) $(\tan x)' = \sec^2 x$

(10) $(\cot x)'$

(11) $(\sec x)'$

(12) $(\csc x)'$

基本导数公式 IV

利用商的导数运算公式，可以得到：

(9) $(\tan x)' = \sec^2 x$

(10) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

(11) $(\sec x)'$

(12) $(\csc x)'$

基本导数公式 IV

利用商的导数运算公式，可以得到：

(9) $(\tan x)' = \sec^2 x$

(10) $(\cot x)' = -\csc^2 x$

(11) $(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$

(12) $(\csc x)'$

基本导数公式 IV

利用商的导数运算公式，可以得到：

(9) $$(\tan x)' = \sec^2 x$$

(10) $$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

(11) $$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

(12) $$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

基本导数公式 IV

利用商的导数运算公式，可以得到：

(9) $$(\tan x)' = \sec^2 x$$

(10) $$(\cot x)' = -\csc^2 x$$

(11) $$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$

(12) $$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$

其中，$\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$，$\csc x = \dfrac{1}{\sin x}$.

例 2　求下列函数的导数.

(1) $f(x)=x\cdot\ln x$

例 2　求下列函数的导数.

(1) $f(x)=x\cdot\ln x$

(2) $f(x)=e^{x}\cdot\sin x$

例2　求下列函数的导数.

(1) $f(x)=x\cdot\ln x$

(2) $f(x)=e^{x}\cdot\sin x$

(3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^{2}}$

例 2　求下列函数的导数.

(1) $f(x) = x \cdot \ln x$

(2) $f(x) = e^x \cdot \sin x$

(3) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$

(4) $f(x) = \dfrac{x^3 + 2x}{e^x}$

练习 2　求下列函数的导数.

(1) $f(x)=e^x\cdot\ln x$

(2) $f(x)=\sin x\cdot(x^4+x)$

(3) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$

函数乘积的导数运算

定理 3　由两个函数乘积的导数公式，可以得到多个函数乘积的导数公式，例如：

$$\begin{aligned}\left(u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)\right)' = &\ u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x)\\ &+u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x)\\ &+u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)\end{aligned}$$

函数乘积的导数运算

定理 3　由两个函数乘积的导数公式，可以得到多个函数乘积的导数公式，例如：

$$\big(u(x)\cdot v(x)\cdot w(x)\big)' = u'(x)\cdot v(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v'(x)\cdot w(x) + u(x)\cdot v(x)\cdot w'(x)$$

例 3　求 $f(x)=e^x\cdot x^2\cdot \sin x$ 的导数.

第二节	导数的运算
A	和与差的导数
B	积与商的导数
C	反函数的导数
D	复合函数的导数
E	分段函数的导数

反函数的导数

定理 4 设 $y = f(x)$ 在点 x 处有不等于 0 的导数 $f'(x)$，并且其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在相应点处连续，则 $[f^{-1}(y)]'$ 存在，并且

$$[f(x)]'_x = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'_y}.$$

反函数的导数

定理 4 设 $y=f(x)$ 在点 x 处有不等于 0 的导数 $f'(x)$，并且其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在相应点处连续，则 $[f^{-1}(y)]'$ 存在，并且

$$[f(x)]'_x = \frac{1}{[f^{-1}(y)]'_y}.$$

注记 上式也可以写成 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}$.

基本导数公式 V

(13) $(\arcsin x)'$

(14) $(\arccos x)'$

(15) $(\arctan x)'$

(16) $(\arccot x)'$

基本导数公式 V

(13) $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(14) $$(\arccos x)'$$

(15) $$(\arctan x)'$$

(16) $$(\operatorname{arccot} x)'$$

基本导数公式 V

(13) $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(14) $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(15) $$(\arctan x)'$$

(16) $$(\operatorname{arccot} x)'$$

基本导数公式 V

(13) $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(14) $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(15) $$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

(16) $$(\operatorname{arccot} x)'$$

基本导数公式 V

(13) $$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(14) $$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(15) $$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

(16) $$(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

第二节	导数的运算
A	和与差的导数
B	积与商的导数
C	反函数的导数
D	复合函数的导数
E	分段函数的导数

复合函数的导数

例子　$[f(g(x))]' \overset{\times}{=} f'[g(x)]$ 一般不成立.

复合函数的导数

例子 $[f(g(x))]' \overset{\times}{=} f'[g(x)]$ 一般不成立. 比如

$$(\sin 2x)' \neq \cos 2x.$$

复合函数的导数

例子 $[f(g(x))]' \overset{\times}{=} f'[g(x)]$ 一般不成立．比如

$$(\sin 2x)' \neq \cos 2x.$$

实际上，我们有

$$(\sin 2x)' = (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x\cos x)'$$

复合函数的导数

例子 $[f(g(x))]' \overset{\times}{=} f'[g(x)]$ 一般不成立．比如

$$(\sin 2x)' \neq \cos 2x.$$

实际上，我们有

$$(\sin 2x)' = (2\sin x \cos x)' = 2(\sin x \cos x)'$$

$$= 2\left[(\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)'\right]$$

复合函数的导数

例子　$[f(g(x))]' \overset{\times}{=} f'[g(x)]$ 一般不成立．比如

$$(\sin 2x)' \neq \cos 2x.$$

实际上，我们有

$$\begin{aligned}(\sin 2x)' &= (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x\cos x)' \\ &= 2\left[(\sin x)'\cdot\cos x + \sin x\cdot(\cos x)'\right] \\ &= 2[\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x)]\end{aligned}$$

复合函数的导数

例子 $[f(g(x))]' \overset{\times}{=} f'[g(x)]$ 一般不成立．比如

$$(\sin 2x)' \neq \cos 2x.$$

实际上，我们有

$$\begin{aligned}(\sin 2x)' &= (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x\cos x)' \\ &= 2\left[(\sin x)'\cdot\cos x + \sin x\cdot(\cos x)'\right] \\ &= 2[\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x)] \\ &= 2[\cos^2 x - \sin^2 x]\end{aligned}$$

复合函数的导数

例子　$[f(g(x))]' \overset{\times}{=} f'[g(x)]$ 一般不成立．比如

$$(\sin 2x)' \neq \cos 2x.$$

实际上，我们有

$$
\begin{aligned}
(\sin 2x)' &= (2\sin x\cos x)' = 2(\sin x\cos x)' \\
&= 2\left[(\sin x)'\cdot\cos x + \sin x\cdot(\cos x)'\right] \\
&= 2[\cos x\cdot\cos x + \sin x\cdot(-\sin x)] \\
&= 2[\cos^2 x - \sin^2 x] \\
&= 2\cos 2x
\end{aligned}
$$

复合函数的导数

定理 5　设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则它们的复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

复合函数的导数

定理 5　设 $y = f(u)$，$u = g(x)$，则它们的复合函数 $y = f[g(x)]$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

或者

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

复合函数的导数

定理 5　设 $y=f(u)$，$u=g(x)$，则它们的复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

或者

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

复合函数的导数

例 4　求复合函数的导数：

(1)　$y = (1 + 2x)^6$

复合函数的导数

例 4　求复合函数的导数：

(1) $y=(1+2x)^6$

(2) $y=e^{3x^2+1}$

复合函数的导数

例 4　求复合函数的导数：

(1) $y=(1+2x)^6$

(2) $y=e^{3x^2+1}$

(3) $y=\ln(\sin x)$

复合函数的导数

例 4　求复合函数的导数：

(1) $y=(1+2x)^6$

(2) $y=e^{3x^2+1}$

(3) $y=\ln(\sin x)$

(4) $y=\sqrt{x^2+1}$

复合函数的导数

练习3　求复合函数的导数：

(1) $y = e^{2x^2-6x}$

(2) $y = \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$

复合函数的导数

练习 3　求复合函数的导数：

(1) $y = e^{2x^2-6x}$

(2) $y = \sqrt{2x^2 - 4x + 1}$

(3) $y = \dfrac{\sin 3x}{x^2}$

三重复合函数的导数

注记 1　设 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=h(x)$．则复合函数 $y=f(g(h(x)))$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

三重复合函数的导数

注记 1　设 $y=f(u)$，$u=g(v)$，$v=h(x)$．则复合函数 $y=f(g(h(x)))$ 的导数公式为：

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$$

或者

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

三重复合函数的导数

例 5　求三重复合函数的导数：

(1)　$y = e^{\sqrt{-2x+1}}$

三重复合函数的导数

例 5　求三重复合函数的导数:

(1)　$y = e^{\sqrt{-2x+1}}$

(2)　$y = \ln(\cos(3x+1))$

三重复合函数的导数

练习 4　求三重复合函数的导数:

(1) $y = e^{\sqrt{x^2-1}}$

(2) $y = \tan^2(3x^2+1)$

第二节	导数的运算
A	和与差的导数
B	积与商的导数
C	反函数的导数
D	复合函数的导数
E	分段函数的导数

分段函数的导数

对于分段函数，我们有（假定 $u(x)$ 和 $v(x)$ 总可导）：

$$f(x)=\begin{cases} u(x), & x \leqslant a \\ v(x), & x > a \end{cases} \Longrightarrow f'(x)=\begin{cases} u'(x), & x < a \\ v'(x), & x > a \end{cases}$$

分段函数的导数

对于分段函数，我们有（假定 $u(x)$ 和 $v(x)$ 总可导）：

$$f(x)=\begin{cases} u(x), & x\leqslant a \\ v(x), & x>a \end{cases} \Longrightarrow f'(x)=\begin{cases} u'(x), & x<a \\ v'(x), & x>a \end{cases}$$

注记　$f'(a)$ 需要单独研究：未必有 $f'(a)=u'(a)$.

左导数和右导数

定义　设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上有定义，

左导数和右导数

定义　设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，

左导数和右导数

定义　设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$.

左导数和右导数

定义　设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_{-}(x_0)$.

定义　设 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+\delta)$ 上有定义，

左导数和右导数

定义 设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$.

定义 设 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，

左导数和右导数

定义　设 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0]$ 上有定义，若左极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的左导数，记为 $f'_-(x_0)$.

定义　设 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

存在，则称它为 $f(x)$ 在 x_0 处的右导数，记为 $f'_+(x_0)$.

性质 1　导数存在 $\Longleftrightarrow$ 左导数和右导数都存在且相等.

性质 1　导数存在 $\Longleftrightarrow$ 左导数和右导数都存在且相等.

导数：$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

性质 1　导数存在 $\Longleftrightarrow$ 左导数和右导数都存在且相等.

$$导数：f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$左导数：f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$右导数：f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

性质 2　函数的可导性和连续性有如下关系：

- 可导 $\Rightarrow$ 连续，反之未必；

性质 1　导数存在 $\Longleftrightarrow$ 左导数和右导数都存在且相等.

$$\text{导数：}\ f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{左导数：}\ f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{右导数：}\ f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

性质 2　函数的可导性和连续性有如下关系：

- 可导 $\Rightarrow$ 连续，反之未必；
- 左可导 $\Rightarrow$ 左连续，反之未必；

性质 1　导数存在 $\Longleftrightarrow$ 左导数和右导数都存在且相等.

$$\text{导数：} f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{左导数：} f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\text{右导数：} f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

性质 2　函数的可导性和连续性有如下关系：

- 可导 $\Rightarrow$ 连续，反之未必；
- 左可导 $\Rightarrow$ 左连续，反之未必；
- 右可导 $\Rightarrow$ 右连续，反之未必.

分段函数的导数

性质 假定 $u(x)$ 和 $v(x)$ 总可导，分段函数

$$f(x)=\begin{cases} u(x), & x \leqslant a \\ v(x), & x > a \end{cases}.$$

如果 $f(x)$ 在 $x=a$ 点连续，则有

$$f'_-(a)=u'(a), \qquad f'_+(a)=v'(a).$$

分段函数的导数

例 6　判断函数 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x \leqslant -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases}$ 在点 $x=-1$ 的连续性与可导性.

分段函数的导数

例 6　判断函数 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x \leqslant -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases}$ 在点 $x=-1$ 的连续性与可导性. ……………… 不连续且不可导

分段函数的导数

例 6 判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant -1\\ x^2, & x>-1\end{cases}$ 在点 $x=-1$ 的连续性与可导性. ………………不连续且不可导

例 7 判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性与可导性.

分段函数的导数

例 6　判断函数 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x \leqslant -1 \\ x^2, & x > -1 \end{cases}$ 在点 $x=-1$ 的连续性与可导性. ……………………不连续且不可导

例 7　判断函数 $f(x)=\begin{cases} x^3, & x \leqslant 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性与可导性. ……………………连续但不可导

分段函数的导数

例 6　判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant -1\\ x^2, & x>-1\end{cases}$ 在点 $x=-1$ 的连续性与可导性. ………………不连续且不可导

例 7　判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性与可导性. …………………连续但不可导

例 8　判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性.

分段函数的导数

例 6　判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant -1\\ x^2, & x>-1\end{cases}$ 在点 $x=-1$ 的连续性与可导性. ……………………不连续且不可导

例 7　判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$ 在点 $x=1$ 处的连续性与可导性. ……………………连续但不可导

例 8　判断函数 $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性. ……………………连续且可导

复习与提高

复习 4　判断函数在 $x=1$ 的连续性和可导性.

(1) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>1; \\ -x, & x\leqslant 1. \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x>1; \\ 2x, & x\leqslant 1. \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} x^2+x+2, & x\geqslant 1; \\ -x^2+5x, & x<1. \end{cases}$

复习与提高

题 1　设 $f(x)=\begin{cases}x^2+bx+c, & x\geqslant 0\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 可导，求 b 和 c.

复习与提高：导数的记号

题 2　判断 $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0^+)$ 是否相同：

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0; \\ 1, & x=0. \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

复习与提高：导数的记号

题 2　判断 $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0^+)$ 是否相同：

(1) $f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0; \\ 1, & x=0. \end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

解答　(1) $f'_+(0)$ 不存在，但是 $f'(0^+)$ 存在.

(2) $f'_+(0)$ 存在，但是 $f'(0^+)$ 不存在.

复习与提高：导数的记号

题 2　判断 $f'_+(x_0)$ 与 $f'(x_0^+)$ 是否相同：

$$(1)\ \ f(x)=\begin{cases} x, & x\neq 0; \\ 1, & x=0. \end{cases}$$

$$(2)\ \ f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

解答　(1) $f'_+(0)$ 不存在，但是 $f'(0^+)$ 存在.

(2) $f'_+(0)$ 存在，但是 $f'(0^+)$ 不存在.

注记　若导函数 $f'(x)$ 在 x_0 点连续，则两者相等.

第三节	隐函数求导
A	隐函数求导
B	幂指函数求导
C	参数方程求导

显函数与隐函数

- 显函数：由 $y = f(x)$ 直接确定的函数关系.

显函数与隐函数

- 显函数：由 $y=f(x)$ 直接确定的函数关系.
- 隐函数：由 $F(x,y)=0$ 隐式确定的函数关系.

隐函数的求导方法

问题　设 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，求 y'_x.

隐函数的求导方法

问题　设 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，求 y'_x.

解法　将 y 看成 x 的函数，方程两边同时对 x 求导.

$$(a(x))'_x = b(x) \Rightarrow (a(y))'_x = b(y)\cdot y'_x$$

隐函数的求导方法

问题 设 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，求 y'_x.

解法 将 y 看成 x 的函数，方程两边同时对 x 求导.

$$(a(x))'_x = b(x) \Rightarrow (a(y))'_x = b(y)\cdot y'_x$$

例 1 求方程 $x^2+y^2-1=0$ 确定的隐函数的导数.

隐函数的求导方法

问题　设 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，求 y'_x.

解法　将 y 看成 x 的函数，方程两边同时对 x 求导.

$$(a(x))'_x = b(x) \Rightarrow (a(y))'_x = b(y)\cdot y'_x$$

例 1　求方程 $x^2+y^2-1=0$ 确定的隐函数的导数.

例 2　求方程 $y=x\ln y$ 确定的隐函数的导数.

隐函数的求导方法

问题　设 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，求 y'_x.

解法　将 y 看成 x 的函数，方程两边同时对 x 求导.

$$(a(x))'_x = b(x) \;\Rightarrow\; (a(y))'_x = b(y)\cdot y'_x$$

例 1　求方程 $x^2+y^2-1=0$ 确定的隐函数的导数.

例 2　求方程 $y=x\ln y$ 确定的隐函数的导数.

练习 1　求由方程确定的隐函数的导数 y'_x：

(1) $e^y+e^x-3x+4y^2=0$;

(2) $x^3y+2x^2y^2+4=0$.

例 3 求曲线 $x^2+xy+y^2=4$ 在点 $(2,-2)$ 处的切线方程和法线方程.

例 3　求曲线 $x^2+xy+y^2=4$ 在点 $(2,-2)$ 处的切线方程和法线方程.

练习 2

(1) 求曲线 $y^3+y^2=2x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程.

(2) 求曲线 $\sin y+y^2-x^2+1=0$ 在点 $(1,0)$ 处的法线方程.

第三节	隐函数求导
A	隐函数求导
B	幂指函数求导
C	参数方程求导

幂指函数求导

例 4　求下列幂指函数的导数：

(1) $y = x^x$；

幂指函数求导

例 4　求下列幂指函数的导数：

(1)　$y = x^x$；

(2)　$y = (\ln x)^x$.

幂指函数求导

例 4　求下列幂指函数的导数：

(1)　$y = x^x$;

(2)　$y = (\ln x)^x$.

练习 3　求下列幂指函数的导数：

(1)　$y = (\sin x)^x$;

幂指函数求导

例 4　求下列幂指函数的导数：

(1) $y = x^x$；

(2) $y = (\ln x)^x$.

练习 3　求下列幂指函数的导数：

(1) $y = (\sin x)^x$；

(2) $y = x^{\sin x}$.

第三节	隐函数求导
A	隐函数求导
B	幂指函数求导
C	参数方程求导

参数方程求导

例 5　求由参数方程确定的函数 $y=f(x)$ 的导数：

（1）$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$；

参数方程求导

例 5　求由参数方程确定的函数 $y=f(x)$ 的导数：

（1）$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$；　（2）$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$.

参数方程求导

例 5　求由参数方程确定的函数 $y=f(x)$ 的导数：

（1）$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \end{cases}$；　　（2）$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln(1+t^2) \end{cases}$.

练习 4　求由参数方程确定的函数 $y=f(x)$ 的导数：

（1）$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$；

参数方程求导

例 5　求由参数方程确定的函数 $y=f(x)$ 的导数：

（1）$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{cases}$；　（2）$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$.

练习 4　求由参数方程确定的函数 $y=f(x)$ 的导数：

（1）$\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$；　（2）$\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\cos t \\ y=\mathrm{e}^t\sin t \end{cases}$.

复习 1　求方程 $\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^y = x^2y^2 + 2$ 确定的隐函数在点 $(0,0)$ 处的导数.

隐函数求导

复习 1　求方程 $e^x + e^y = x^2y^2 + 2$ 确定的隐函数在点 $(0,0)$ 处的导数.

复习 2　求函数 $y = (\ln x)^{\sin x}$ 的导数.

定义 1 假定函数 $y=f(x)$ 可以多次求导，则

- $f''(x)=\left[f'(x)\right]'$ 称为二阶导数，

定义 1　假定函数 $y=f(x)$ 可以多次求导，则

- $f''(x)=[f'(x)]'$ 称为**二阶导数**，
  - 也可记为 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

定义 1 假定函数 $y=f(x)$ 可以多次求导，则

- $f''(x)=[f'(x)]'$ 称为二阶导数，
  - 也可记为 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.
- $f'''(x)=[f''(x)]'$ 称为三阶导数，

定义 1　假定函数 $y=f(x)$ 可以多次求导，则

- $f''(x)=[f'(x)]'$ 称为二阶导数，
  - 也可记为 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.
- $f'''(x)=[f''(x)]'$ 称为三阶导数，
  - 也可记为 y''' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$.

定义 1 假定函数 $y=f(x)$ 可以多次求导，则

- $f''(x)=[f'(x)]'$ 称为二阶导数，
  - 也可记为 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.
- $f'''(x)=[f''(x)]'$ 称为三阶导数，
  - 也可记为 y''' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$.
- $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$ 称为 n 阶导数，

定义 1　假定函数 $y=f(x)$ 可以多次求导，则

- $f''(x)=[f'(x)]'$ 称为二阶导数，
  - 也可记为 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.
- $f'''(x)=[f''(x)]'$ 称为三阶导数，
  - 也可记为 y''' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$.
- $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$ 称为 n 阶导数，
  - 也可记为 $y^{(n)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}$.

定义 1　假定函数 $y=f(x)$ 可以多次求导，则

- $f''(x)=[f'(x)]'$ 称为二阶导数，
  - 也可记为 y'' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.
- $f'''(x)=[f''(x)]'$ 称为三阶导数，
  - 也可记为 y''' 或 $\dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$.
- $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$ 称为 n 阶导数，
  - 也可记为 $y^{(n)}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$.

定义 1　假定函数 $y=f(x)$ 可以多次求导，则

- $f''(x)=[f'(x)]'$ 称为**二阶导数**，
  - 也可记为 y'' 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.
- $f'''(x)=[f''(x)]'$ 称为**三阶导数**，
  - 也可记为 y''' 或 $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.
- $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$ 称为 **n 阶导数**，
  - 也可记为 $y^{(n)}$ 或 $\dfrac{d^ny}{dx^n}$.

注记　规定 $f^{(0)}(x)=f(x)$，即 $y^{(0)}=y$.

高阶导数

例 1　求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y = x^4$；　(2) $y = e^x$；　(3) $y = \sin x$.

高阶导数

例 2　求下列函数的 n 阶导数：

(1) $y=\dfrac{1}{x}$;　　　(2) $y=\dfrac{1}{x^2+x}$.

高阶导数

练习 1　求函数 $y = x^2 e^x$ 的 n 阶导数.

高阶导数

练习 1　求函数 $y = x^2 e^x$ 的 n 阶导数.

练习 2　求函数 $y = e^x \sin x$ 的 n 阶导数.

隐函数的二阶导数

例 3　求方程 $x^2+y^2=1$ 确定的隐函数的二阶导数.

隐函数的二阶导数

例 3　求方程 $x^2 + y^2 = 1$ 确定的隐函数的二阶导数.

练习 3　求由方程 $y^2 = x^3 + 1$ 确定的隐函数的二阶导数 y''_x.

复习与提高

选择　已知 $f'(x) = [f(x)]^2$，则 $f^{(n)}(x) = \cdots\cdots(\qquad)$

(A) $n![f(x)]^{n+1}$　　(B) $n[f(x)]^{n+1}$

(C) $[f(x)]^{2n}$　　(D) $n![f(x)]^{2n}$

第五节	微分的概念
A	微分的引例
B	微分的定义
C	形式不变性

函数的改变量

例子　一块正方形金属薄片受热后，其边长由 x_0 增加到 $x_0 + \Delta x$．求此薄片面积的改变量 Δy．

函数的改变量

例子　一块正方形金属薄片受热后，其边长由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$．求此薄片面积的改变量 Δy．

解答　正方形面积为 $y=f(x)=x^2$．

函数的改变量

例子　一块正方形金属薄片受热后，其边长由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$．求此薄片面积的改变量 Δy．

解答　正方形面积为 $y=f(x)=x^2$．则面积改变量为

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

函数的改变量

例子　一块正方形金属薄片受热后，其边长由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$．求此薄片面积的改变量 Δy．

解答　正方形面积为 $y=f(x)=x^2$．则面积改变量为

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

比如，当 $x_0=1, \Delta x=0.1$ 时，

$$\Delta y=2\cdot 1\cdot 0.1+0.1^2=0.2+0.01.$$

函数的改变量

例子 一块正方形金属薄片受热后，其边长由 x_0 增加到 $x_0+\Delta x$. 求此薄片面积的改变量 Δy.

解答 正方形面积为 $y=f(x)=x^2$. 则面积改变量为

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

比如，当 $x_0=1, \Delta x=0.1$ 时，

$$\Delta y=2\cdot 1\cdot 0.1+0.1^2=0.2+0.01.$$

注记 若 Δx 很小，则 $2x_0\Delta x$ 远比 $(\Delta x)^2$ 大.

函数的改变量

例子 一块正方形金属薄片受热后，其边长由 x_0 增加到 $x_0 + \Delta x$．求此薄片面积的改变量 Δy.

解答 正方形面积为 $y = f(x) = x^2$．则面积改变量为

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

比如，当 $x_0 = 1, \Delta x = 0.1$ 时，

$$\Delta y = 2 \cdot 1 \cdot 0.1 + 0.1^2 = 0.2 + 0.01.$$

注记 若 Δx 很小，则 $2x_0\Delta x$ 远比 $(\Delta x)^2$ 大．因此

$$\boxed{\Delta y \approx 2x_0\Delta x}$$

函数的改变量

例子 一块正方形金属薄片受热后，其边长由 x_0 增加到 $x_0 + \Delta x$．求此薄片面积的改变量 Δy．

解答 正方形面积为 $y = f(x) = x^2$．则面积改变量为

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

比如，当 $x_0 = 1, \Delta x = 0.1$ 时，

$$\Delta y = 2 \cdot 1 \cdot 0.1 + 0.1^2 = 0.2 + 0.01.$$

注记 若 Δx 很小，则 $2x_0\Delta x$ 远比 $(\Delta x)^2$ 大．因此

$$\boxed{\Delta y \approx 2x_0\Delta x} \quad 即 \quad \boxed{\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x}$$

函数的改变量

定理 1　　$y = f(x)$ 在点 x_0 处可导

$$\Longleftrightarrow \quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

函数的改变量

定理 1　$y=f(x)$ 在点 x_0 处可导

$$\Longleftrightarrow \quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

定理 2　设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则当 $|\Delta x|$ 很小时，有近似公式

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

函数的改变量

定理 1　　$y=f(x)$ 在点 x_0 处可导

$$\Longleftrightarrow \quad \Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

定理 2　设 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则当 $|\Delta x|$ 很小时，有近似公式

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

解答

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$$

$$\Longrightarrow \Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$$

$$\Longrightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

近似计算

例 1　计算 $\sqrt{1.02}$ 的近似值.

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

近似计算

例 1　计算 $\sqrt{1.02}$ 的近似值.

解答　取 $f(x) = \sqrt{x}$,

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

近似计算

例 1 计算 $\sqrt{1.02}$ 的近似值.

解答 取 $f(x)=\sqrt{x}$, 则 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

....

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

近似计算

例 1 计算 $\sqrt{1.02}$ 的近似值.

解答 取 $f(x)=\sqrt{x}$, 则 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 再取 $x_0=1, \Delta x=0.02$,

....

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

近似计算

例 1 计算 $\sqrt{1.02}$ 的近似值.

解答 取 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 再取 $x_0=1, \Delta x=0.02$，则有

$$\sqrt{1.02}=f(1.02)=f(1+0.02)$$

$$\approx f(1)+f'(1)\times 0.02=1.01$$

....

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$$

近似计算

例 1 计算 $\sqrt{1.02}$ 的近似值.

解答 取 $f(x)=\sqrt{x}$，则 $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. 再取 $x_0=1, \Delta x=0.02$，则有

$$\sqrt{1.02}=f(1.02)=f(1+0.02)$$

$$\approx f(1)+f'(1)\times 0.02=1.01$$

………………………………………………

注记 以后将会学到更准确的近似公式：

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2}(\Delta x)^2$$

第五节	微分的概念
A	微分的引例
B	微分的定义
C	形式不变性

微分的概念

定义 1　对于自变量在点 x 处的改变量 Δx，如果函数 $y=f(x)$ 的相应改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

其中 A 与 Δx 无关，则称 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，并称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分，记为

$$\mathrm{d}y = A\Delta x.$$

微分的概念

定义 1 对于自变量在点 x 处的改变量 Δx，如果函数 $y=f(x)$ 的相应改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

其中 A 与 Δx 无关，则称 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，并称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分，记为

$$\mathrm{d}y = A\Delta x.$$

定理 3 $y=f(x)$ 在点 x 处可微 $\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$ 在点 x 处可导，且此时有 $\mathrm{d}y = f'(x)\Delta x$.

微分的概念

定义 1　对于自变量在点 x 处的改变量 Δx，如果函数 $y=f(x)$ 的相应改变量 Δy 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \qquad (\Delta x \to 0)$$

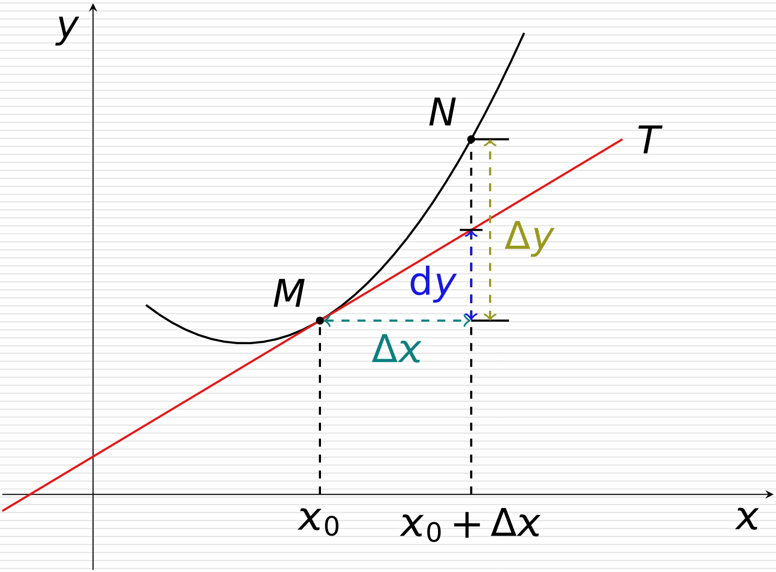
其中 A 与 Δx 无关，则称 $y=f(x)$ 在点 x 处可微，并称 $A\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分，记为

$$\mathrm{d}y = A\Delta x.$$

定理 3　$y=f(x)$ 在点 x 处可微 $\Longleftrightarrow$ $y=f(x)$ 在点 x 处可导，且此时有 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$.

注记　从 $y=x$ 可以得到 $\mathrm{d}x=\Delta x$，故定理中的等式可以写为 $\mathrm{d}y=f'(x)\,\mathrm{d}x$.

微分的几何意义



微分的计算

例 2　求 $y=x^2$ 当 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 时的微分.

微分的计算

例 2 求 $y=x^2$ 当 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 时的微分.

解答 $\mathrm{d}y=(x^2)'\Delta x=2x\Delta x$,

微分的计算

例 2 求 $y = x^2$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.01$ 时的微分.

解答 $\mathrm{d}y = (x^2)'\Delta x = 2x\Delta x$，所以

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}} = 2 \times 2 \times 0.01 = 0.04.$$

微分的计算

例 2　求 $y=x^2$ 当 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 时的微分.

解答　$\mathrm{d}y=(x^2)'\Delta x=2x\Delta x$，所以

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=2\times2\times0.01=0.04.$$

例 3　求微分：(1) $y=xe^x$；(2) $y=\sin(3x+2)$.

微分的计算

例 2　求 $y = x^2$ 当 $x = 2$，$\Delta x = 0.01$ 时的微分.

解答　$\mathrm{d}y = (x^2)'\Delta x = 2x\Delta x$，所以

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}} = 2\times 2\times 0.01 = 0.04.$$

例 3　求微分：(1) $y = xe^x$；(2) $y = \sin(3x+2)$.

解答　(1) $\mathrm{d}y = y'_x\,\mathrm{d}x = (xe^x)'_x\,\mathrm{d}x = (x+1)e^x\,\mathrm{d}x.$

微分的计算

例 2　求 $y=x^2$ 当 $x=2$，$\Delta x=0.01$ 时的微分.

解答　$\mathrm{d}y=(x^2)'\Delta x=2x\Delta x$，所以

$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}}=2\times2\times0.01=0.04.$$

例 3　求微分：(1) $y=xe^x$；(2) $y=\sin(3x+2)$.

解答　(1) $\mathrm{d}y=y'_x\,\mathrm{d}x=(xe^x)'_x\,\mathrm{d}x=(x+1)e^x\,\mathrm{d}x$.

(2) $\mathrm{d}y=y'_x\,\mathrm{d}x=\big(\sin(3x+2)\big)'_x\,\mathrm{d}x$.

$$=3\cos(3x+2)\,\mathrm{d}x$$

微分的计算

练习 1　求下列函数的微分：

(1) $y = \ln x / x$；　　(2) $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

第五节	微分的概念
A	微分的引例
B	微分的定义
C	形式不变性

微分法则

基本初等函数的微分：

1. $\mathrm{d}(C) = 0$
2. $\mathrm{d}(x^a) = ax^{a-1}\,\mathrm{d}x$
3. $\mathrm{d}(\ln x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
4. $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
5. $\mathrm{d}(\sin x) = \cos x\,\mathrm{d}x$
6. $\mathrm{d}(\cos x) = -\sin x\,\mathrm{d}x$

微分法则

基本初等函数的微分：

1 $\mathrm{d}(C)=0$

2 $\mathrm{d}(x^{a})=ax^{a-1}\,\mathrm{d}x$

3 $\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

4 $\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x})=\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

5 $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x$

6 $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\,\mathrm{d}x$

微分的四则运算：

1 $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$

2 $\mathrm{d}(Cu)=C\,\mathrm{d}u$

3 $\mathrm{d}(uv)=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v$

4 $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^{2}}$

微分的形式不变性

- 若 $y=f(u)$，则有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$；
- 若 $y=f(u), u=g(x)$，则仍有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$.

微分的形式不变性

- 若 $y=f(u)$，则有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$；
- 若 $y=f(u), u=g(x)$，则仍有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$.

例子　$[\sin x]'=\cos x$，但是 $[\sin 2x]'\neq\cos 2x$.

微分的形式不变性

- 若 $y=f(u)$，则有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$；
- 若 $y=f(u), u=g(x)$，则仍有 $\mathrm{d}y=f'(u)\,\mathrm{d}u$.

例子　$[\sin x]'=\cos x$，但是 $[\sin 2x]'\neq\cos 2x$.

$$\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}(\sin 2x)=\cos 2x\,\mathrm{d}(2x).$$

例 4　用微分的形式不变性求微分 dy：

(1) $y = \mathrm{e}^{x+2x^2}$；(2) $y = \sin(2x+3)$；

例 4　用微分的形式不变性求微分 dy：

(1) $y = \mathrm{e}^{x+2x^2}$；(2) $y = \sin(2x+3)$；(3) $y = \dfrac{x^2+2x}{x+1}$.

例 4 用微分的形式不变性求微分 dy：

(1) $y=\mathrm{e}^{x+2x^2}$；(2) $y=\sin(2x+3)$；(3) $y=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$.

练习 2 用微分的形式不变性求微分 dy：

(1) $y=\mathrm{e}^{x^2}\ln x$；

例 4　用微分的形式不变性求微分 dy：

(1) $y=\mathrm{e}^{x+2x^2}$；(2) $y=\sin(2x+3)$；(3) $y=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$.

练习 2　用微分的形式不变性求微分 dy：

(1) $y=\mathrm{e}^{x^2}\ln x$；　　　(2) $y=\dfrac{1}{\cos(2x)}$.

例 5 用微分法求隐函数的导数 y'_x：

(1) $x^2 + y^2 = 1$; (2) $e^{x+y} + xy = 1$.

微分的形式不变性

例 5　用微分法求隐函数的导数 y'_x：

(1) $x^2+y^2=1$;　　　(2) $e^{x+y}+xy=1$.

练习 3　用微分法求 $\sin x+\sin y=xy$ 确定的隐函数的导数 y'_x.

复习与提高

选择 若函数 $y=f(x)$ 有 $f'(x_0)=\frac{1}{2}$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，该函数在 $x=x_0$ 处的微分 $\mathrm{d}y$ 是$\cdots\cdots\cdots$(　　)

(A) 与 Δx 等价的无穷小　(B) 与 Δx 同阶的无穷小

(C) 比 Δx 低阶的无穷小　(D) 比 Δx 高阶的无穷小

函数的微分

复习 1　已知 $y = \mathrm{e}^{2x^2}\cos 3x$，求 $\mathrm{d}y$.