微积分课程

第六章 · 定积分

2020 年 8 月 29 日

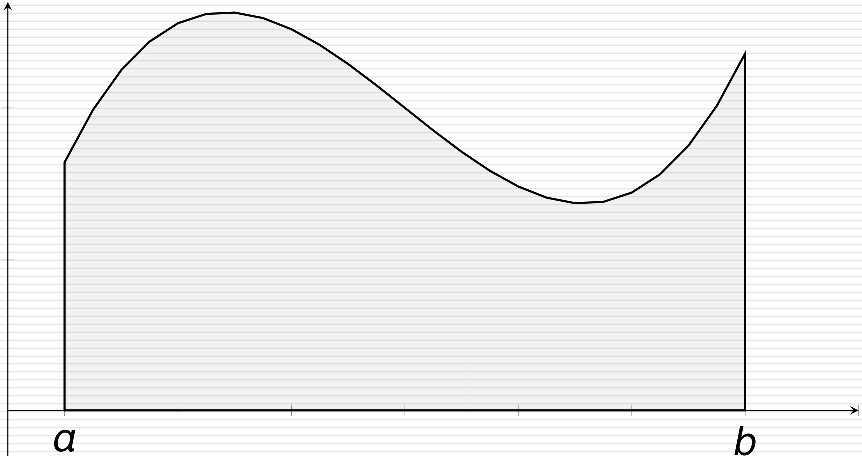
■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	定积分的概念
第二节	定积分的性质
第三节	微积分基本公式
第四节	定积分的换元积分法
第五节	定积分的分部积分法

曲边梯形的面积

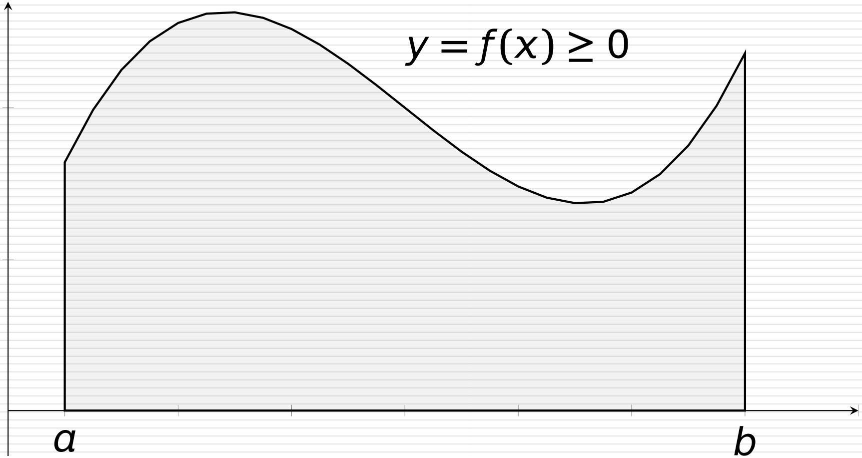
引例　计算由抛物线 $y = x^2$, 直线 $x = 1$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

曲边梯形的面积



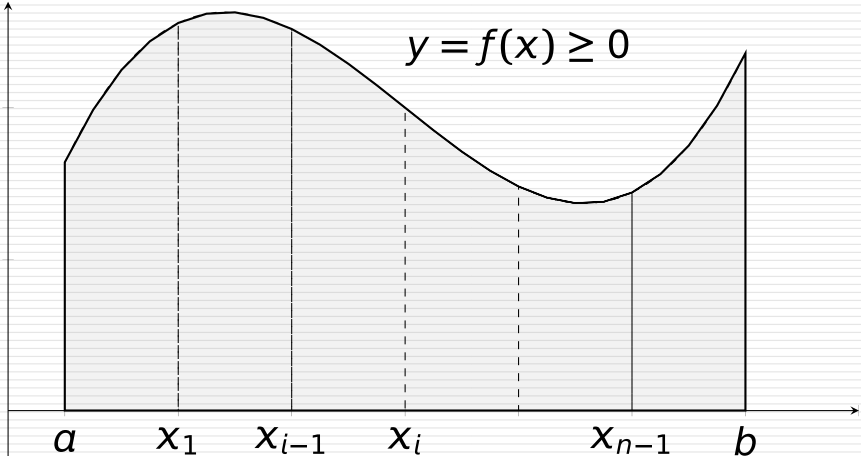
$S =$

曲边梯形的面积



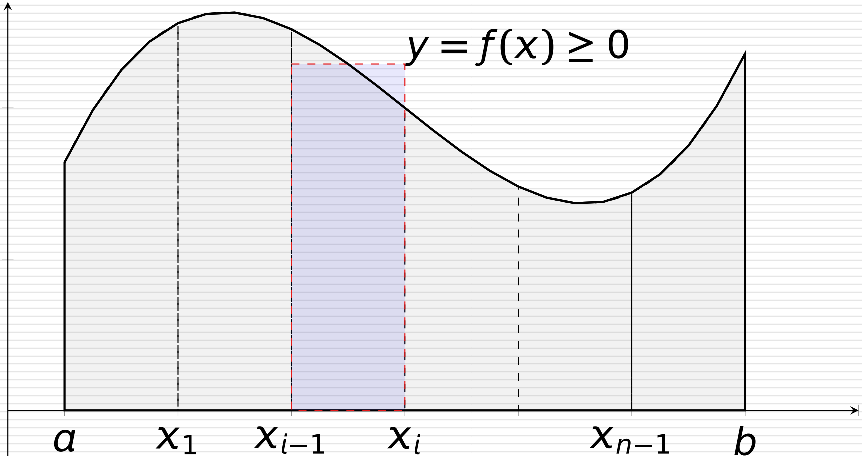
$S =$

曲边梯形的面积



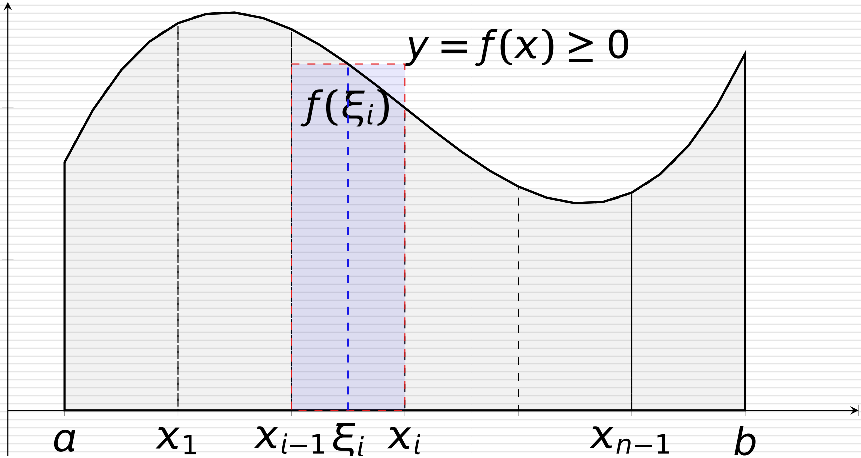
$$S = \sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



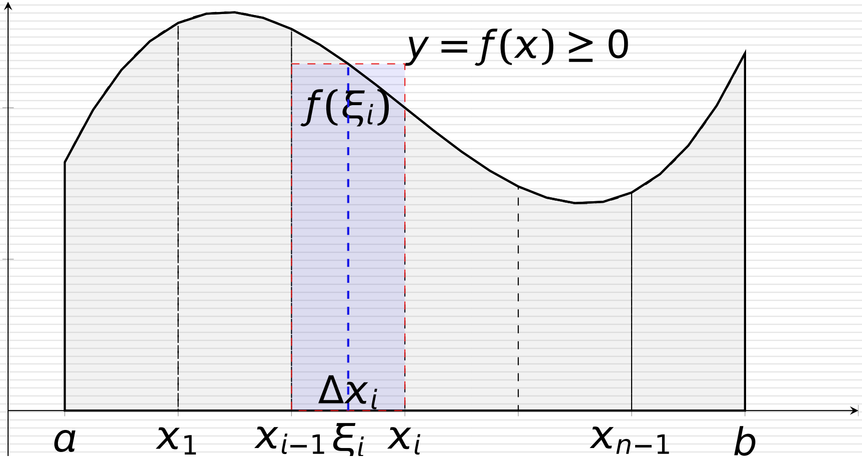
$$S = \sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



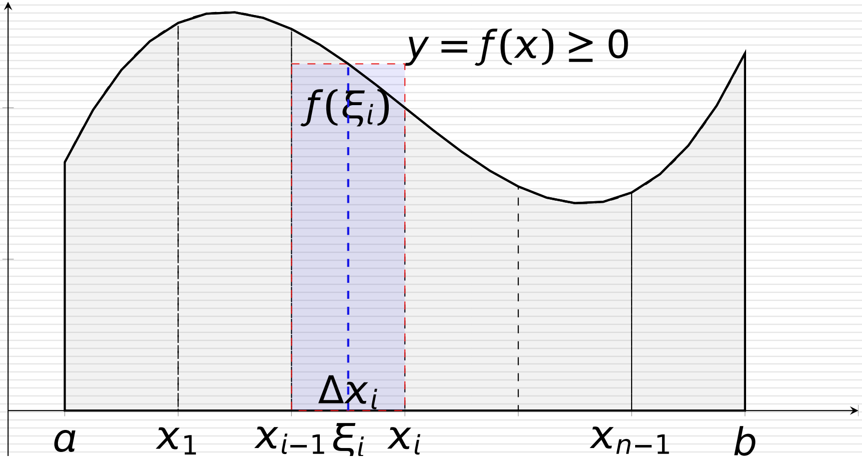
$$S = \sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



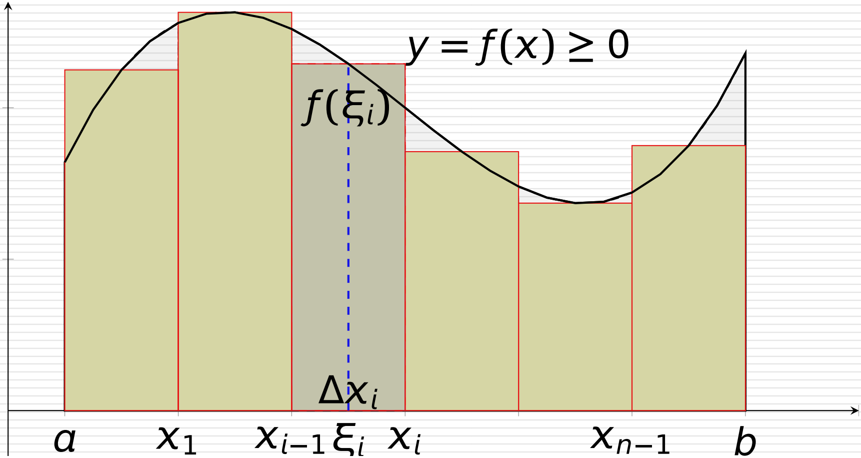
$$S = \sum_i \Delta S_i$$

曲边梯形的面积



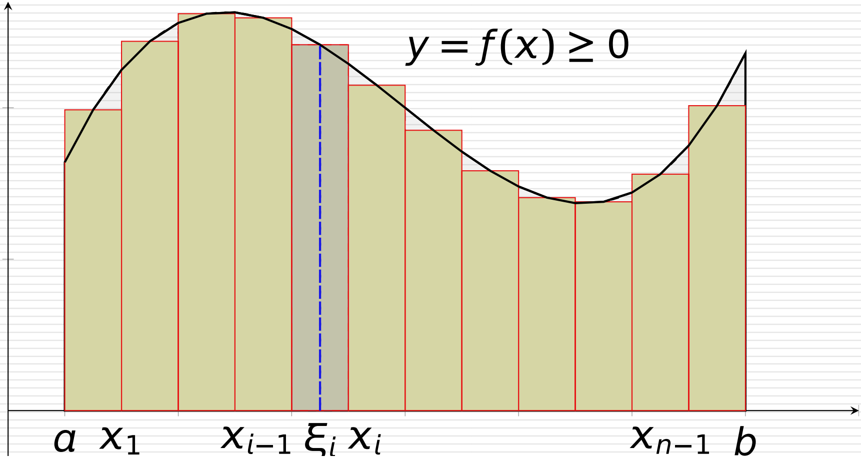
$$S=\sum_i \Delta S_i \qquad f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积



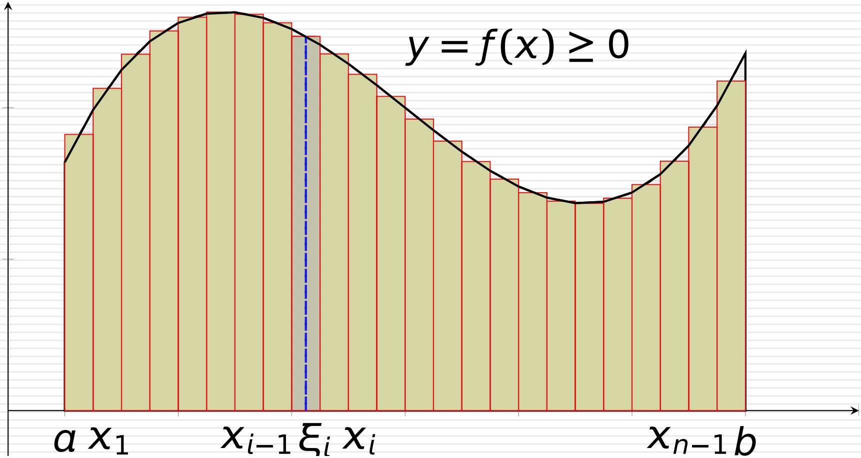
$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积



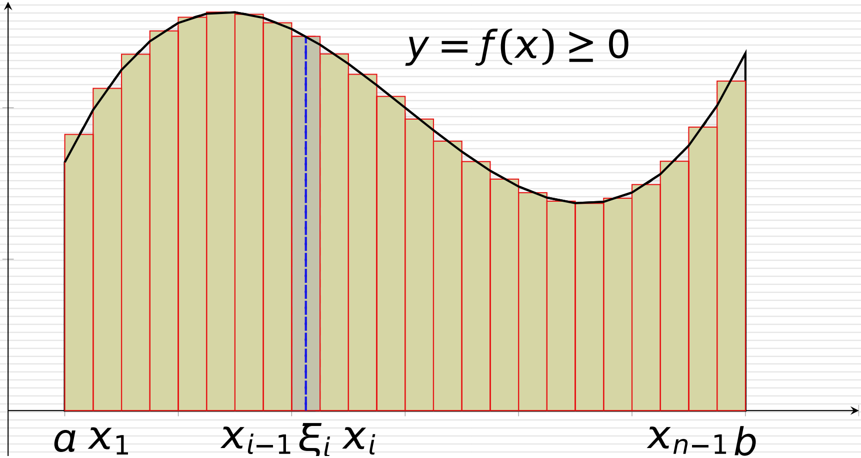
$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i) \Delta x_i$$

曲边梯形的面积



$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积



$$S = \sum_i \Delta S_i \approx \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_i f(\xi_i)\Delta x_i$$

曲边梯形的面积

例 1　计算由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

曲边梯形的面积

例 1　计算由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

1 将区间 $[a,b]$ 任意分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$, 各段的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

曲边梯形的面积

例 1　计算由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

1 将区间 $[a,b]$ 任意分为 n 段 $[x_{i-1}, x_i]$, 各段的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

2 在每小段区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意选取一点 ξ_i，得到面积的近似值为 $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

曲边梯形的面积

例 1　计算由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积 S.

1 将区间 $[a,b]$ 任意分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$, 各段的长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

2 在每小段区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任意选取一点 ξ_i，得到面积的近似值为 $S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

3 令 $\Delta x = \max_i\{\Delta x_i\}$, 则当 $\Delta x \to 0$ 时就得到面积的实际值为 $S = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$.

变速直线运动的位移

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

变速直线运动的位移

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

1 将时间段 $[a,b]$ 任意分为 n 段 $[t_{i-1}, t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

变速直线运动的位移

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

1 将时间段 $[a, b]$ 任意分为 n 段 $[t_{i-1}, t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

2 在每小段区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任意选取一点 ξ_i，得到位移的近似值为 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

变速直线运动的位移

例 2　设物体以速度 $v = v(t)$ 沿直线运动，求在时间段 $a \le t \le b$ 内的位移 s.

1 将时间段 $[a, b]$ 任意分为 n 段 $[t_{i-1}, t_i]$, 各段的长度为 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $1 \le i \le n$.

2 在每小段区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上任意选取一点 ξ_i，得到位移的近似值为 $s \approx \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

3 令 $\Delta t = \max_i\{\Delta t_i\}$, 则当 $\Delta t \to 0$ 时就得到位移的实际值为 $s = \lim_{\Delta t \to 0} \sum_{i=1}^{n} v(\xi_i)\Delta t_i$.

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间任意分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间任意分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$．在每段 $[x_{i-1},x_i]$ 上任意选取点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间任意分为 n 段 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 在每段 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意选取点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\Delta x = \max_i\{\Delta x_i\}$，如果 $\Delta x \to 0$ 时近似和的极限存在，

定义　设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间任意分为 n 段 $[x_{i-1},x_i]$ $(i = 1,2,\cdots,n)$，其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 在每段 $[x_{i-1},x_i]$ 上任意选取点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\Delta x = \max_i\{\Delta x_i\}$，如果 $\Delta x \to 0$ 时近似和的极限存在，我们就称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是可积的，并将这个极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，

定义 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，用点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ 将区间任意分为 n 段 $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，其长度分别为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. 在每段 $[x_{i-1}, x_i]$ 上任意选取点 ξ_i，得到近似和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

记 $\Delta x = \max_i\{\Delta x_i\}$，如果 $\Delta x \to 0$ 时近似和的极限存在，我们就称 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是可积的，并将这个极限值称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分，记为

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

定积分

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

定积分

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中：

定积分

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中：

- x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式

定积分

我们已经定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中：

- x 称为积分变量，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)\,\mathrm{d}x$ 称为被积表达式
- a 称为积分下限，b 称为积分上限，$[a,b]$ 称为积分区间

注记 1　定积分的值只与被积函数 f 和积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么字母无关．即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

注记 1　定积分的值只与被积函数 f 和积分区间 $[a,b]$ 有关，而与积分变量用什么字母无关．即有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$$

注记 2　如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上是连续函数（或者是只有有限个间断点的有界函数），则它在 $[a,b]$ 上是可积的.

注记 3　如果 $a > b$，我们规定

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

注记 3 如果 $a > b$，我们规定

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

特别地，如果 $a = b$，我们可以得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

注记 4　设由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 S

- 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S.$$

注记 4　设由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$, 和 x 轴所围成的曲边梯形的面积为 S

- 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = S.$$

- 如果在 $[a, b]$ 上 $f(x) \leq 0$，则定积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -S.$$

第一节 定积分的概念
第二节 定积分的性质
第三节 微积分基本公式
第四节 定积分的换元积分法
第五节 定积分的分部积分法

性质 1　设 k 为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 1　设 k 为常数，则有

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 2 (函数可加性)

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3 (区间可加性) 设 $a < c < b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

性质 3 (区间可加性)　设 $a < c < b$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

注记 1　即使 c 不在 a 和 b 之间，上述性质依然是成立的.

性质 4

$$\int_a^b 1\,\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{d}x = b - a$$

性质 5　设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

性质 5　设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\geq 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

性质 5　设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq g(x)$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

特别地，如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x) \geq 0$，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

推论　$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$

例 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 和 $\int_0^1 x^2\,dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

例 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 和 $\int_0^1 x^2\,dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

练习 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_1^2 x\,dx$ 和 $\int_1^2 x^2\,dx$

例 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_0^1 x\,dx$ 和 $\int_0^1 x^2\,dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$

练习 1　比较下面各组积分的大小.

(1) $\int_1^2 x\,dx$ 和 $\int_1^2 x^2\,dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx$

性质 6　如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则有

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

性质 6 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值和最小值分别为 M 和 m，则有

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

例 2 估计下面的积分值：

$$\int_0^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$$

性质 7 (积分中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

性质 7 (积分中值定理)　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

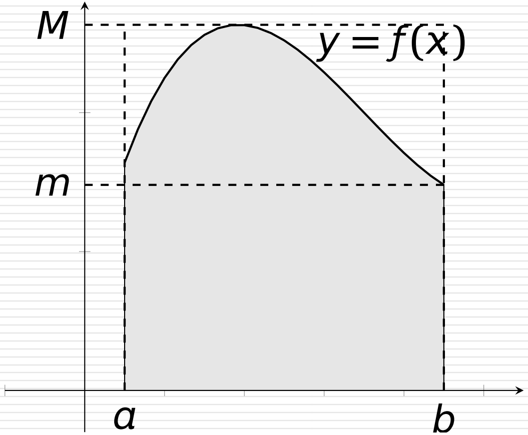
注记 2　上述性质也是说，存在 $\xi \in [a,b]$，使得

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)$$

说明连续函数在区间 $[a,b]$ 上的平均值是可以取到的.

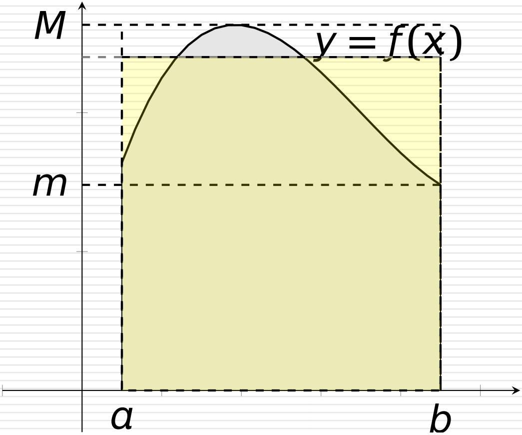
积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



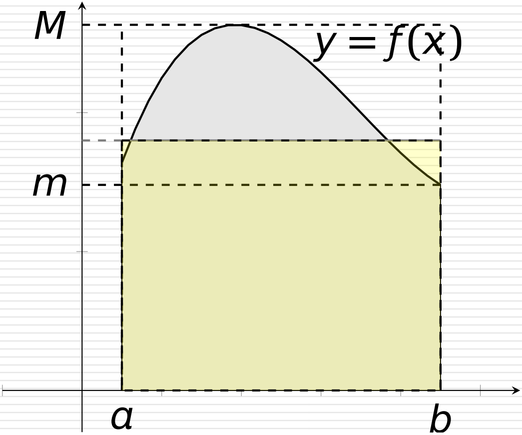
积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



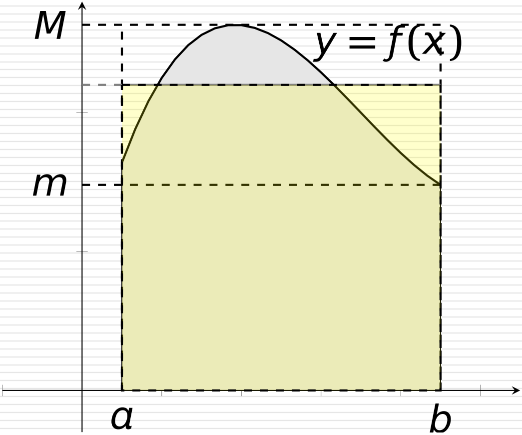
积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



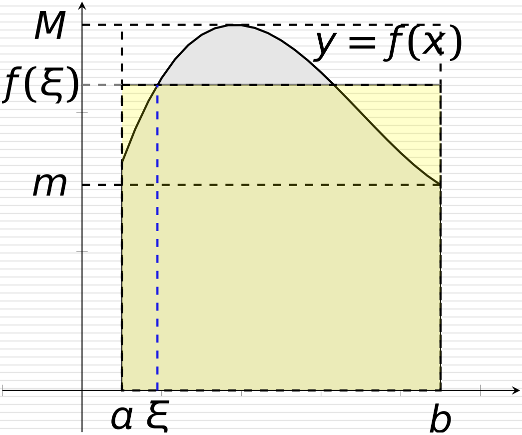
积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



积分中值定理

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则在 $[a,b]$ 中至少存在一点 ξ，使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.



定积分的保号性

题 1 设在 $[a,b]$ 上 $f(x)$ 连续，$f(x) \geqslant 0$，且 $f(x)$ 不恒为零，证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x > 0.$$

第一节	定积分的概念
第二节	定积分的性质
第三节	微积分基本公式
第四节	定积分的换元积分法
第五节	定积分的分部积分法

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $p(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$x \in [a,b]$，称为变上限积分.

定义 1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $p(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$x\in[a,b]$，称为变上限积分.

定理 1

$$p'(x)=\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)'=f(x)$$

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，令 $p(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$，$x \in [a,b]$，称为变上限积分.

定理 1

$$p'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$$

注记 1　上述定理说明，对于闭区间上的连续函数，它的原函数总是存在的.

微积分基本公式

定理 2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

若记 $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$，则上式又可表示为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

微积分基本公式

定理2　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

若记 $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$，则上式又可表示为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$$

它称为微积分基本公式或牛顿—莱布尼茨公式.

例 1　求下列定积分.

(1) $\int_0^1 x^2 \, dx$

(2) $\int_2^4 \frac{dx}{x}$

(3) $\int_{-1}^3 |2-2x| \, dx$

练习 1　求下列定积分.

(1) $\int_0^1 e^x \, \mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, \mathrm{d}x$

(3) $\int_{-1}^{2} |2x| \, \mathrm{d}x$

定理 3 对于更一般的变限积分，我们有下面求导公式：

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x)$$

特别地，我们有

$$\left(\int_{a}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = f(x)$$

$$\left(\int_{x}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t\right)' = -f(x)$$

例 2　求下列变限积分的导数.

(1) $\int_0^x e^{2t}\,\mathrm{d}t$

(2) $\int_x^{-1} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$

(3) $\int_x^{x^2} \sin t\,\mathrm{d}t$

例 2　求下列变限积分的导数.

(1) $\int_0^x e^{2t}\,dt$

(2) $\int_x^{-1} \cos^2 t\,dt$

(3) $\int_x^{x^2} \sin t\,dt$

练习 2　求下列变限积分的导数.

(1) $\int_0^{x^2} \arctan t\,dt$

(2) $\int_{\cos x}^0 t^2\,dt$

例 2　求下列变限积分的导数.

(1) $\int_0^x e^{2t}\,\mathrm{d}t$

(2) $\int_x^{-1} \cos^2 t\,\mathrm{d}t$

(3) $\int_x^{x^2} \sin t\,\mathrm{d}t$

练习 2　求下列变限积分的导数.

(1) $\int_0^{x^2} \arctan t\,\mathrm{d}t$

(2) $\int_{\cos x}^{0} t^2\,\mathrm{d}t$

(3) $\int_{\ln x}^{e^x} t^3\,\mathrm{d}t$

例 3　求函数极限.

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x} e^t \,\mathrm{d}t}{x}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x} (e^t-1) \,\mathrm{d}t}{x^2}$$

例 3　求函数极限.

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x} e^t\,\mathrm{d}t}{x}$$

$$(2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x} (e^t-1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

练习 3　求函数极限.

$$(1)\quad \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x} \cos^2 t\,\mathrm{d}t}{x}$$

例 3　求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin x} e^t \,\mathrm{d}t}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x} (e^t-1)\,\mathrm{d}t}{x^2}$

练习 3　求函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x} \cos^2 t\,\mathrm{d}t}{x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_x^{0} \arctan t\,\mathrm{d}t}{x^2}$

例 4　求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)\,\mathrm{d}t$ 的极值.

例 4　求函数 $f(x)=\int_0^x (t-1)\,\mathrm{d}t$ 的极值.

练习 4　求函数 $f(x)=\int_0^x t(t-4)\,\mathrm{d}t$ 的极值.

分段函数的定积分

例 5　求 k 的值，使得 $\int_k^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{40}{3}$，其中

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leqslant 2; \\ x^2+1, & x > 2. \end{cases}$$

复习 1　求下列定积分.

(1) $\int_2^3 (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_1^8 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$

复习1　求下列定积分.

(1) $\int_2^3 (x^2-1)\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_1^8 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$

(3) $\int_0^{\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x$

复习 2　求下列变限积分的导数.

(1) $\int_{1}^{x^2} \mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$

(2) $\int_{\cos x}^{e^x} t^2\,\mathrm{d}t$

复习 3　求函数极限.

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \ln(1+t)\,\mathrm{d}t}{x^2}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^t\,\mathrm{d}t}{1-\cos x}$$

复习 4　求函数 $f(x)=\int_x^0 (t^2-1)\,\mathrm{d}t$ 的极值.

积分中值定理

注记　积分中值定理的“$\xi \in [a,b]$”可以改进为“$\xi \in (a,b)$”.

积分中值定理

注记 积分中值定理的 "$\xi \in [a,b]$" 可以改进为 "$\xi \in (a,b)$".

定理 (积分中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

积分中值定理

注记 积分中值定理的 “$\xi \in [a,b]$” 可以改进为 “$\xi \in (a,b)$”.

定理 (积分中值定理) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

证明 利用微积分基本公式和微分中值定理.

积分中值定理

例 6　设 $f(x)$ 在 $[0,\infty]$ 上连续且 $f(x)>0$. 证明

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}$$

在 $(0,\infty)$ 上是单调递增的.

定积分与极限

题 1　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x.$

定积分与极限

题 2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)$.

定积分与极限

题 2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$.

解答　原式 $= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+i/n}\cdot\frac{1}{n}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln 2.$$

定积分与极限

题 2　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right).$

解答　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{1+i/n}\cdot\dfrac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln 2.$$

思考　求数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right).$

定积分不等式

题 3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调递增，证明

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

定积分不等式

题 3 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且单调递增，证明

$$\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

解答 令 $L(t)=\int_a^t xf(x)\,\mathrm{d}x-\frac{a+t}{2}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$，求导.

定积分不等式

题 4　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明

$$\int_0^1 f^2(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$$

定积分不等式

题 5 设连续函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减．试证明对于任何 $q\in[0,1]$，都有不等式

$$\int_0^q f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant q\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

复习与提高

选择 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x g(x)f(t)\,\mathrm{d}t\right)$ 等于 . . . . ( )

(A) $g(x)f(x)$

(B) $g'(x)f'(x)$

(C) $g'(x)f(x)+g(x)f'(x)$

(D) $g(x)f(x)+g'(x)\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

复习与提高

选择　假设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，则必有 $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (　　)

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

第二节	定积分的性质
第三节	微积分基本公式
第四节	定积分的换元积分法
第五节	定积分的分部积分法
第六节	定积分的应用

定积分的换元法

设 $f(x)$ 连续，$x=\phi(t)$ 有连续导数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

其中，当 $x=a$ 时，$t=\alpha$；当 $x=b$ 时，$t=\beta$.

例 1　求下列定积分.

(1) $\int_{-1}^{2} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_{0}^{8} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}$

例 1　求下列定积分.

(1) $\int_{-1}^{2} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_{0}^{8} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt[3]{x}}$

练习 1　求下列定积分.

(1) $\int_{0}^{1} \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}$

(2) $\int_{0}^{4} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$

例 2　求定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

例 2　求定积分 $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

练习 2　求定积分 $\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

定积分的换元法

练习 3　求定积分 $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \mathrm{d}x$.

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

……………………………………………………

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

……………………………………………………

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t=-x$）

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

....

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t=-x$）

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t$$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

………………………………………………………

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t=-x$）

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t=-x$）

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

从而 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$

定理 (1) 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

(2) 若 $f(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

证明 (1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$

而 $\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{a}^{0} f(-t)\,\mathrm{d}t$（令 $t=-x$）

$$= -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x$$

从而 $\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$

对称性与定积分

例 3　求下列定积分:

(1) $\int_{-1}^{1} x^3 \, \mathrm{d}x$

(2) $\int_{-1}^{1} (x+1)^3 \, \mathrm{d}x$

对称性与定积分

例 3　求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1} x^3\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_{-1}^{1} (x+1)^3\,\mathrm{d}x$

例 4　证明 $\int_{0}^{2\pi} \sin^3 x\,\mathrm{d}x = 0.$

对称性与定积分

练习 4　求下列定积分：

(1) $\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2 \mathrm{d}x$；

(2) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1+\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

换元积分法

复习 1　求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$

(2) $$\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$$

换元积分法

复习 1　求下列定积分：

(1) $\int_0^1 x(x^2+1)^3\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$

复习 2　求定积分 $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

第三节	微积分基本公式
第四节	定积分的换元积分法
第五节	定积分的分部积分法
第六节	定积分的应用
第七节	广义积分和 Γ 函数

定积分的分部积分公式

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

例 1　求下列定积分.

(1) $\int_1^5 \ln x \, dx$

(2) $\int_0^1 x e^x \, dx$

练习 1　求下列定积分.

(1) $\int_0^1 \arctan x \, dx$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x \, dx$

练习 2　求定积分 $\int_0^4 e^{\sqrt{x}} dx$.

定积分的分部积分法

例 2　求 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ 的递归公式，并求出 I_n.

定积分的分部积分法

例 2　求 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx$ 的递归公式，并求出 I_n.

例 3　设 $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin t}{t} \, dt$，求 $\int_0^1 x f(x) \, dx$.

复习1　求下列定积分：

(1) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$;

(2) $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

复习 1　求下列定积分:

(1) $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$;

(2) $\int_1^2 x\ln x\,dx$.

复习 2　求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x\,dx$.

定积分的分部积分法

例 4　已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续的二阶导数，而且 $f(0)=1$，$f(2)=3$，$f'(2)=5$. 求 $\int_0^1 xf''(2x)\,\mathrm{d}x$.

第三节	微积分基本公式
第四节	定积分的换元积分法
第五节	定积分的分部积分法
第六节	定积分的应用
第七节	广义积分和 Γ 函数

第六节	定积分的应用
A	平面图形的面积
B	旋转体的体积
C	经济应用问题

平面图形的面积

由曲线 $y = f(x)$, x 轴，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x)| \, dx$$

平面图形的面积

由曲线 $y=f(x)$, x 轴，直线 $x=a$ 以及直线 $x=b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

由曲线 $x=f(y)$, y 轴，直线 $y=a$ 以及直线 $y=b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S=\int_a^b |f(y)|\,\mathrm{d}y$$

计算面积的步骤

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

2 确定积分区间

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

2 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

2 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到

3 确定被积函数

计算面积的步骤

1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到
3. 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到

计算面积的步骤

1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到
3. 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到
4. 计算积分结果

例 1 求由直线 $y = x + 1$, x 轴, $x = -2$ 和 $x = 2$ 所围成的图形的面积.

例 1　求由直线 $y = x + 1$, x 轴, $x = -2$ 和 $x = 2$ 所围成的图形的面积.

练习 1　求由曲线 $y = 1 - x^2$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

平面图形的面积

由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的图形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

平面图形的面积

由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的图形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

由曲线 $x = f(y)$, $x = g(y)$，直线 $y = a$ 以及直线 $y = b$ 所围成的图形的面积为

$$S = \int_a^b |f(y) - g(y)| \, \mathrm{d}y$$

平面图形的面积

例 2　求由抛物线 $y^2 = x$ 和直线 $x = 4$ 所围成的图形的面积.

平面图形的面积

例 2　求由抛物线 $y^2 = x$ 和直线 $x = 4$ 所围成的图形的面积.

练习 2　求由抛物线 $y^2 = x$ 和 $y^2 = 2 - x$ 所围成的图形的面积.

例 3 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积.

第六节	定积分的应用
A	平面图形的面积
B	旋转体的体积
C	经济应用问题

旋转体的体积

由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \, \mathrm{d}x$$

旋转体的体积

由曲线 $y = f(x)$，直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_x = \int_a^b \pi y^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x$$

旋转体的体积

由曲线 $x = f(y)$，直线 $y = c$, $y = d$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

旋转体的体积

由曲线 $x = f(y)$，直线 $y = c$, $y = d$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y = \int_c^d \pi x^2 \, \mathrm{d}y$$

旋转体的体积

由曲线 $x = f(y)$，直线 $y = c$, $y = d$ 及 y 轴所围成的平面图形，绕 y 轴旋转而成的旋转体的体积是

$$V_y = \int_c^d \pi x^2 \, \mathrm{d}y = \pi \int_c^d [f(y)]^2 \, \mathrm{d}y$$

旋转体的体积

例 4　求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

旋转体的体积

例 4　求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

例 5　求由 $y=x$, $x=a$, 及 x 轴所成的平面图形, 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

旋转体的体积

例 4　求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

例 5　求由 $y=x$，$x=a$，及 x 轴所成的平面图形，绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积.

思考　若将这个例子改为绕 y 轴旋转，如何求所得旋转体的体积？

练习 3 求由曲线 $y = \sqrt{x}$，直线 $x = 1, x = 4$ 以及 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

第六节	定积分的应用
A	平面图形的面积
B	旋转体的体积
C	经济应用问题

经济应用问题举例

- 总成本函数 $C(x)$
- 边际成本函数 $C'(x)$
- 平均成本函数 $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$

经济应用问题举例

- 总成本函数 $C(x)$
- 边际成本函数 $C'(x)$
- 平均成本函数 $\overline{C}(x)=\frac{C(x)}{x}$
- $C(x)=C(0)+\int_0^x C'(t)\,\mathrm{d}t$

经济应用问题举例

- 总成本函数 $C(x)$
- 边际成本函数 $C'(x)$
- 平均成本函数 $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$
- $C(x) = C(0) + \int_0^x C'(t)\,\mathrm{d}t$

例 6 已知固定成本为 20 万元，边际成本函数为 $C'(x) = 0.4x + 2$. 求总成本函数.

经济应用问题举例

- 总收益函数 $R(x)$
- 边际收益函数 $R'(x)$
- 平均收益函数 $\overline{R}(x) = \frac{R(x)}{x}$

经济应用问题举例

- 总收益函数 $R(x)$
- 边际收益函数 $R'(x)$
- 平均收益函数 $\overline{R}(x) = \frac{R(x)}{x}$
- $R(x) = \int_0^x R'(t)\,\mathrm{d}t$

经济应用问题举例

- 总收益函数 $R(x)$
- 边际收益函数 $R'(x)$
- 平均收益函数 $\overline{R}(x)=\frac{R(x)}{x}$
- $R(x)=\int_0^x R'(t)\,\mathrm{d}t$

例 7　已知边际收益函数为 $R'(x)=200-\frac{x}{50}$. 求总收益函数和平均收益函数.

复习 1　(1) 求由曲线 $y = -x^2 + x + 2$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

复习1　(1) 求由曲线 $y=-x^2+x+2$ 与 x 轴所围成的图形的面积.

(2) 求由 $y=x^3$ 和 $y=\sqrt[3]{x}$ 所围成的图形的面积.

复习2　求由曲线 $y=-x^2+1$ 与 x 轴所围成的平面图形，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积.

第三节 微积分基本公式

第四节 定积分的换元积分法

第五节 定积分的分部积分法

第六节 定积分的应用

第七节 广义积分和 Γ 函数

广义积分

广义积分有两种类型：

广义积分

广义积分有两种类型：

1 无限区间上的积分

广义积分

广义积分有两种类型：

1. 无限区间上的积分
2. 对无界函数的积分

广义积分

广义积分有两种类型：

1 无限区间上的积分

2 对无界函数的积分

第七节	广义积分和Γ函数
A	无限区间上的积分
B	无界函数的积分
C	Γ函数

无限区间上的积分 1

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

无限区间上的积分 1

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - F(a)$$

- 如果极限存在，则称广义积分收敛；
- 如果极限不存在，则称广义积分发散.

例 1　求广义积分

(1) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \mathrm{d}x$

例 1　求广义积分

(1) $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$

练习1　求广义积分

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

练习 1　求广义积分

(1) $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$

(2) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

无限区间上的积分 2

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

$$= F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

无限区间上的积分 2

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_{-\infty}^{b} = F(b) - F(-\infty)$$

$$= F(b) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

- 如果极限存在，则称广义积分收敛；
- 如果极限不存在，则称广义积分发散.

无限区间上的积分 3

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

无限区间上的积分 3

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

- 如果两个极限都存在，则称广义积分收敛；
- 如果其中一个极限不存在，则称广义积分发散.

无限区间上的积分 3

设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$. 则有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{-\infty}^{+\infty} = F(+\infty) - F(-\infty)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} F(x) - \lim_{x\to-\infty} F(x)$$

- 如果两个极限都存在，则称广义积分收敛；
- 如果其中一个极限不存在，则称广义积分发散.

例 2　广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x$ 发散.

例 3　求广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

第七节	广义积分和 Γ 函数
A	无限区间上的积分
B	无界函数的积分
C	Γ 函数

无界函数的积分

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续且有原函数 $F(x)$，而在趋于点 a 时无界．则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+)$$

无界函数的积分

设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上连续且有原函数 $F(x)$，而在趋于点 a 时无界. 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_{a^+}^{b} = F(b) - F(a^+)$$

设 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续且有原函数 $F(x)$，而在趋于点 b 时无界. 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \big[F(x)\big]_{a}^{b^-} = F(b^-) - F(a)$$

例 4　求广义积分

(1) $\int_0^1 \ln x \, dx$

例 4　求广义积分

(1) $\int_0^1 \ln x \, \mathrm{d}x$

(2) $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$

例 4　求广义积分

(1) $\int_0^1 \ln x \, dx$

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$

练习 2　求广义积分 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

无界函数的积分

设 $f(x)$ 仅在点 $c \in (a,b)$ 处无界. 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \big[F(x)\big]_a^{c^-} + \big[F(x)\big]_{c^+}^b$$

$$= F(c^-) - F(a) + F(b) - F(c^+)$$

$$= F(b) - F(a) + {\color{red}F(c^-) - F(c^+)}$$

无界函数的积分

例 5　研究广义积分 $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$.

第七节	广义积分和 Γ 函数
A	无限区间上的积分
B	无界函数的积分
C	Γ 函数

Γ 函数

定义 1　$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x\ (r>0)$ 为 Γ 函数.

Γ 函数

定义 1 $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} \, \mathrm{d}x \ (r > 0)$ 为 Γ 函数.

性质 1 Γ 函数有如下公式

1 $\Gamma(1) = 1$

Γ 函数

定义 1 $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x \ (r>0)$ 为 Γ 函数.

性质 1 Γ 函数有如下公式

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$

Γ 函数

定义 1 $\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x \; (r > 0)$ 为 Γ 函数.

性质 1 Γ 函数有如下公式

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r) \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$

Γ 函数

定义 1　$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x\ (r > 0)$ 为 Γ 函数.

性质 1　Γ 函数有如下公式

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r) \Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Γ 函数

定义 1　$\Gamma(r)=\int_0^{+\infty} x^{r-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x\ (r>0)$ 为 Γ 函数.

性质 1　Γ 函数有如下公式

1. $\Gamma(1)=1$
2. $\Gamma(r+1)=r\Gamma(r) \Rightarrow \Gamma(n+1)=n!$
3. $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$

定义 2　对任何实数 $x>-1$，定义其阶乘为

$$x!=\Gamma(x+1).$$

例 6

(1) 求 $\Gamma(4)$

例 6

(1) 求 $\Gamma(4)$

(2) 求 $\Gamma(\frac{5}{2})$

例 6

(1) 求 $\Gamma(4)$

(2) 求 $\Gamma(\frac{5}{2})$

练习 3 求 $\dfrac{\Gamma(7)}{\Gamma(\frac{7}{2})}$

例 7　求下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

例 7　求下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\, \mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-\lambda x}\, \mathrm{d}x$（$\lambda > 0$）

例 7　求下列积分：

(1) $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(2) $\int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$（$\lambda > 0$）

练习 4　求 $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-2x^2}\,\mathrm{d}x$

广义积分

复习2　求下列积分

(1) $$\int_{2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^2}$$

(2) $$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

复习 3　求 $\dfrac{\Gamma(7)}{\Gamma(4)\Gamma(\frac{3}{2})}$.

复习 3　求 $\dfrac{\Gamma(7)}{\Gamma(4)\Gamma(\frac{3}{2})}$.

复习 4　求 $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-4x^2}\,\mathrm{d}x$.