微积分课程

第四章 · 导数的应用

2020 年 8 月 29 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	微分中值定理
A	罗尔定理
B	拉格朗日定理
C	柯西定理

费马引理

费马引理 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，且 $\forall x \in U(x_0)$ 有 $f(x) \leqslant f(x_0)$（或 $f(x) \geqslant f(x_0)$）．如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导．则有 $f'(x_0) = 0$.

罗尔定理

定理 1 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 上可导,

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

罗尔定理

定理 1 如果函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 上可导,

(3) 在端点处 $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$.

事实 1 如果定理的三个条件有一个不满足，则结论可能不成立.

例 1 下列函数只满足罗尔定理的条件 (2) 和 (3)，不满足条件 (1)，因此没有导数为零的点.

$$f(x)=\begin{cases} x, & -1 \le x < 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$$

例 2　下列函数只满足罗尔定理的条件 (1) 和 (3)，不满足条件 (2)，因此没有导数为零的点.

$$f(x) = |x|, -1 \le x \le 1$$

例 2　下列函数只满足罗尔定理的条件 (1) 和 (3)，不满足条件 (2)，因此没有导数为零的点.

$$f(x) = |x|, -1 \le x \le 1$$

例 3　下列函数只满足罗尔定理的条件 (1) 和 (2)，不满足条件 (3)，因此没有导数为零的点.

$$f(x) = x, -1 \le x \le 1$$

例 4　对 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间 $[-1,3]$ 上验证罗尔定理.

例 4　对 $f(x)=x^2-2x-3$ 在区间 $[-1,3]$ 上验证罗尔定理.

练习 1　对 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在区间 $[-2,2]$ 上验证罗尔定理.

例 5　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，而且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$.

第一节	微分中值定理
A	罗尔定理
B	拉格朗日定理
C	柯西定理

拉格朗日定理

定理　如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

例 6　对函数 $f(x) = x^3$ 在区间 $[0, 1]$ 上验证拉格朗日定理.

例 6　对函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $[0,1]$ 上验证拉格朗日定理.

练习 2　对 $f(x)=x^3+x$ 在区间 $[-1,1]$ 上验证拉格朗日定理.

推论 1 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为 0，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

推论 1　如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为 0，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

例 7　证明当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时，有

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

例 8　证明当 $x_2 > x_1$ 时不等式成立：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leqslant x_2 - x_1.$$

例 8　证明当 $x_2 > x_1$ 时不等式成立：

$$\arctan x_2 - \arctan x_1 \leqslant x_2 - x_1.$$

练习 3　证明：当 $x_2 > x_1$ 时有

$$\sin x_2 - \sin x_1 \leqslant x_2 - x_1.$$

第一节 微分中值定理

A	罗尔定理
B	拉格朗日定理
C	柯西定理

柯西定理

定理 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内都可导,

(3) 在开区间 (a,b) 内 $g'(x)\neq 0$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例 9　对函数 $f(x) = x^3$ 和 $g(x) = x^2 + 1$ 在区间 $[1, 2]$ 上验证柯西定理.

复习1 证明：当 $x > 1$ 时，$e^x - e > e(x-1)$.

洛必达法则

在一定条件下，我们有下面的洛必达法则：

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

一、$\frac{0}{0}$ 型的洛必达法则

定理 1 如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$，而且 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在（或为 ∞），则有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

一、$\frac{0}{0}$ 型的洛必达法则

定理 1 如果 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$，$\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$，而且 $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在（或为 ∞），则有

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{x}-1}{x^{2}-x}$.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x^{2}-x}$.

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^{3}}$.

例 2　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$.

例 3　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1}{x^{2}-x}$.

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^{3}}$.

例 5　求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{2}}$.

练习 1　用洛必达法则求函数极限.

$$(1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$$

练习 1　用洛必达法则求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$$

(2) $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

练习 1　用洛必达法则求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

(2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$

两种方法比较

注记 1　对于 $x \to 0$ 时的 $\frac{0}{0}$ 型极限，现在我们有两种方法可以使用：

(1) 等价无穷小量代换

(2) 洛必达法则

一般地，方法 (1) 应该优先使用，因为方法 (2) 可能变得复杂.

两种方法比较

例 6　求函数极限.

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\tan 6x}$$

两种方法比较

例 6　求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 6x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{\arcsin(x^3)}$

两种方法比较

练习 2　求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^3 x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$$

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型的洛必达法则

定理2 如果 $\lim f(x) = \infty$，$\lim g(x) = \infty$，而且 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在（或为 ∞），则有

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型的洛必达法则

定理 2 如果 $\lim f(x)=\infty$，$\lim g(x)=\infty$，而且 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 的极限存在（或为 ∞），则有

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

例 7 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+x+1}{3x^2-x+4}$.

例 8　求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ （$n>0$）

例 8　求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ （$n>0$）

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$

例 8　求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n}$ （$n > 0$）

(2) 求极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3}{e^x}$

例 8　求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$（$n>0$）

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$

练习 3　求函数极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$

例 8 求函数极限.

(1) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}$ （$n>0$）

(2) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$

练习 3 求函数极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln\sin x}{\ln x}$

思考 求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$

注记 2　洛必达法则未必总是有效．例如：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

注记 2　洛必达法则未必总是有效．例如：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

三、$0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式

对于 $0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式，我们可以将它们变换为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，然后使用洛必达法则.

三、$0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式

对于 $0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式，我们可以将它们变换为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，然后使用洛必达法则.

例 9　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

三、$0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式

对于 $0\cdot\infty$ 型和 $\infty-\infty$ 型的未定式，我们可以将它们变换为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式，然后使用洛必达法则.

例 9　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$

练习 4　求函数极限：

(1) $\lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x$　　(2) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

四、1^{∞} 型，0^0 型和 ∞^0 型的未定式

对于 1^{∞} 型，0^0 型和 ∞^0 型的未定式，我们可以将它们变换为 $0\cdot\infty$ 型未定式，进而化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后使用洛必达法则.

四、1^{∞} 型，0^0 型和 ∞^0 型的未定式

对于 1^{∞} 型，0^0 型和 ∞^0 型的未定式，我们可以将它们变换为 $0\cdot\infty$ 型未定式，进而化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，然后使用洛必达法则.

$$\lim u(x)^{v(x)} = \lim \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} = \mathrm{e}^{\lim v(x)\ln u(x)}$$

例 10　求函数极限:

(1)　$\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

例 10　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

例 10　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

(2) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x$

(3) $\lim\limits_{x \to +\infty} (1+\mathrm{e}^x)^{\frac{1}{x}}$

练习 5　求函数极限：

(1) $\lim_{x \to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

练习 5　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(3) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\sin x}$

复习 1　求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2}$

复习 2　求函数极限：

(1) $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{x} \ln x$

(2) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x} \right)$

复习3　求函数极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$.

定理 1　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，那么

(1) 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加.

(2) 如果在 (a,b) 上恒有 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少.

例 1　确定下列函数的单调增减区间.

(1) $f(x) = x^3 - 3x$

例 1　确定下列函数的单调增减区间.

(1) $f(x)=x^3-3x$　　(2) $f(x)=x^3$

练习 1　确定下列函数的单调增减区间.

(1) $y = 3x^2 + 6x + 5$　　(2) $y = x - e^x$

例 2　证明函数 $y = x - \ln(1 + x^2)$ 单调增加.

例 2　证明函数 $y = x - \ln(1+x^2)$ 单调增加.

练习 2　证明函数 $y = \sin x - x$ 单调减少.

例 3　证明当 $x > 0$ 时有不等式 $e^x > 1 + x$.

例 3 证明当 $x > 0$ 时有不等式 $e^x > 1 + x$.

练习 3 证明当 $x > 1$ 时有 $3 - \dfrac{1}{x} < 2\sqrt{x}$.

不等式问题

例 4　证明当 $x > 0$ 时有 $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x$.

复习1 确定函数 $y = 2x^2 - \ln x$ 的单调增减区间.

复习与提高

选择　设在 $[0,1]$ 上 $f''(x) > 0$, 则 $f'(0)$, $f'(1)$, $f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 $\cdots\cdots$(　　)

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1)-f(0)$

(B) $f'(1) > f(1)-f(0) > f'(0)$

(C) $f(1)-f(0) > f'(1) > f'(0)$

(D) $f'(1) > f(0)-f(1) > f'(0)$

第二节 洛必达法则

第三节 函数的增减性

第四节 函数的极值

第五节 函数的最值

第六节 曲线的凹凸性

定义 1　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义.

(1) 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x) < f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.

定义 1　设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义.

(1) 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x) < f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.

(2) 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x) > f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极小值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值.

定义 1 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域有定义.

(1) 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x) < f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极大值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极大值.

(2) 若对 x_0 某个去心邻域的任何 x，总有 $f(x) > f(x_0)$，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个极小值点，$f(x_0)$ 为 $f(x)$ 的一个极小值.

极大值点和极小值点统称为极值点，极大值和极小值统称为极值.

极值的必要条件

定理 1 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

极值的必要条件

定理 1 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

极值的必要条件

定理 1 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：

极值的必要条件

定理 1 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y = x^3$.

极值的必要条件

定理 1 设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

注记 我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y = x^3$.
- 极值点未必都是驻点：

极值的必要条件

定理 1　设 $f(x)$ 在 x_0 点可导，而且 x_0 为极值点，则 $f'(x_0) = 0$.

注记　我们称导数为零的点为驻点.

- 驻点未必都是极值点：比如 $y = x^3$.
- 极值点未必都是驻点：比如 $y = |x|$.

极值的第一判别法

定理 2 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续，而且在它的某个去心邻域内可导.

极值的第一判别法

定理 2 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续，而且在它的某个去心邻域内可导.

(1) 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) > 0$，在右邻域内 $f'(x) < 0$，则 x_0 为极大值点.

极值的第一判别法

定理 2　设 $f(x)$ 在 x_0 点连续，而且在它的某个去心邻域内可导.

(1) 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) > 0$，在右邻域内 $f'(x) < 0$，则 x_0 为极大值点.

(2) 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) < 0$，在右邻域内 $f'(x) > 0$，则 x_0 为极小值点.

极值的第一判别法

定理 2 设 $f(x)$ 在 x_0 点连续，而且在它的某个去心邻域内可导.

(1) 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) > 0$，在右邻域内 $f'(x) < 0$，则 x_0 为极大值点.

(2) 若在 x_0 的左邻域内 $f'(x) < 0$，在右邻域内 $f'(x) > 0$，则 x_0 为极小值点.

(3) 若在 x_0 的左邻域内和右邻域内 $f'(x)$ 的符号不变，则 x_0 不为极值点.

例 1　求函数的单调增减区间和极值.

(1) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$

例 1　求函数的单调增减区间和极值.

(1) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^3$

(2) $f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$

练习 1　求函数的单调增减区间和极值.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

练习 1　求函数的单调增减区间和极值.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

(2) $f(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$

极值的第二判别法

定理 3 设 $f'(x_0)=0$ 而且 $f''(x_0)$ 存在.

(1) 若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.

(2) 若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

极值的第二判别法

定理 3 设 $f'(x_0)=0$ 而且 $f''(x_0)$ 存在.

(1) 若 $f''(x_0)>0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极小值点.

(2) 若 $f''(x_0)<0$，则 x_0 为 $f(x)$ 的极大值点.

注记 1 当 $f''(x_0)=0$ 时，上面的定理无法判定．例如 $f(x)=x^3$ 和 $f(x)=x^4$.

例 2 用极值的第二判别法求 $f(x)=x^3-3x$ 的极值.

例 2　用极值的第二判别法求 $f(x) = x^3 - 3x$ 的极值.

练习 2　用极值的第二判别法求函数的极值:

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x - 5$$

复习1　求函数 $y=(x-3)^2(x-2)$ 的极值.

复习与提高

选择 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在点 a 处……………………………………（　　）

(A) $f(x)$ 的导数存在，且 $f'(a)\neq 0$

(B) $f(x)$ 的导数不存在

(C) $f(x)$ 取得极大值

(D) $f(x)$ 取得极小值

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义．如果有 $x_0 \in I$，使得对所有 $x \in I$ 都有 $f(x) \leqslant f(x_0)$ （或 $f(x) \geqslant f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**（或**最小值**）.

函数最值的求法：闭区间情形

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，而且在除有限个点外都可导．则可按照下面步骤求出函数的最值：

函数最值的求法：闭区间情形

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，而且在除有限个点外都可导．则可按照下面步骤求出函数的最值：

(1) 求出函数所有的驻点，不可导点，和区间端点一起列出来作为最值可疑点．

函数最值的求法：闭区间情形

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，而且在除有限个点外都可导. 则可按照下面步骤求出函数的最值：

(1) 求出函数所有的驻点，不可导点，和区间端点一起列出来作为最值可疑点.

(2) 求出函数在这些点的取值并比较，最大（小）者就为函数的最大（小）值.

例 1　求以下函数在指定区间上的最值.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ 在区间 $[-2, 3]$ 上.

例 1　求以下函数在指定区间上的最值.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ 在区间 $[-2, 3]$ 上.

(2) $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $[-1, 8]$ 上.

例 1　求以下函数在指定区间上的最值.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ 在区间 $[-2, 3]$ 上.

(2) $f(x) = x - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$ 在区间 $[-1, 8]$ 上.

练习 1　求以下函数在指定区间上的最值.

(1) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$ 在区间 $[-2, 3]$ 上.

函数最值的求法：唯一驻点情形

如果函数 $f(x)$ 在区间（开或闭，有限或无限）上可导，而且只有一个驻点 x_0. 则 $f(x_0)$ 为极大值时就是最大值，为极小值时就是最小值.

例 2　将边长为 a 的一块正方形铁皮，四角各截去一个大小相同的小正方形，然后将四边折起做成一个无盖的方盒．问截掉的小正方形的长为多少时，所得方盒的容积最大？

练习2　一房地产公司有 50 套公寓要出租．当月租定为 2000 元时，公寓会全部租出去．当月租每增加 100 元，就会多剩一套公寓租不出去．而租出去的每套公寓每月需要花费 200 元的维修费用．问房租定为多少时可获得最大收入？

复习1　求以下函数在指定区间上的最值.

(1) $f(x)=x^3-3x$ 在区间 $[-2,3]$ 上.

(2) $f(x)=x^2\mathrm{e}^{-x}$ 在区间 $[-2,3]$ 上.

第四节	函数的极值
第五节	函数的最值
第六节	曲线的凹凸性
第七节	函数图形的描绘
第八节	边际与弹性

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义.

(1) 如果对任何 $x \in I$，函数 $f(x)$ 的曲线总位于该点切线的上方，则称曲线 $f(x)$ 在区间 I 上是凹（上凹）的.

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义.

(1) 如果对任何 $x \in I$，函数 $f(x)$ 的曲线总位于该点切线的上方，则称曲线 $f(x)$ 在区间 I 上是凹（上凹）的.

(2) 如果对任何 $x \in I$，函数 $f(x)$ 的曲线总位于该点切线的下方，则称曲线 $f(x)$ 在区间 I 上是凸（下凹）的.

凹凸性的判别法

假设函数 $f(x)$ 在 (a, b) 上有二阶导数，那么

凹凸性的判别法

假设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数，那么

(1) 如果 $x \in (a,b)$ 时，恒有 $f''(x) > 0$，则函数的曲线在 (a,b) 上是凹的.

凹凸性的判别法

假设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上有二阶导数，那么

(1) 如果 $x \in (a,b)$ 时，恒有 $f''(x) > 0$，则函数的曲线在 (a,b) 上是凹的.

(2) 如果 $x \in (a,b)$ 时，恒有 $f''(x) < 0$，则函数的曲线在 (a,b) 上是凸的.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为拐点.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

. . . .

例 1 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 1 (x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow f''(x_0) = 0$.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

. . . .

例 1 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 1 (x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为拐点.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

. . . .

例 1 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 1 (x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow f''(x_0) = 0$.

例 2 求曲线 $y = x^4$ 的凹凸区间和拐点.

定义　曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

性质　在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

. . . .

例 1　求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 1　(x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow f''(x_0) = 0$.

例 2　求曲线 $y = x^4$ 的凹凸区间和拐点.

注记 2　$f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow (x_0, y_0)$ 为拐点.

定义 曲线凹和凸的分界点 (x_0, y_0) 称为**拐点**.

性质 在拐点 (x_0, y_0) 处，要么 $f''(x_0) = 0$，要么 $f''(x_0)$ 不存在.

. . . .

例 1 求曲线 $y = \sqrt[3]{x}$ 的凹凸区间和拐点.

注记 1 (x_0, y_0) 为拐点 $\not\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$.

例 2 求曲线 $y = x^4$ 的凹凸区间和拐点.

注记 2 $f''(x_0) = 0$ $\not\Rightarrow$ (x_0, y_0) 为拐点.

例 3　求曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的凹凸区间和拐点.

例 3　求曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的凹凸区间和拐点.

练习 1　求下列曲线的凹凸区间和拐点.

(1) $y = x^2 - x^3$

例 3　求曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的凹凸区间和拐点.

练习 1　求下列曲线的凹凸区间和拐点.

(1) $y = x^2 - x^3$　　　　(2) $y = e^{-x}$

第四节 函数的极值

第五节 函数的最值

第六节 曲线的凹凸性

第七节 函数图形的描绘

第八节 边际与弹性

定义 1　给定曲线 $y = f(x)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$，称 $y = b$ 为其水平渐近线.

(2) 若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$，称 $x = a$ 为其铅垂渐近线.

定义 1 给定曲线 $y=f(x)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，称 $y=b$ 为其水平渐近线.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，称 $x=a$ 为其铅垂渐近线.

注记 (1) $x\to\infty$ 可以改为 $x\to+\infty$ 或 $x\to-\infty$.

定义 1　给定曲线 $y = f(x)$.

(1) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$，称 $y = b$ 为其水平渐近线.

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$，称 $x = a$ 为其铅垂渐近线.

注记　(1) $x \to \infty$ 可以改为 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$.
(2) $x \to a$ 可以改为 $x \to a^+$ 或 $x \to a^-$.

例 1　求曲线 $y = \dfrac{1}{x-1}$ 的水平和铅垂渐近线.

例 1　求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}$ 的水平和铅垂渐近线.

例 2　求曲线 $y=\dfrac{-x^2+x+1}{x^2}$ 的水平和铅垂渐近线.

练习 1　求曲线的水平和铅垂渐近线.

(1) $y = \dfrac{2x+1}{x+2}$　　(2) $y = \dfrac{2x}{x^2-1}$

定义 2　若直线 $y = kx + b$（$k \neq 0$）满足

$$\lim_{x \to \infty} [f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则称它是曲线 $y = f(x)$ 的一条斜渐近线.

定义 2 若直线 $y = kx + b$（$k \neq 0$）满足

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-(kx+b)] = 0,$$

则称它是曲线 $y = f(x)$ 的一条**斜渐近线**.

定理 1 直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线，当且仅当

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad 而且 \quad \lim_{x\to\infty}[f(x)-kx] = b.$$

定义 2 若直线 $y = kx + b$（$k \neq 0$）满足

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0,$$

则称它是曲线 $y = f(x)$ 的一条**斜渐近线**.

定理 1 直线 $y = kx + b$ 是曲线 $y = f(x)$ 的斜渐近线，当且仅当

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = k \quad 而且 \quad \lim_{x\to\infty}[f(x) - kx] = b.$$

注记 $x \to \infty$ 可以改为 $x \to +\infty$ 或 $x \to -\infty$.

例 3　求曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线.

例 3　求曲线 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的斜渐近线.

练习 2　求曲线 $y=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ 的斜渐近线.

例 4　描绘函数 $y=\dfrac{x^2}{x+1}$ 的曲线.

边际函数

若 $y = f(x)$ 可导，则变化率 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为 $f(x)$ 的边际函数.

边际函数

若 $y=f(x)$ 可导，则变化率 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为 $f(x)$ 的边际函数.

- 总成本函数 $C(Q)$
- 平均成本 $\overline{C}(Q)$
- 边际成本 $C'(Q)$

边际函数

若 $y = f(x)$ 可导，则变化率 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为 $f(x)$ 的边际函数.

- 总成本函数 $C(Q)$
- 平均成本 $\overline{C}(Q)$
- 边际成本 $C'(Q)$
- 总收益函数 $R(Q)$
- 平均收益 $\overline{R}(Q)$
- 边际收益 $R'(Q)$

边际函数

若 $y=f(x)$ 可导，则变化率 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为 $f(x)$ 的边际函数.

- 总成本函数 $C(Q)$
- 平均成本 $\overline{C}(Q)$
- 边际成本 $C'(Q)$
- 总收益函数 $R(Q)$
- 平均收益 $\overline{R}(Q)$
- 边际收益 $R'(Q)$

- 总利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$
- 边际利润 $L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)$

最大利润原则

例 1　设工厂生产某产品 Q 千件的成本是

$$C(Q) = 50 + 2Q,$$

售出该产品 Q 千件的收益是

$$R(Q) = 10Q - \frac{1}{5}Q^2.$$

问产量为多少时利润 $L(Q)$ 最大?

最大利润原则

我们知道利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$，由极值的必要条件和充分条件可知：

最大利润原则

我们知道利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$，由极值的必要条件和充分条件可知：

- $L(Q)$ 取得最大值的必要条件为 $L'(Q)=0$，即
$$R'(Q)=C'(Q).$$
- $L(Q)$ 取得最大值的充分条件为 $L''(Q)<0$，即
$$R''(Q)<C''(Q).$$

弹性函数

若 $y=f(x)$ 可导，则相对变化律

$$\frac{Ey}{Ex}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=y'\frac{x}{y}$$

称为 $f(x)$ 的弹性函数.

弹性函数

若 $y=f(x)$ 可导，则相对变化律

$$\frac{Ey}{Ex}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=y'\frac{x}{y}$$

称为 $f(x)$ 的弹性函数.

例 2　设 $y=x^2+1$，则 $\dfrac{Ey}{Ex}=$

弹性函数

若 $y=f(x)$ 可导，则相对变化律

$$\frac{Ey}{Ex}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=y'\frac{x}{y}$$

称为 $f(x)$ 的弹性函数.

例 2　设 $y=x^2+1$，则 $\dfrac{Ey}{Ex}=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$.