微积分课程

第七章 · 无穷级数

2020 年 8 月 29 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$
- $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$
- $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$

无穷级数

- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$
- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$
- $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$
- $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$
- $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots$

无穷级数

- $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=2$$
- $$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty$$
- $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$
- $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2$$
- $$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

无穷级数

定义 1　给定数列：$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数），记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，

无穷级数

定义 1　给定数列：$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，式子

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

称为无穷级数（简称级数），记为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，其中第 n 项

称为级数的通项.

级数的敛散性

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和,

级数的敛散性

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

级数的敛散性

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

级数的敛散性

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

- 如果 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
    - 此时称 S 为级数的和，

级数的敛散性

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

- 如果 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
  - 此时称 S 为级数的和，
  - 称 $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数的余项；

级数的敛散性

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 n 项的和 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ 称为第 n 次部分和，各个部分和 $S_1, S_2, \cdots, S_n, \cdots$ 构成一个数列.

- 如果 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；
  - 此时称 S 为级数的和，
  - 称 $R_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数的余项；
- 如果 $\lim_{n\to\infty} S_n$ 发散，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例 1　讨论几何级数（或称等比级数）

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

的敛散性，其中 $a \neq 0$，而 q 称为级数的公比.

例 2　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

例 2　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的敛散性.

例 3　讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots) = 1 + \frac{1}{2} S$$

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$$\therefore \ S = 2$$

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$\therefore\ S = 2$ 即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$

无穷级数的运算：化正为负

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots)=1+\frac{1}{2}S$$

$\therefore\ S=2$ 即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$ ✓

无穷级数的运算：化正为负

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots\right)=1+\frac{1}{2}S$$

$\therefore\ S=2$ 即 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=2$ ✓

$$T=1+2+4+8+\cdots=1+(2+4+8+\cdots)$$

$$=1+2\cdot(1+2+4+\cdots)=1+2T$$

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$\therefore\ S = 2$　即　$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$　✓

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + (2 + 4 + 8 + \cdots)$$

$$= 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + \cdots) = 1 + 2T$$

$\therefore\ T = -1$

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2} S$$

$\therefore\ S = 2$ 即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$ ✓

………………………………

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + (2 + 4 + 8 + \cdots)$$

$$= 1 + 2 \cdot (1 + 2 + 4 + \cdots) = 1 + 2T$$

$\therefore\ T = -1$ 即 $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$

无穷级数的运算：化正为负

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\cdot\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = 1 + \frac{1}{2}S$$

$\therefore\ S = 2$ 即 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$ ✓

$$T = 1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = 1 + (2 + 4 + 8 + \cdots)$$

$$= 1 + 2\cdot(1 + 2 + 4 + \cdots) = 1 + 2T$$

$\therefore\ T = -1$ 即 $1 + 2 + 4 + 8 + \cdots = -1$ ✗

性质 1　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

性质 2　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a u_n$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

性质 2 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} au_n$ 也收敛，而且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} au_n = a\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

推论 级数的每一项同乘以不为 0 的常数后，其敛散性不变.

例 1 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}+\frac{2}{5^n}$ 的和.

例 1　求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} + \frac{2}{5^n}$ 的和.

例 2　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 3\ln\frac{n+1}{n}$ 的敛散性.

性质 3　在一个级数前面加上（或者去掉）有限项，级数的敛散性不变.

性质 3 在一个级数前面加上（或者去掉）有限项，级数的敛散性不变.

例 3 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的第 n 次部分和 $S_n = \frac{n}{2n-1}$，判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{n+2}$ 的敛散性．若级数收敛，求出它的和.

无穷级数的运算：无中生有

$$
\begin{aligned}
0 &= 0+0+0+\cdots \\
&= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\
&= 1-1+1-1+1-1+\cdots \\
&= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \\
&= 1+0+0+0+\cdots \\
&= 1
\end{aligned}
$$

无穷级数的运算：无中生有

$$
\begin{aligned}
0 &= 0+0+0+\cdots \\
&= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots \\
&= 1-1+1-1+1-1+\cdots \\
&= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\cdots \\
&= 1+0+0+0+\cdots \\
&= 1
\end{aligned}
$$

✗

性质 4 (收敛级数的结合律) 如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

性质 4 (收敛级数的结合律) 如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

例 4 已知几何级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

性质 4 (收敛级数的结合律) 如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

例 4 已知几何级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

加括号后得到的新级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)+\cdots$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+\cdots$$

性质 4 (收敛级数的结合律) 如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

例 4 已知几何级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

加括号后得到的新级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)+\cdots$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+\cdots=\frac{3/2}{1-1/4}=2.$$

性质 4 (收敛级数的结合律) 如果一个级数收敛，加括号后所成的级数也收敛，且与原级数有相同的和.

例 4 已知几何级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots=\frac{1}{1-1/2}=2.$$

加括号后得到的新级数

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)+\cdots$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{3}{8}+\frac{3}{32}+\cdots=\frac{3/2}{1-1/4}=2.$$

注记 1 发散级数加括号后，可能发散也可能收敛.

收敛的必要条件

定理 1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

收敛的必要条件

定理 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

……………………………………………………

注记 2 若通项不趋于零，则级数一定发散.

收敛的必要条件

定理 1 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

....

注记 2 若通项不趋于零，则级数一定发散.

例 5 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 1，因此它发散.

收敛的必要条件

定理 1 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

注记 2 若通项不趋于零，则级数一定发散.

例 5 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 1，因此它发散.

注记 3 若通项趋于零，则级数未必收敛.

收敛的必要条件

定理 1　如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

注记 2　若通项不趋于零，则级数一定发散.

例 5　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 1，因此它发散.

注记 3　若通项趋于零，则级数未必收敛.

例 6　级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$ 的通项趋于 0，但是它发散.

练习1　判断级数的敛散性. 如果级数收敛，求出它的和.

(1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{7}{8}+\cdots+\frac{2n-1}{2n}+\cdots$

(2) $(\frac{3}{2}+\frac{1}{3})+(\frac{3}{4}+\frac{1}{9})+(\frac{3}{8}+\frac{1}{27})+\cdots$

定义 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geqslant 0$（对所有 n），则称它为**正项级数**.

定义 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geqslant 0$（对所有 n），则称它为**正项级数**.

性质 正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列.

定义 1 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geqslant 0$（对所有 n），则称它为**正项级数**.

性质 正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列.

定理 1 正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的部分和数列有界.

定义 1　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件 $u_n \geqslant 0$（对所有 n），则称它为正项级数.

性质　正项级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调递增数列.

定理 1　正项级数收敛 $\Longleftrightarrow$ 它的部分和数列有界.

注记　正项级数加括号后，其敛散性不变.

第三节	正项级数
A	比较判别法
B	比值判别法
C	根值判别法

定理2 (比较判别法) 对于两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$，若有 $c > 0$ 使得 $u_n \leqslant cv_n$，对所有 n，则有

1. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；
2. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

比较判别法

例 1　调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

比较判别法

例 1　调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散.

例 2　判断 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

比较判别法

例 1　调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散.

例 2　判断 p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

例 3　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$ 的敛散性.

定理 3 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都为正项级数，且有 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l.$

1 若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散；

定理 3 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都为正项级数，且有 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l.$

1 若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散；

2 若 $l = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；

定理 3 (比较判别法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都为正项级数，且有 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = l$.

1. 若 $0 < l < +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同敛散；
2. 若 $l = 0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛；
3. 若 $l = +\infty$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也发散.

比较判别法

例 4　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 的敛散性.

比较判别法

例 4　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 的敛散性.

例 5　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^2+n}}$ 的敛散性.

比较判别法

例 4　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 的敛散性.

例 5　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n^2+n}}$ 的敛散性.

例 6　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^3-3}}$ 的敛散性.

比较判别法

例 4　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ 的敛散性.

例 5　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2+n}}$ 的敛散性.

例 6　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n^3-3}}$ 的敛散性.

例 7　判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$ 的敛散性.

比较判别法

练习 1　判断级数的敛散性.

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-2}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$

第三节	正项级数
A	比较判别法
B	比值判别法
C	根值判别法

定理 4 (比值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$ 则有

1 若 $l < 1$，则级数收敛；

定理4 (比值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$ 则有

1. 若 $l<1$，则级数收敛；
2. 若 $l>1$，则级数发散；

定理4 (比值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$$ 则有

1. 若 $l < 1$，则级数收敛；
2. 若 $l > 1$，则级数发散；
3. 若 $l = 1$，则级数可能收敛也可能发散.

比值判别法

例 8　设 $x > 0$，判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的敛散性.

比值判别法

例 8　设 $x > 0$，判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的敛散性.

例 9　判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ 的敛散性.

第三节	正项级数
A	比较判别法
B	比值判别法
C	根值判别法

定理5 (根值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则有

1 若 $\rho < 1$，则级数收敛；

定理5 (根值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则有

1. 若 $\rho < 1$，则级数收敛；
2. 若 $\rho > 1$，则级数发散；

定理5 (根值判别法) 如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$，则有

1. 若 $\rho < 1$，则级数收敛；
2. 若 $\rho > 1$，则级数发散；
3. 若 $\rho = 1$，则级数可能收敛也可能发散.

根值判别法

例 10 设 $a > 0$，判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{na}{n+1}\right)^n$ 的敛散性.

练习 2　判定级数的敛散性：

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(n+1)}$$

$$(2)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(\arctan n)^n}$$

交错级数

定义 1　正负项相间的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$，即

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots + u_{2k-1} - u_{2k} + \cdots,$$

其中每个 $u_n > 0$，称为交错级数.

交错级数

定理 1 (莱布尼兹定理)　如果交错级数满足条件

1. $u_{n+1} \leqslant u_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$；
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$；

则级数收敛，且其和 $S \leqslant u_1$，余项满足 $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

交错级数

定理 1 (莱布尼兹定理) 如果交错级数满足条件

1. $u_{n+1} \leqslant u_n$，$n = 1, 2, 3, \cdots$；
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$；

则级数收敛，且其和 $S \leqslant u_1$，余项满足 $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

例 1 交错级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛.

任意项级数

定理 2 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

任意项级数

定理 2 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定义 2 对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，

任意项级数

定理 2 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 也收敛.

定义 2 对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，

1. 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散；

任意项级数

定理 2 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

定义 2 对任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，

1. 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散；
2. 称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 都收敛.

任意项级数

定理 3 对于任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$，则有

1. 当 $l < 1$ 时级数绝对收敛；
2. 当 $l > 1$ 时级数发散.

任意项级数

例 2　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{n^n}$；

任意项级数

例 2　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

任意项级数

例 2　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!}{n^n}$;　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

例 2　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$;　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;　　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$.

任意项级数

练习 1　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}$;

任意项级数

练习 1　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{2n-1}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$;

任意项级数

练习 1　判定级数是发散的，还是条件收敛的，还是绝对收敛的：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n}{2n-1}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{2n-1}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n\cdot 2^{n}}$.

第三节	正项级数
第四节	任意项级数
第五节	幂级数
第六节	泰勒公式和泰勒级数
第七节	初等函数的幂级数展开式

定义 1 形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的级数，即

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

称为 $x-x_0$ 的幂级数.

定义 1　形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的级数，即

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

称为 $x-x_0$ 的幂级数.

特别地，当 $x_0=0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，即

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

称为 x 的幂级数.

幂级数的收敛域

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

- 若 $x = x_0$ 时级数收敛，称 x_0 为幂级数的收敛点；

幂级数的收敛域

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

- 若 $x = x_0$ 时级数收敛，称 x_0 为幂级数的收敛点;
- 若 $x = x_0$ 时级数发散，称 x_0 为幂级数的发散点.

幂级数的收敛域

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,

- 若 $x = x_0$ 时级数收敛，称 x_0 为幂级数的收敛点;
- 若 $x = x_0$ 时级数发散，称 x_0 为幂级数的发散点.

幂级数的全体收敛点构成的集合称为幂级数的收敛域.

定理 1 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

定理 1　对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；

定理 1 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1. 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；
2. 当 $|x| > 1/\rho$ 时，级数发散；

定理 1 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1. 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；
2. 当 $|x| > 1/\rho$ 时，级数发散；
3. 当 $|x| = 1/\rho$ 时，级数的敛散性未定.

定理 1　对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1. 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；
2. 当 $|x| > 1/\rho$ 时，级数发散；
3. 当 $|x| = 1/\rho$ 时，级数的敛散性未定.

定理 1 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1. 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；
2. 当 $|x| > 1/\rho$ 时，级数发散；
3. 当 $|x| = 1/\rho$ 时，级数的敛散性未定.

定义 称 $R = 1/\rho$ 为幂级数的收敛半径，称 $(-R, R)$ 为幂级数的收敛区间.

定理 1 对幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，则

1. 当 $|x| < 1/\rho$ 时，级数绝对收敛；
2. 当 $|x| > 1/\rho$ 时，级数发散；
3. 当 $|x| = 1/\rho$ 时，级数的敛散性未定.

定义 称 $R = 1/\rho$ 为幂级数的收敛半径，称 $(-R,R)$ 为幂级数的收敛区间.

注记 当 $\rho = 0$ 时，规定 $R = +\infty$；当 $\rho = +\infty$ 时，规定 $R = 0$.

幂级数的收敛域

问题　给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答　首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能

幂级数的收敛域

问题　给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答　首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能
   - $(-R, R)$

幂级数的收敛域

问题　给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答　首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能
   - $(-R, R)$
   - $[-R, R)$

幂级数的收敛域

问题　给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答　首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能
   - $(-R, R)$
   - $(-R, R]$
   - $[-R, R)$

幂级数的收敛域

问题 给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答 首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能

- $(-R, R)$
- $(-R, R]$
- $[-R, R)$
- $[-R, R]$

幂级数的收敛域

问题　给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答　首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能
   - $(-R, R)$
   - $(-R, R]$
   - $[-R, R)$
   - $[-R, R]$
2. 若 $R = 0$，则收敛域为 $\{0\}$；

幂级数的收敛域

问题 给定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，求出它的收敛域.

解答 首先求出收敛半径 R；

1. 若 $0 < R < +\infty$，则收敛域有四种可能
   - $(-R, R)$
   - $(-R, R]$
   - $[-R, R)$
   - $[-R, R]$
2. 若 $R = 0$，则收敛域为 $\{0\}$；
3. 若 $R = +\infty$，则收敛域为 $(-\infty, +\infty)$.

幂级数的收敛域

例 1　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ 的收敛域.

幂级数的收敛域

例 1　求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ 的收敛域.

例 2　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^n$ 的收敛域.

幂级数的收敛域

例 1　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ 的收敛域.

例 2　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^n$ 的收敛域.

例 3　求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛域.

幂级数的收敛域

例 4　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛域.

幂级数的收敛域

例 4 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛域.

解答 令 $t = 2x + 1$.

幂级数的收敛域

例 4　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛域.

解答　令 $t = 2x + 1$.

例 5　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ 的收敛域.

幂级数的收敛域

例 4　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n}$ 的收敛域.

解答　令 $t = 2x + 1$.

例 5　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n x^{2n}}{n}$ 的收敛域.

解答　令 $t = x^2$ 或者令 $t = 3x^2$.

幂级数的收敛域

练习 1　求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n-1)(2n)}$ 的收敛域.

幂级数的运算

定理 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，$R = \min\{R_1, R_2\}$，则有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \pm \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n,$$

其中等式在 $(-R, R)$ 中成立.

幂级数的运算

定理 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，$R = \min\{R_1, R_2\}$，则有

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

其中 $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$，等式在 $(-R, R)$ 中成立.

幂级数的运算

定理 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，$R=\min\{R_1,R_2\}$，则有

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\Big)\Big/\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\Big)=\sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n,$$

其中等式在 $(-R,R)$ 的某个子区间内成立.

性质 1　幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上连续.

性质 1　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上连续.

性质 2　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域上可积，且有逐项积分公式

$$\int_0^x S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

逐项积分后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

性质 3 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R,R)$ 上可导，且有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)'$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

逐项求导后得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径.

例 6 对几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 逐项求导和逐项积分.

例 6 对几何级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 逐项求导和逐项积分.

练习 2 求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$ 的和.

定理 1 (泰勒公式) 如果函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶的连续导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)$ 可按 $x-x_0$ 的方幂展开为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

定理 1 (泰勒公式) 如果函数 $f(x)$ 在包含 x_0 的区间 (a,b) 内有直到 $n+1$ 阶的连续导数，则当 $x\in(a,b)$ 时，$f(x)$ 可按 $x-x_0$ 的方幂展开为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x),$$

其中余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$\xi$ 介于 x_0 和 x 之间.

泰勒公式

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

泰勒公式

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 介于 0 和 x 之间.

泰勒公式

当 $x_0 = 0$ 时，泰勒公式称为麦克劳林公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 介于 0 和 x 之间.

令 $\xi = \theta x$，则 $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$, $0 < \theta < 1$.

例 1　证明常数 e 是无理数.

例 1　证明常数 e 是无理数.

证明　假设 $e = \dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n \geqslant 2$.

例 1 证明常数 e 是无理数.

证明 假设 $e=\dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n\geqslant 2$．在 e^x 的泰勒公式中令 $x=1$，得到（$0<\theta<1$）

$$\frac{m}{n}=e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

例 1 证明常数 e 是无理数.

证明 假设 $e=\dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n \geqslant 2$. 在 e^x 的泰勒公式中令 $x=1$，得到（$0<\theta<1$）

$$\frac{m}{n}=e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

两边同时乘以 $n!$，得到

$$\frac{m\cdot n!}{n}=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{e^{\theta}}{n+1}$$

例 1　证明常数 e 是无理数.

证明　假设 $e=\dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n\geqslant 2$. 在 e^x 的泰勒公式中令 $x=1$，得到（$0<\theta<1$）

$$\frac{m}{n}=e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

两边同时乘以 $n!$，得到

$$\frac{m\cdot n!}{n}=n!+n!+\frac{n!}{2!}+\frac{n!}{3!}+\cdots+\frac{n!}{n!}+\frac{e^{\theta}}{n+1}$$

由于 $0<e^{\theta}<3$,

例 1 证明常数 e 是无理数.

证明 假设 $e = \dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n \geqslant 2$. 在 e^x 的泰勒公式中令 $x = 1$，得到（$0 < \theta < 1$）

$$\frac{m}{n} = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!}$$

两边同时乘以 $n!$，得到

$$\frac{m \cdot n!}{n} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{e^{\theta}}{n+1}$$

由于 $0 < e^{\theta} < 3$，所以最后一项为分数，但是其他各项都为整数.

例 1 证明常数 e 是无理数.

证明 假设 $e = \dfrac{m}{n}$ 为有理数，其中 $n \geqslant 2$. 在 e^x 的泰勒公式中令 $x = 1$，得到（$0 < \theta < 1$）

$$\frac{m}{n} = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

两边同时乘以 $n!$，得到

$$\frac{m \cdot n!}{n} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + \frac{n!}{3!} + \cdots + \frac{n!}{n!} + \frac{e^\theta}{n+1}$$

由于 $0 < e^\theta < 3$，所以最后一项为分数，但是其他各项都为整数. 矛盾.

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内各阶导数都存在，而且当 $n\to\infty$ 时 $R_n(x)\to 0$，则得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的泰勒级数.

如果 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内各阶导数都存在，而且当 $n\to\infty$ 时 $R_n(x)\to 0$，则得

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的泰勒级数.

特别地，当 $x_0=0$ 时，上式变成

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

该级数称为函数 $f(x)$ 的麦克劳林级数.

直接展开法

例 1　求初等函数的幂级数展开式.

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{x}$

直接展开法

例 1　求初等函数的幂级数展开式.

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{x}$

(2) $f(x)=\sin x$

直接展开法

例 1　求初等函数的幂级数展开式.

(1) $f(x)=\mathrm{e}^{x}$

(2) $f(x)=\sin x$

(3) $f(x)=(1+x)^{\alpha}$

间接展开法

例 2　求初等函数的幂级数展开式.

(1) $f(x) = \ln(1+x)$

间接展开法

例 2　求初等函数的幂级数展开式.

(1) $f(x)=\ln(1+x)$

(2) $f(x)=\arctan x$

间接展开法

例 2　求初等函数的幂级数展开式.

(1) $f(x) = \ln(1+x)$

(2) $f(x) = \arctan x$

(3) $f(x) = \cos x$

初等函数的幂级数展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

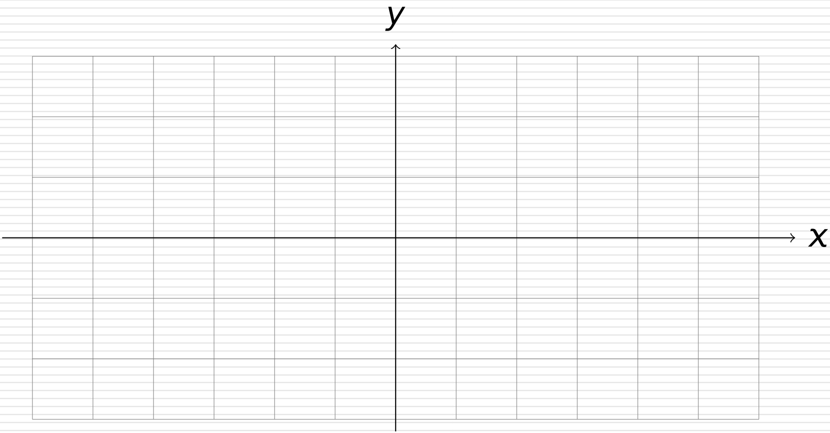
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + C_\alpha^1 x + C_\alpha^2 x^2 + C_\alpha^3 x^3 + \cdots + C_\alpha^n x^n + \cdots$$

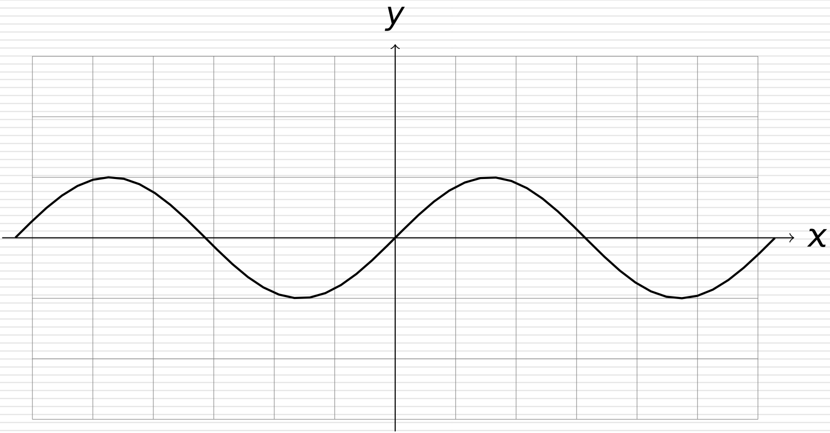
正弦函数展开

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



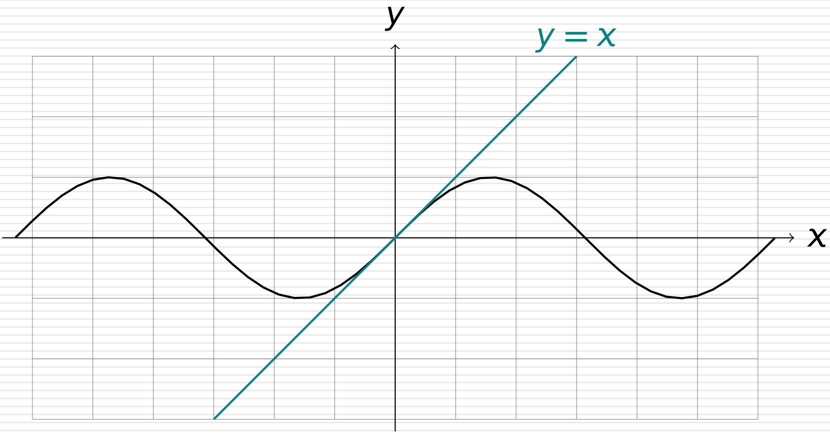
正弦函数展开

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



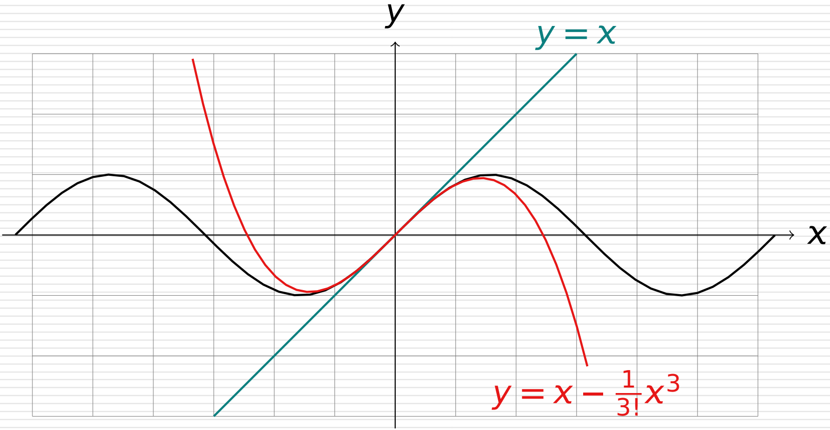
正弦函数展开

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



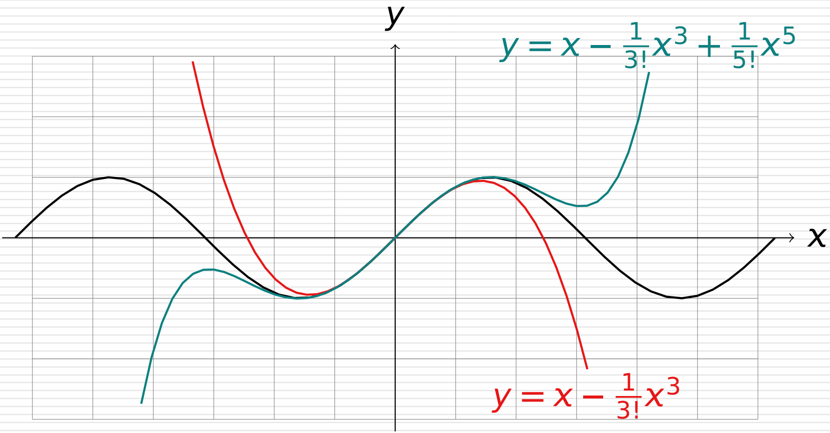
正弦函数展开

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



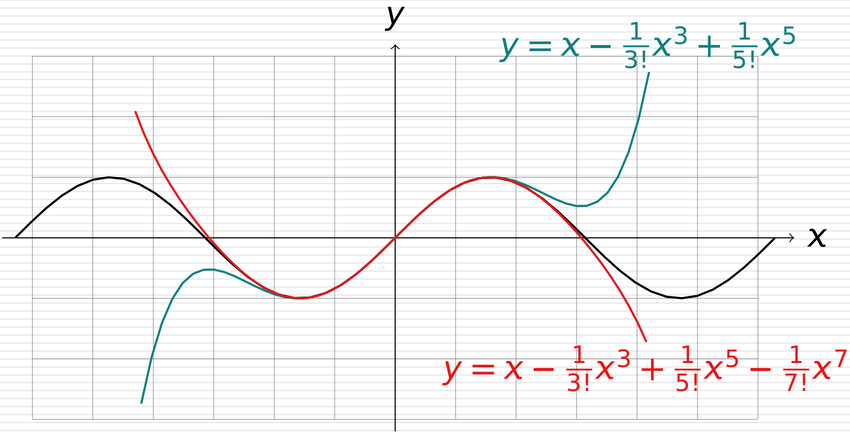
正弦函数展开

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



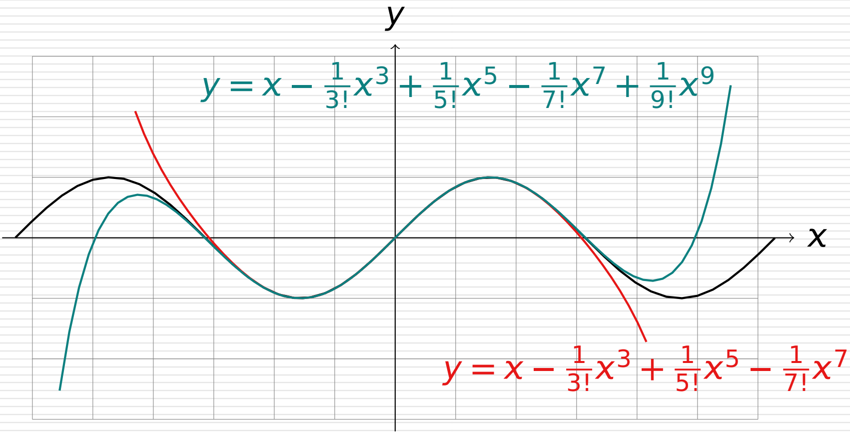
正弦函数展开

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



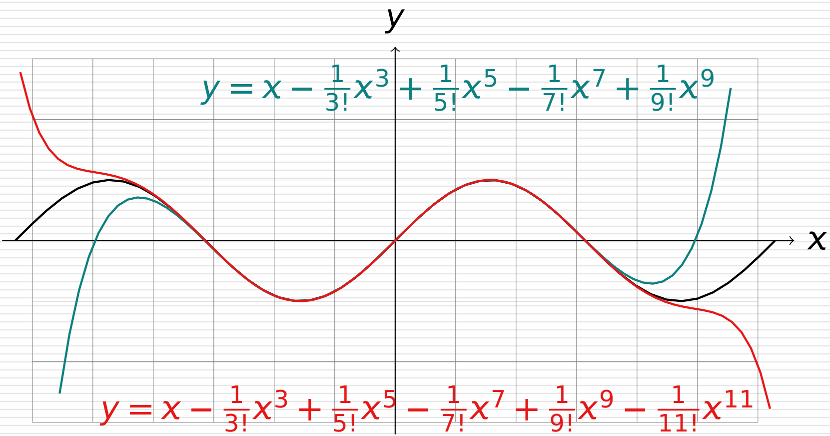
正弦函数展开

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



正弦函数展开

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \frac{1}{9!}x^9 + \cdots$$



初等函数的幂级数展开式

例 3　将函数 $e^{-x/3}$ 展成 x 的幂级数.

初等函数的幂级数展开式

例 3　将函数 $e^{-x/3}$ 展成 x 的幂级数.

例 4　将函数 $\sin^2 x$ 展成 x 的幂级数.

初等函数的幂级数展开式

例 3　将函数 $e^{-x/3}$ 展成 x 的幂级数.

例 4　将函数 $\sin^2 x$ 展成 x 的幂级数.

例 5　将函数 $\dfrac{x}{x+1}$ 展成 x 的幂级数.

初等函数的幂级数展开式

例 3　将函数 $e^{-x/3}$ 展成 x 的幂级数.

例 4　将函数 $\sin^2 x$ 展成 x 的幂级数.

例 5　将函数 $\dfrac{x}{x+1}$ 展成 x 的幂级数.

例 6　将函数 $\dfrac{1}{5-x}$ 展成 $x-2$ 的幂级数.

初等函数的幂级数展开式

练习 1　将函数 $\ln(1-x^2)$ 展成 x 的幂级数.

初等函数的幂级数展开式

练习 1 将函数 $\ln(1-x^2)$ 展成 x 的幂级数.

练习 2 将函数 $\dfrac{x}{x+1}$ 展成 $x-1$ 的幂级数.

初等函数的幂级数展开式

例 7　求 $\arcsin x$ 的幂级数展开式.

初等函数的幂级数展开式

例 7　求 $\arcsin x$ 的幂级数展开式.

解答　由 $(1+x)^{\alpha}$ 的幂级数展开式，可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^{2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{3}+\cdots$$

初等函数的幂级数展开式

例 7　求 $\arcsin x$ 的幂级数展开式.

解答　由 $(1+x)^{\alpha}$ 的幂级数展开式，可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^{2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{3}+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}=1+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^{4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{6}+\cdots$$

初等函数的幂级数展开式

例 7　求 $\arcsin x$ 的幂级数展开式.

解答　由 $(1+x)^{\alpha}$ 的幂级数展开式，可得

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^{2}-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{3}+\cdots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}=1+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^{4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^{6}+\cdots$$

等式两边从 0 到 x 积分，即有

$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\frac{x^{3}}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^{5}}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^{7}}{7}+\cdots$$

幂级数的应用

例 1　计算 e 的近似值.

幂级数的应用

例 1　计算 e 的近似值.

例 2　计算 π 的近似值.

幂级数的应用

例 1　计算 e 的近似值.

例 2　计算 π 的近似值.

例 3　计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值.

幂级数的应用

例 1　计算 e 的近似值.

例 2　计算 π 的近似值.

例 3　计算 $\sqrt[5]{245}$ 的近似值.

例 4　计算 $\int_0^{0.2} e^{-x^2}\,dx$ 的近似值.

幂级数的应用

定理 $$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

幂级数的应用

定理 $$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

由 $\arcsin x$ 的展开式及 $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}t\,dt$ 的公式有：

幂级数的应用

定理 $$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

由 $\arcsin x$ 的展开式及 $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}t\,\mathrm{d}t$ 的公式有:

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots$$

幂级数的应用

定理 $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$

由 $\arcsin x$ 的展开式及 $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}t\,\mathrm{d}t$ 的公式有:

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots$$

$$t=\sin t+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 t}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin^5 t}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\sin^7 t}{7}+\cdots$$

幂级数的应用

定理 $$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8}.$$

由 $\arcsin x$ 的展开式及 $\int_0^{\pi/2}\sin^{2n-1}t\,dt$ 的公式有:

$$\arcsin x = x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\cdots$$

$$t=\sin t+\frac{1}{2}\frac{\sin^3 t}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\sin^5 t}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{\sin^7 t}{7}+\cdots$$

从 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分，得到 $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots.$

定理 (欧拉) $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

定理 (欧拉) $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

定理 (欧拉) $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

$$=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\right)$$

定理 (欧拉) $\quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\\&=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right)\\&\qquad+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\right)\\&=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

定理 (欧拉) $$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots$$

$$=\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right)$$

$$+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \qquad \Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$