微积分课程

第五章 · 不定积分

2020 年 8 月 29 日

暨南大学数学系 吕荐瑞

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$

一般地，已知函数 $y = f(x)$, 容易求出 $y' = f'(x)$.

反过来，如果已知 $y' = f'(x)$, 如何找出 $y = f(x)$?

- $(?)' = 2x$
- $(?)' = \sin x$

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=e^x$
- $(?)'=\sin x$

一般地，已知函数 $y=f(x)$, 容易求出 $y'=f'(x)$.

反过来，如果已知 $y'=f'(x)$, 如何找出 $y=f(x)$?

- $(?)'=2x$
- $(?)'=\sin x$
- $(?)'=e^x$
- $(?)'=\ln x$

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 如果存在函数 $F(x)$, 使得对于 I 中每一点 x 都满足 $F'(x)=f(x)$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个**原函数**.

定义　设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 如果存在函数 $F(x)$, 使得对于 I 中每一点 x 都满足 $F'(x)=f(x)$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个**原函数**.

注记　函数的原函数不止一个. 例如, $(x^2)' = 2x$, 而且 $(x^2+2)' = 2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

定义　设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数, 如果存在函数 $F(x)$, 使得对于 I 中每一点 x 都满足 $F'(x) = f(x)$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

注记　函数的原函数不止一个. 例如, $(x^2)' = 2x$, 而且 $(x^2+2)' = 2x$, 因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

性质　$f(x)$ 的任何两个原函数一定只差一个常数 C.

定义 设 $f(x)$ 是定义在区间 I 上的函数，如果存在函数 $F(x)$，使得对于 I 中每一点 x 都满足 $F'(x)=f(x)$，则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在 I 上的一个原函数.

注记 函数的原函数不止一个. 例如，$(x^2)'=2x$，而且 $(x^2+2)'=2x$，因此 x^2 和 x^2+2 都是 $2x$ 的原函数.

性质 $f(x)$ 的任何两个原函数一定只差一个常数 C.

事实 连续函数 $f(x)$ 的原函数一定存在（见下一章）.

定义　函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数，称为 $f(x)$ 的**不定积分**，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

定义 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数，称为 $f(x)$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

在上面定义中，我们称 $\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 为积分变量.

定义 函数 $f(x)$ 的带有任意常数项的原函数，称为 $f(x)$ 的**不定积分**，记为

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

在上面定义中，我们称 $\int$ 为积分号，$f(x)$ 为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式，x 为积分变量.

$$\boxed{F'(x) = f(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C}$$

例 1　求函数 $f(x) = 3x^2$ 的不定积分.

例 1　求函数 $f(x)=3x^2$ 的不定积分.

例 2　求函数 $f(x)=\sin x$ 的不定积分.

例 1　求函数 $f(x)=3x^2$ 的不定积分.

例 2　求函数 $f(x)=\sin x$ 的不定积分.

练习 1　求不定积分.

(1) $\int x\,\mathrm{d}x$

(2) $\int x^2\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

例 3　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分.

例 3　求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的不定积分.

例 4　求过点 $(1,3)$, 且其切线斜率为 $2x$ 的曲线方程.

性质 1　导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1 $$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$$

性质 1 导数运算与不定积分运算互为逆运算:

1. $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$
2. $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

性质 1　导数运算与不定积分运算互为逆运算：

1 $\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x)$

2 $\int F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$

类似地，微分运算与不定积分运算互为逆运算：

1 $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x$

2 $\int \mathrm{d}(F(x)) = F(x) + C$

性质 2　非零的常数因子, 可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 2　非零的常数因子，可以移到积分号前面. 即有

$$\int af(x)\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3　两个函数的和/差的积分，等于函数积分的和/差. 即有

$$\int (f(x)\pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

基本积分公式 I

1 $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

基本积分公式 I

1 $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

2 $$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

基本积分公式 I

1 $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

2 $$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

3 $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

例 1　求不定积分

(1) $\int (2x+5x^2+7x^3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int (2-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$

(3) $\int (2x+1)^2\,\mathrm{d}x$

练习 1　求不定积分

(1) $\int(1-2x^2)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

练习 1　求不定积分

(1) $\int (1-2x^2)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)\mathrm{d}x$

(3) $\int \left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$

练习 2　求不定积分

(1) $\int \sqrt{x}(x-3)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{(x+1)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

基本积分公式 II

4 $$\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$$

基本积分公式 II

4 $\displaystyle\int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$

5 $\displaystyle\int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$

例 2　求不定积分：

(1) $\int (4e^x - x^e)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

例 2　求不定积分：

(1) $\int (4e^x - x^e)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{e^{2x}-1}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$

练习 3　求不定积分：

(1) $\int (x^2 + 2^x)\,\mathrm{d}x$

基本积分公式 III

6 $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

基本积分公式 III

6 $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

7 $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

基本积分公式 III

6 $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

7 $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

8 $$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

基本积分公式 III

6 $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

7 $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

8 $$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

9 $$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

例 3　求不定积分

(1) $\int(\sin x + 2\cos x)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \tan^2 x\,\mathrm{d}x$

例 3　求不定积分

(1) $\int (\sin x + 2\cos x)\,dx$

(2) $\int \tan^2 x\,dx$

练习 4　求不定积分

(1) $\int \cot^2 x\,dx$

(2) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x+\sin x}\,dx$

基本积分公式 IV

10 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

基本积分公式 IV

10 $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

11 $$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$$

例 4　求不定积分：

(1) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

例 4　求不定积分：

(1) $\int \frac{x^4}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{1}{x^2(x^2+1)}\,\mathrm{d}x$

练习 5　求不定积分：

(1) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

基本积分公式 I

1 $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

基本积分公式 I

1 $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

2 $$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

基本积分公式 I

1 $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

2 $$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

3 $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

基本积分公式 II

4 $\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$

基本积分公式 II

4 $\displaystyle\int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$

5 $\displaystyle\int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$

基本积分公式 III

6 $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

基本积分公式 III

6 $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

7 $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

基本积分公式 III

6 $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

7 $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

8 $$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

基本积分公式 III

6 $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

7 $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

8 $$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

9 $$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + C$$

基本积分公式 IV

10 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

基本积分公式 IV

10 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$$

11 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \arctan x + C$$

例 5　求不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<0 \\ \mathrm{e}^{x}, & x\geq 0 \end{cases}$$

练习 6　求不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ 2x, & x\geq 1 \end{cases}$$

复习1　求不定积分

(1) $\int(\sin x-2e^{x})\,\mathrm{d}x$

(2) $\int\frac{(2x+3)^{2}}{x}\,\mathrm{d}x$

复习1　求不定积分

(1) $\int(\sin x - 2e^{x})\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{(2x+3)^2}{x}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

复习 2　求不定积分 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & x<1; \\ 2x^2, & x\geq 1. \end{cases}$$

第二节 不定积分的性质

第三节 基本积分公式

第四节 换元积分法

第五节 分部积分法

第六节 有理分式的积分

第四节	换元积分法
A	第一类换元法
B	第二类换元法

第一类换元法引例

例 1　求不定积分 $\int (2x+1)^{10}\,\mathrm{d}x$.

第一类换元法

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x))$$

$$= \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$

例 2　求不定积分

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$

(2) $\int \sin(3x+4)\,\mathrm{d}x$

练习 1　求不定积分

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$

(2) $\int e^{-3x+2}\,\mathrm{d}x$

练习 1　求不定积分

(1) $\int \frac{dx}{(4x+5)^2}$

(2) $\int e^{-3x+2}\,dx$

(3) $\int \sqrt{3x-1}\,dx$

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到.

例 3　求不定积分

(1) $\int x e^{x^2} \, dx$

(2) $\int \frac{e^{1/x}}{x^2} \, dx$

例 3　求不定积分

(1) $\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{\mathrm{e}^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int x\sqrt{x^2-3}\,\mathrm{d}x$

练习 2　求不定积分

(1) $\int x^2(x^3+1)^9\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{x}{x^2+3}\,\mathrm{d}x$

例 4　求不定积分（其中 $a > 0$）：

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2}$$

例 4　求不定积分（其中 $a > 0$）：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2}$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2}$

练习 3　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$（$a > 0$）.

例 4　求不定积分（其中 $a>0$）：

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$$

练习 3　求不定积分：

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0).$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x-2)}.$$

例 5　求不定积分

(1) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

(2) $\int \sin^3 x \, dx$

例 5　求不定积分

(1) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$

(2) $\int \sin^3 x \, dx$

练习 4　求不定积分

(1) $\int \cos^6 x \sin x \, dx$

(2) $\int \cos^5 x \, dx$

例 6　求不定积分 $\int \sin^2 x\,dx$.

例 6　求不定积分 $\int \sin^2 x\,dx$.

练习 5　求不定积分 $\int \cos^2 2x\,dx$.

换元积分法

例 7　求不定积分

(1) $\int \sec^4 x \tan^2 x \, dx$

(2) $\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx$

换元积分法

例 7　求不定积分

(1) $\int \sec^4 x \tan^2 x \, dx$

(2) $\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx$

练习 6　求不定积分

(1) $\int \sec^5 x \tan^5 x \, dx$

(2) $\int \sec^6 x \tan^6 x \, dx$

例 8　求不定积分

(1) $\int \tan x \, dx$

(2) $\int \csc x \, dx$

例 8　求不定积分

(1) $\int \tan x \, dx$

(2) $\int \csc x \, dx$

练习 7　求不定积分

(1) $\int \cot x \, dx$

(2) $\int \sec x \, dx$

第四节	换元积分法
A	第一类换元法
B	第二类换元法

第二类换元法

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(t))\,\mathrm{d}(\phi(t))$$

$$= \left[\int f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\phi^{-1}(x)}$$

例 9　求不定积分

(1) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

例 9　求不定积分

(1) $$\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,dx$$

(2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$$

练习 8　求不定积分

(1) $$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

例 9　求不定积分

(1) $$\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}$$

练习 8　求不定积分

(1) $$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$$

例 10　求不定积分 $\int \frac{1}{e^x + 1} dx$.

例 10　求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1}dx.$

练习 9　求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx.$

第二类换元法

例 11　求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx.$

第二类换元法

例 11　求不定积分 $\int \frac{1}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$.

练习 10　求不定积分 $\int \sqrt{1+e^x}\,dx$.

例 12　求不定积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $a > 0$.

例 12 求不定积分 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$，其中 $a > 0$.

练习 11 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

例 13　求不定积分

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

例 13　求不定积分

(1) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

练习 12　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

三角函数换元总结

1 $\displaystyle\int f(x,\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$,

令 $x=a\sin t,\ \ t\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

三角函数换元总结

1 $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$,

令 $x = a\sin t,\ \ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2 $\int f(x, \sqrt{x^2 + a^2})\,\mathrm{d}x$,

令 $x = a\tan t,\ \ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

三角函数换元总结

1 $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x,$

令 $x = a\sin t,\ \ t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2 $\int f(x, \sqrt{x^2 + a^2})\,\mathrm{d}x,$

令 $x = a\tan t,\ \ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

3 $\int f(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,\mathrm{d}x,$

令 $x = a\sec t,\ \ t \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

用万能公式换元

例 14　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\,\mathrm{d}x.$

用万能公式换元

例 14　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1+\sin x}{\sin x(1+\cos x)}\mathrm{d}x.$

解答　令 $u=\tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$.

积分公式大全

(1) $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

(2) $$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

(3) $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

(4) $$\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

(5) $$\int e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x} + C$$

积分公式大全

(6) $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

(7) $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

(8) $$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

(9) $$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

积分公式大全

(10) $$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

(11) $$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

(12) $$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

(13) $$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

积分公式大全

(14) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

(15) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

(16) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

(17) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

复习1　求不定积分：

(1) $\int (2x+5)^9 \, dx$

(2) $\int \frac{1}{(3x+4)^3} \, dx$

复习 1　求不定积分：

(1) $\int (2x+5)^9 \, dx$

(2) $\int \frac{1}{(3x+4)^3} \, dx$

(3) $\int \cos(5x+3) \, dx$

复习2　求不定积分：

(1) $\int (x+1)e^{x^2+2x}\,dx$

(2) $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx$

复习 2　求不定积分：

(1) $\int (x+1)e^{x^2+2x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

(3) $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}\,\mathrm{d}x$

复习3　求不定积分：

(1) $\int \sin^2(x+1)\,dx$

(2) $\int \sin^2 x \cos^3 x\,dx$

换元积分法

复习4　求不定积分：

(1) $\int \sec^4 x \tan^4 x \, dx$

(2) $\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx$

复习 5　求不定积分：

(1) $$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

复习 5　求不定积分：

(1) $$\int \frac{1}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$$

复习6　求不定积分:

(1) $\int \frac{e^x - 1}{e^x + 1} dx$

(2) $\int \sqrt{e^x - 4}\, dx$

复习 7　求不定积分：

(1) $$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

复习 7　求不定积分：

(1) $$\int \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$

(2) $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$$

换元积分法

复习 8　求不定积分：

(1) $\int x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int x\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$

分部积分公式

$$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$$

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,dx$.

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,dx$.

例 2　求不定积分 $\int xe^{x}\,dx$.

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,dx$.

例 2　求不定积分 $\int xe^x\,dx$.

练习 1　求不定积分:

(1) $\int x\sin x\,dx$

例 1　求不定积分 $\int x\cos x\,dx$.

例 2　求不定积分 $\int xe^{x}\,dx$.

练习 1　求不定积分:

(1) $\int x\sin x\,dx$

(2) $\int xe^{2x}\,dx$

例 3　求不定积分 $\int x^2 \cos x \, dx.$

例 3　求不定积分 $\int x^2 \cos x \, dx$.

例 4　求不定积分 $\int x^2 e^x \, dx$.

例 3　求不定积分 $\int x^2 \cos x \, dx.$

例 4　求不定积分 $\int x^2 e^x \, dx.$

练习 2　求不定积分：

(1) $\int x^2 \sin x \, dx$

例 3　求不定积分 $\int x^2 \cos x \, dx.$

例 4　求不定积分 $\int x^2 e^x \, dx.$

练习 2　求不定积分:

(1) $\int x^2 \sin x \, dx$

(2) $\int x^2 e^{3x} \, dx$

例 5　求不定积分 $\int \ln x \, dx$.

例 5　求不定积分 $\int \ln x \, dx$.

例 6　求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$.

例 5　求不定积分 $\int \ln x \, dx$.

例 6　求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$.

练习 3　求不定积分:

(1) $\int x \ln x \, dx$

例 5 求不定积分 $\int \ln x \, dx$.

例 6 求不定积分 $\int x \arctan x \, dx$.

练习 3 求不定积分：

(1) $\int x \ln x \, dx$

(2) $\int \arcsin x \, dx$

小结：分部积分

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 dv：

- $\int x\, e^x\, dx$
- $\int x \cos x\, dx$
- $\int x \ln x\, dx$
- $\int x \arctan x\, dx$

小结：分部积分

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 dv：

- $\int x e^x dx \quad = \int x d(e^x)$
- $\int x \cos x dx$
- $\int x \ln x dx$
- $\int x \arctan x dx$

小结：分部积分

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \qquad = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
- $\int x\cos x\,\mathrm{d}x \qquad = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$
- $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

小结：分部积分

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 $\mathrm{d}v$：

- $\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$
- $\int x\cos x\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}(\sin x)$
- $\int x\ln x\,\mathrm{d}x = \int \ln x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$

小结：分部积分

分部积分的关键在于选择合适的 u 和 dv：

- $\int x\,e^x\,dx = \int x\,d(e^x)$
- $\int x\cos x\,dx = \int x\,d(\sin x)$
- $\int x\ln x\,dx = \int \ln x\,d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$
- $\int x\arctan x\,dx = \int \arctan x\,d\left(\frac{1}{2}x^2\right)$

例 7　求不定积分 $\int e^{x}\sin x\,dx$.

例 7　求不定积分 $\int e^x \sin x \, dx$.

练习 4　求不定积分 $\int e^{2x} \cos x \, dx$

分部积分法

例 8　求不定积分 $\int \sec^3 x \, dx$.

复习1　求不定积分：

(1) $\int x^2 e^{-x} \, dx$

复习1　求不定积分:

(1) $\int x^2 e^{-x}\, dx$

(2) $\int x \cos 3x\, dx$

复习 2　求不定积分：

(1) $\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$

复习 2　求不定积分：

(1) $\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$

(2) $\int \arctan x \, \mathrm{d}x$

复习3　求不定积分 $\int e^x \sin 2x \, dx$.

定义 1　如果 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为**有理分式**.

定义 1　如果 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理分式.

- 如果 $P(x)$ 次数 $<$ $Q(x)$ 次数，则称它为真分式；
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geqslant$ $Q(x)$ 次数，则称它为假分式.

定义 1 如果 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是多项式，则称 $f(x)$ 为有理分式.

- 如果 $P(x)$ 次数 $<$ $Q(x)$ 次数，则称它为真分式;
- 如果 $P(x)$ 次数 $\geqslant$ $Q(x)$ 次数，则称它为假分式.

定理 1 假分式 = 多项式 + 真分式

情形 1：分母为一次多项式

例 1　求不定积分：

$$(1)\ \int \frac{2x+3}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$(2)\ \int \frac{x^2+1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$(3)\ \int \frac{x^3+2x^2+4}{x+1}\,\mathrm{d}x$$

练习 1　求不定积分：

(1) $\displaystyle\int \frac{x^2+3x+7}{x+1}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^3+2x+4}{x-1}\,\mathrm{d}x$

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 x^2+px+q，其判别式为 $\Delta=p^2-4q$，此时

1. 若 $\Delta>0$，则 $x^2+px+q=(x+a)(x+b)$；
2. 若 $\Delta=0$，则 $x^2+px+q=(x+a)^2$；
3. 若 $\Delta<0$，则 x^2+px+q 是不可约的.

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 x^2+px+q，其判别式为 $\Delta=p^2-4q$，此时

1. 若 $\Delta>0$，则 $x^2+px+q=(x+a)(x+b)$；
2. 若 $\Delta=0$，则 $x^2+px+q=(x+a)^2$；
3. 若 $\Delta<0$，则 x^2+px+q 是不可约的.

定义 称一个多项式是不可约的，如果它不能表示为两个非常数多项式的乘积.

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 $x^2 + px + q$，判别式为 $\Delta = p^2 - 4q$.

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 x^2+px+q，判别式为 $\Delta=p^2-4q$.

1 若 $\Delta>0$，则 $\dfrac{rx+s}{x^2+px+q}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}$；

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 x^2+px+q，判别式为 $\Delta=p^2-4q$.

1 若 $\Delta>0$，则 $\dfrac{rx+s}{x^2+px+q}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}$;

2 若 $\Delta=0$，则 $\dfrac{rx+s}{x^2+px+q}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{(x+a)^2}$;

情形 2：分母为二次多项式

若分母等于 x^2+px+q，判别式为 $\Delta=p^2-4q$.

1 若 $\Delta>0$，则 $\dfrac{rx+s}{x^2+px+q}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{x+b}$；

2 若 $\Delta=0$，则 $\dfrac{rx+s}{x^2+px+q}=\dfrac{A}{x+a}+\dfrac{B}{(x+a)^2}$；

3 若 $\Delta<0$，则

$$\frac{rx+s}{x^2+px+q}=\frac{A(2x+p)}{x^2+px+q}+\frac{B}{x^2+px+q}.$$

例 2　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{2x-1}{x^2-5x+6}\,\mathrm{d}x$

例 3　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{2x+3}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$

练习 2　求不定积分 $\int \frac{x+3}{x^2+5x+4}\mathrm{d}x$

练习 2　求不定积分 $\int \frac{x+3}{x^2+5x+4}\mathrm{d}x$

练习 3　求不定积分 $\int \frac{3x+2}{x^2-4x+4}\mathrm{d}x$

例 4　求不定积分 $\int \frac{4x+3}{x^2+2x+5} \mathrm{d}x$

练习 4　求不定积分 $\int \frac{x+3}{x^2+4x+7}\mathrm{d}x$

情形 3：分母为一般多项式

定理 2　设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x) = Q_1(x)^{m_1} Q_2(x)^{m_2} \cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

情形 3：分母为一般多项式

定理 2 设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x)=Q_1(x)^{m_1}Q_2(x)^{m_2}\cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

定理 3 假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}}\cdots+\frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

情形 3：分母为一般多项式

定理 2　设多项式 $Q(x)$ 不为常数，则有因式分解

$$Q(x)=Q_1(x)^{m_1}Q_2(x)^{m_2}\cdots Q_k(x)^{m_k},$$

其中各个 $Q_i(x)$ 是一次多项式或二次不可约多项式.

定理 3　假定上面任何两个 $Q_i(x)$ 都无公因式，则有

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)^{m_1}}+\frac{P_2(x)}{Q_2(x)^{m_2}}\cdots+\frac{P_k(x)}{Q_k(x)^{m_k}}.$$

若等式左边为真分式，等式右边也可以都取为真分式.

分母为三次多项式

例 5　求不定积分 $\int \frac{x^2 - x + 2}{(x+1)^3} \mathrm{d}x.$

分母为三次多项式

例 5　求不定积分 $\int \frac{x^2 - x + 2}{(x+1)^3} \mathrm{d}x.$

例 6　求不定积分 $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x^2+1)} \mathrm{d}x.$

分母为三次多项式

例 5　求不定积分 $\int \frac{x^2 - x + 2}{(x+1)^3} dx.$

例 6　求不定积分 $\int \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)(x^2+1)} dx.$

练习 5　求不定积分 $\int \frac{2x + 10}{(x+1)(x^2+2x+5)} dx.$

分母为四次多项式

例 7　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$

复习 1 求不定积分 $\int \frac{x+7}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x.$

复习 1　求不定积分 $\int \frac{x+7}{x^2+2x-3}\mathrm{d}x$.

复习 2　求不定积分 $\int \frac{4x+7}{x^2-2x+1}\mathrm{d}x$.

复习 1　求不定积分 $\int \frac{x+7}{x^2+2x-3}\,\mathrm{d}x.$

复习 2　求不定积分 $\int \frac{4x+7}{x^2-2x+1}\,\mathrm{d}x.$

复习 3　求不定积分 $\int \frac{x^3+x^2}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$

有理分式的积分

复习 4　求不定积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$.

有理分式的积分

复习 5　求不定积分 $\int \frac{dx}{x(x^{10}+1)}$.

初等函数的不定积分

注记　初等函数的原函数未必都是初等函数．可以认为这些函数的不定积分是“积不出来的”，比如

$$\int e^{x^2}\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \sqrt{1+x^4}\,dx.$$