微积分课程

第八章 · 多元函数

2020 年 8 月 29 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

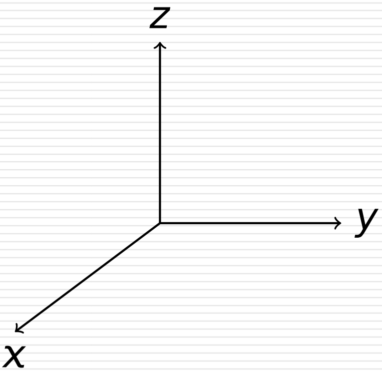
空间直角坐标系

空间直角坐标系

- 三个坐标轴

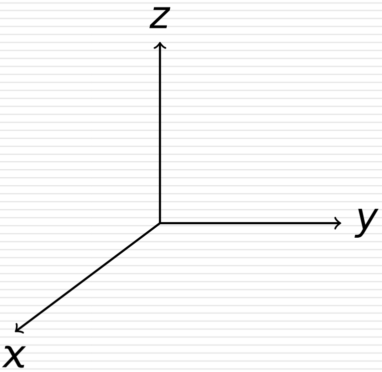
空间直角坐标系

- 三个坐标轴



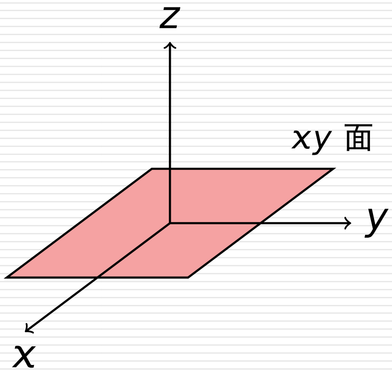
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面



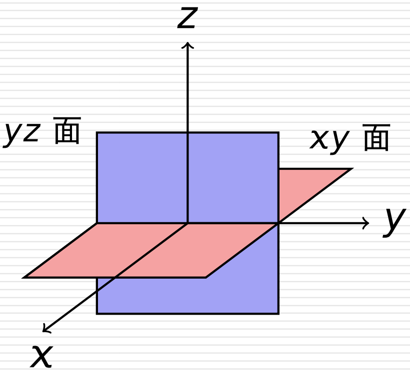
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面



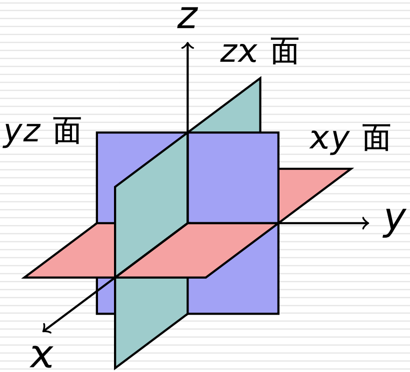
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面



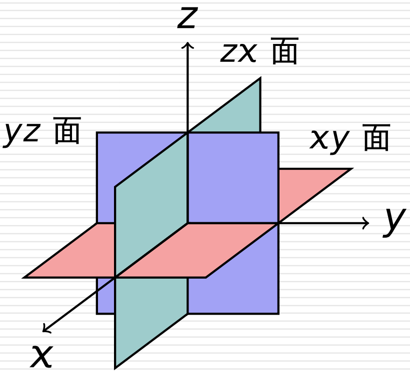
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面



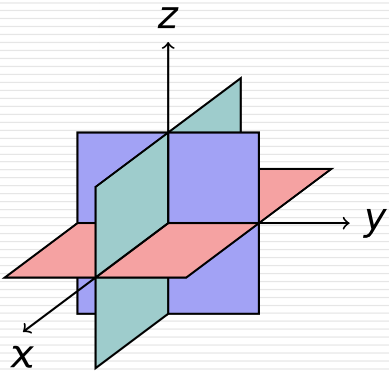
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



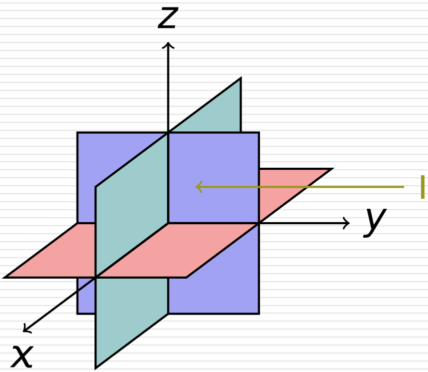
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



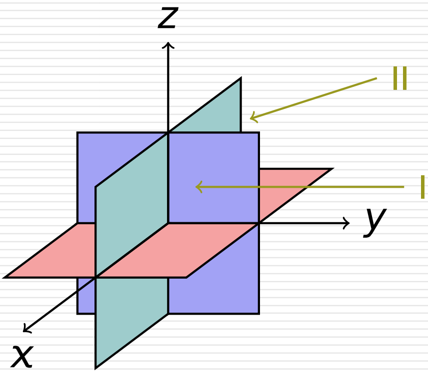
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



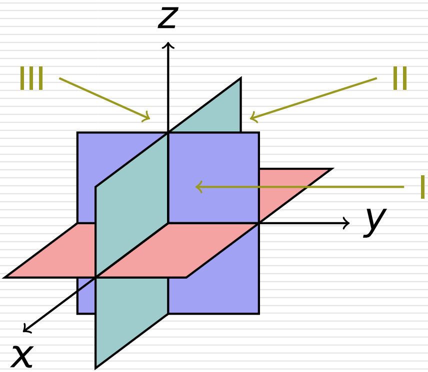
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



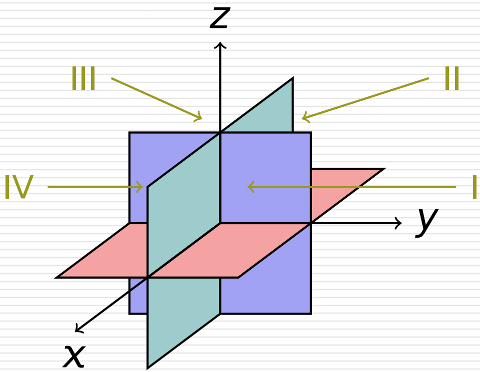
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



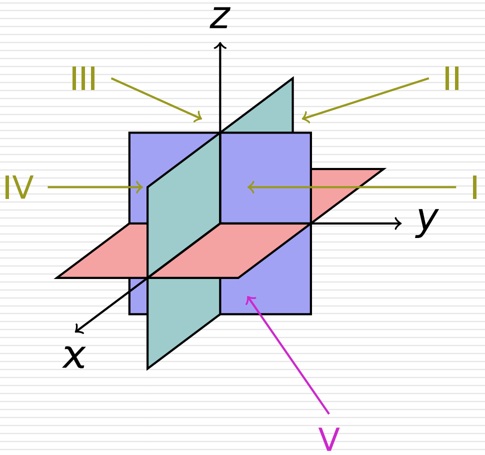
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



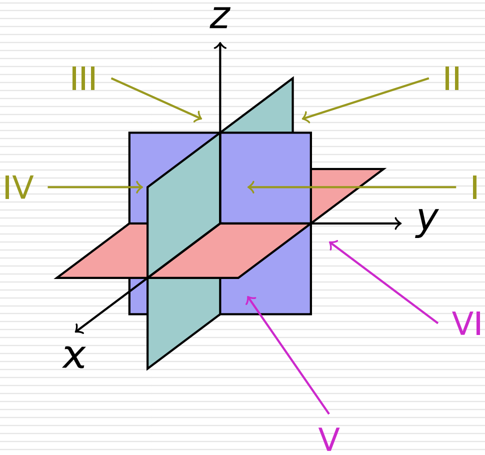
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



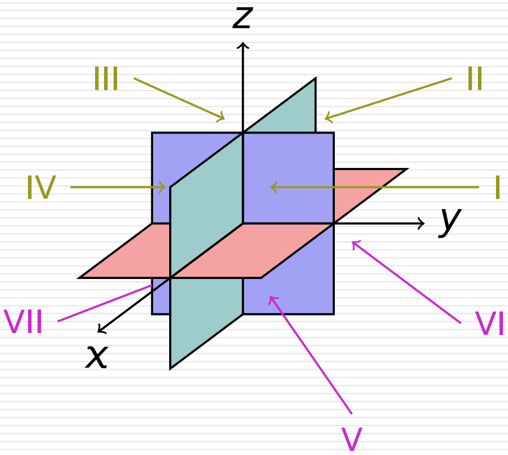
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



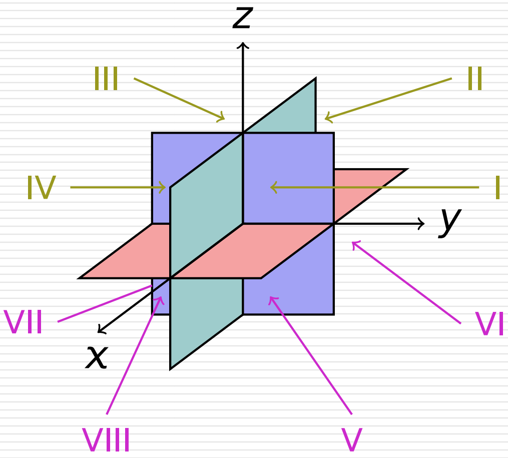
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



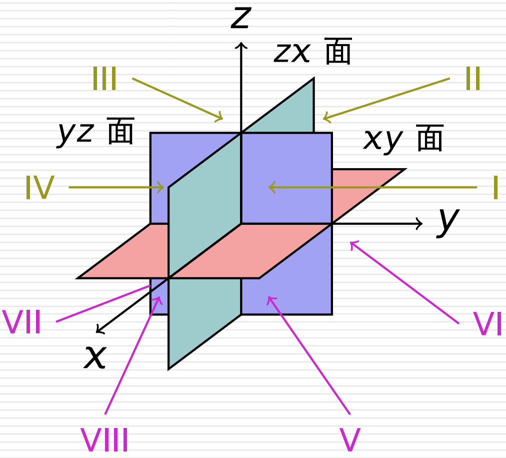
空间直角坐标系

- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



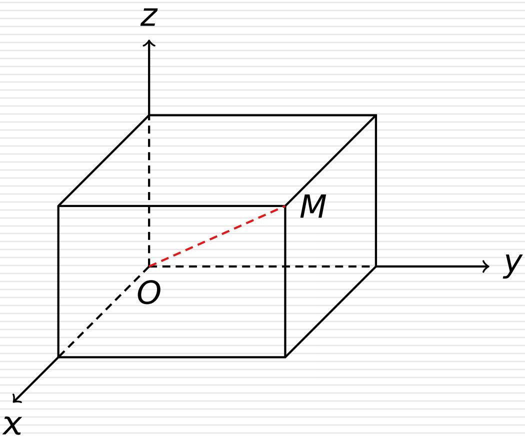
空间直角坐标系

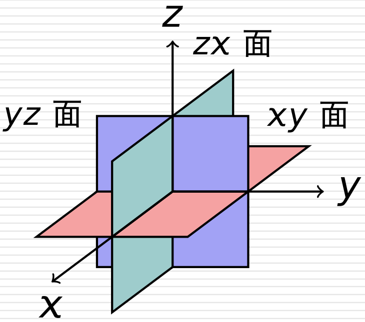
- 三个坐标轴
- 三个坐标面
- 八个卦限



在空间直角坐标系中，我们有

$$点\ M \longleftrightarrow 坐标\ (x, y, z) \longleftrightarrow \vec{OM}$$



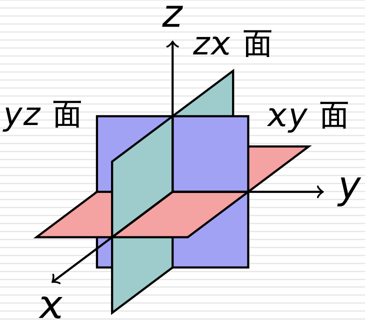


坐标面上的点：

$$xy\text{ 面} \leftrightarrow z=0$$

$$yz\text{ 面} \leftrightarrow x=0$$

$$zx\text{ 面} \leftrightarrow y=0$$



坐标面上的点:

$$xy\text{ 面} \longleftrightarrow z=0$$

$$yz\text{ 面} \longleftrightarrow x=0$$

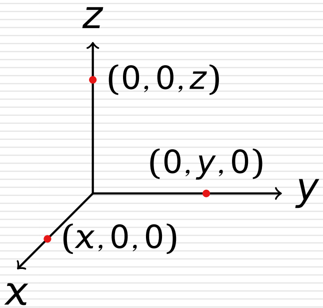
$$zx\text{ 面} \longleftrightarrow y=0$$

坐标轴上的点:

$$x\text{ 轴} \longleftrightarrow y=z=0$$

$$y\text{ 轴} \longleftrightarrow z=x=0$$

$$z\text{ 轴} \longleftrightarrow x=y=0$$



空间中两点的距离

设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 和 $M_2(x_2, y_2, z_2)$ 为空间中两点．则它们的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

空间中两点的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中两点．则它们的距离为

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 到原点 O 的距离为

$$|OM| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

曲面与方程

定义 给定空间中曲面 S 和方程 $F(x,y,z)=0$. 如果

$\boxed{\text{点 } (x,y,z) \text{ 在曲面 } S \text{ 上}} \Leftrightarrow \boxed{\text{点 } (x,y,z) \text{ 满足方程 } F(x,y,z)=0}$

则称

- $F(x,y,z)=0$ 是曲面 S 对应的方程;
- S 是方程 $F(x,y,z)=0$ 对应的曲面.

曲面与方程

例 1　空间的平面方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

例 1 空间的平面方程为

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

特别地，方程 $z = 0$ 表示 xy 面，而方程 $z = c$ 表示平行于 xy 面的平面.

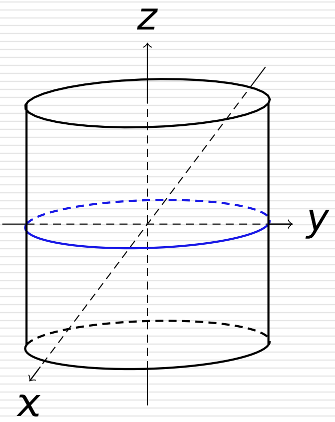
例 2　球心在 (x_0, y_0, z_0)，半径为 R 的球面方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

例 3　$x^2 + y^2 = R^2$

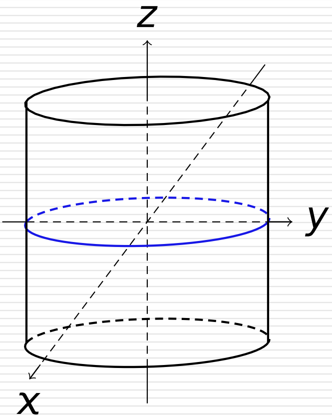
例 3 $x^2+y^2=R^2$ 圆柱面

例 3　$x^2 + y^2 = R^2$ 圆柱面



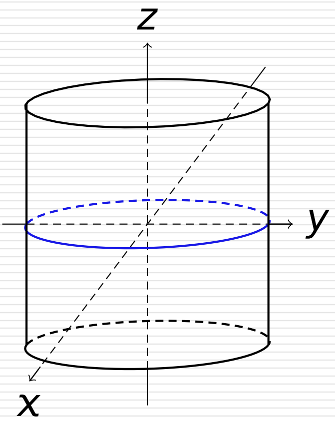
例 3　$x^2+y^2=R^2$ 圆柱面

由平行于 z 轴的直线沿 xy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而得.



例 3　$x^2+y^2=R^2$ 圆柱面

由平行于 z 轴的直线沿 xy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而得.

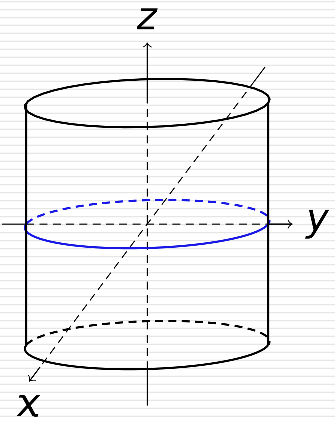


准线：xy 面的圆 $x^2+y^2=R^2$.

母线：平行于 z 轴的直线.

例 3　$x^2+y^2=R^2$ 圆柱面

由平行于 z 轴的直线沿 xy 面上的圆 $x^2+y^2=R^2$ 移动而得.



准线：xy 面的圆 $x^2+y^2=R^2$.

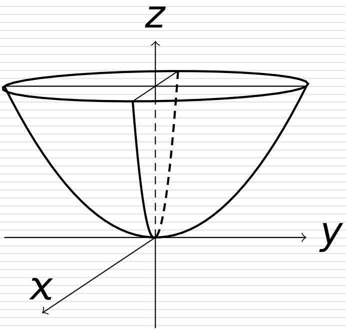
母线：平行于 z 轴的直线.

一般地，方程 $F(x,y)=0$ 在空间中表示一个柱面.

例 4 $z = x^2 + y^2$

例 4　$z = x^2 + y^2$ 旋转抛物面

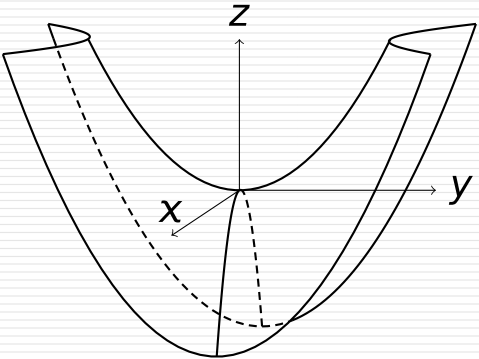
例 4　$z = x^2 + y^2$ 旋转抛物面



例 5　$z = y^2 - x^2$

例 5 $z = y^2 - x^2$ 双曲抛物面（马鞍面）

例 5　$z = y^2 - x^2$ 双曲抛物面（马鞍面）



多元函数

定义 1 从平面子集 D 到 $\mathbb{R}$ 的对应关系

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

称为**二元函数**，其中对应 f 将点 (x, y) 对应到 $f(x, y)$.
记为 $z = f(x, y)$.

多元函数

定义 1　从平面子集 D 到 $\mathbb{R}$ 的对应关系

$$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

称为二元函数，其中对应 f 将点 (x, y) 对应到 $f(x, y)$. 记为 $z = f(x, y)$.

类似地可以定义三元函数.

二元函数的定义域

二元函数也有自然定义域.

二元函数的定义域

二元函数也有自然定义域.

例 1　$z = \ln(x + y)$ 的定义域为

$$D = \{(x, y) | x + y > 0\}.$$

二元函数的定义域

二元函数也有自然定义域.

例 1　$z=\ln(x+y)$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)|x+y>0\}.$$

例 2　$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的定义域为

$$D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}.$$

平面区域的分类

定义 2

- 闭区域：包含边界的区域

平面区域的分类

定义 2

- 闭区域：包含边界的区域
- 开区域：不包含边界的区域

平面区域的分类

定义 2

- 闭区域：包含边界的区域
- 开区域：不包含边界的区域
- 有界区域：限制在有限范围的区域

平面区域的分类

定义 2

- 闭区域：包含边界的区域
- 开区域：不包含边界的区域
- 有界区域：限制在有限范围的区域
- 无界区域：延伸到无穷远的区域

练习 1　求二元函数的定义域并画出该区域.

(1) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$

(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y-2}}$

练习 1　求二元函数的定义域并画出该区域.

(1) $f(x,y)=\ln(x^2+y^2-1)$

(2) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x+y-2}}$

(3) $f(x,y)=\sqrt{1-|x|-|y|}$

复习 1　求二元函数的定义域并画出该区域.

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$

(2) $f(x,y)=\ln(x-y+2)+\ln(2x+y-2)$

复习1　求二元函数的定义域并画出该区域.

(1) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-1}+\sqrt{4-x^2-y^2}$

(2) $f(x,y)=\ln(x-y+2)+\ln(2x+y-2)$

注记

- $y>f(x)$ 表示 $y=f(x)$ 的上方区域.
- $y<f(x)$ 表示 $y=f(x)$ 的下方区域.

二元函数的极限：定义

定义 1　平面上的点集

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$.

二元函数的极限：定义

定义 1 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$.

定义 2 平面上的点集

$$\left\{(x,y)\middle|0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(P_0,\delta)$.

二元函数的极限：定义

定义 3　如果任意给定 $\epsilon > 0$，总存在一个 $\delta > 0$，使得当点 $(x,y) \in \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，

$$|f(x,y) - A| < \epsilon$$

总成立，则称当 (x,y) 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

二元函数的极限：定义

定义 3　如果任意给定 $\epsilon > 0$，总存在一个 $\delta > 0$，使得当点 $(x,y) \in \mathring{U}(P_0,\delta)$ 时，

$$|f(x,y) - A| < \epsilon$$

总成立，则称当 (x,y) 趋于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，函数 $f(x,y)$ 以 A 为**极限**，记为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$$

例 1　证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$，其中

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

二元函数的极限：解释

注记　函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 成立等价于当 (x,y) 以任意方式趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 总趋于 A.

二元函数的极限：解释

注记　函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$ 成立等价于当 (x,y) 以任意方式趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 总趋于 A.

例 2　证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在，其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

连续函数

定义 4　若二元函数 $f(x,y)$ 满足

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

连续函数

定义 4　若二元函数 $f(x,y)$ 满足

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

定理 1　二元函数有和一元函数类似的性质：

1 二元初等函数在定义区域上总是连续的.

连续函数

定义 4　若二元函数 $f(x,y)$ 满足

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

定理 1　二元函数有和一元函数类似的性质:

1. 二元初等函数在定义区域上总是连续的.
2. 若二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则它在 D 上必能取得最大值和最小值.

二元函数的极限

例 3　求二元函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3x+y.$

二元函数的极限

例 3　求二元函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3x+y.$

例 4　求二元函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}.$

二元函数的极限

例 3　求二元函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} 3x+y.$

例 4　求二元函数极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}.$

练习 1　求二元函数极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{x-y}{x+y}.$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\sin xy}{x}.$

偏导数

定义 1 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$.

偏导数

定义 1　设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有定义，如果极限

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$.

偏导数

定义 1　设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域内有定义，如果极限

$$f'_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称该极限为函数在点 (x_0,y_0) 处对 x 的偏导数，记为 $f'_x(x_0,y_0)$.

类似地定义函数在点 (x_0,y_0) 处对 y 的偏导数为

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

偏导数

对于 $z = f(x, y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，

偏导数

对于 $z=f(x,y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，或 z'_x，或 f'_x.

偏导数

对于 $z=f(x,y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，或 z'_x，或 f'_x.

对于 $z=f(x,y)$，将 x 看为常数，对 y 求导，得到 z 对 y 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，

偏导数

对于 $z = f(x,y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，或 z'_x，或 f'_x.

对于 $z = f(x,y)$，将 x 看为常数，对 y 求导，得到 z 对 y 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$，或 z'_y，或 f'_y.

例 1　求 $z=x^2+xy+y^2$ 的偏导数.

例 1　求 $z=x^2+xy+y^2$ 的偏导数.

例 2　求 $z=\dfrac{xy}{2x-y}$ 的偏导数.

例 1　求 $z = x^2 + xy + y^2$ 的偏导数.

例 2　求 $z = \dfrac{xy}{2x - y}$ 的偏导数.

例 3　求 $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2 y}$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

例 1　求 $z=x^2+xy+y^2$ 的偏导数.

例 2　求 $z=\dfrac{xy}{2x-y}$ 的偏导数.

例 3　求 $f(x,y)=e^{x^2y}$ 在点 $(1,2)$ 处的偏导数.

练习 1　求下列函数的偏导数.

(1) $z=2x^3-5xy^2+x^2y$

(2) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$

三元函数的偏导数

类似地，对于三元函数 $u = f(x, y, z)$，可以定义三个偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

三元函数的偏导数

类似地，对于三元函数 $u = f(x, y, z)$，可以定义三个偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

例 4　求三元函数 $u = xy^2z^3$ 的偏导数.

二阶偏导数

对 $z=f(x,y)$ 的偏导数 z'_x 和 z'_y 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

二阶偏导数

对 $z=f(x,y)$ 的偏导数 z'_x 和 z'_y 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

- $(z'_x)'_x = z''_{xx}$ 或 $(f'_x)'_x = f''_{xx}$

二阶偏导数

对 $z=f(x,y)$ 的偏导数 z'_x 和 z'_y 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

- $(z'_x)'_x = z''_{xx}$ 或 $(f'_x)'_x = f''_{xx}$
- $(z'_x)'_y = z''_{xy}$ 或 $(f'_x)'_y = f''_{xy}$

二阶偏导数

对 $z = f(x, y)$ 的偏导数 z'_x 和 z'_y 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

- $(z'_x)'_x = z''_{xx}$ 或 $(f'_x)'_x = f''_{xx}$
- $(z'_x)'_y = z''_{xy}$ 或 $(f'_x)'_y = f''_{xy}$
- $(z'_y)'_x = z''_{yx}$ 或 $(f'_y)'_x = f''_{yx}$

二阶偏导数

对 $z=f(x,y)$ 的偏导数 z'_x 和 z'_y 再求偏导数，就得到四个二阶偏导数：

- $(z'_x)'_x = z''_{xx}$ 或 $(f'_x)'_x = f''_{xx}$
- $(z'_x)'_y = z''_{xy}$ 或 $(f'_x)'_y = f''_{xy}$
- $(z'_y)'_x = z''_{yx}$ 或 $(f'_y)'_x = f''_{yx}$
- $(z'_y)'_y = z''_{yy}$ 或 $(f'_y)'_y = f''_{yy}$

例 5　求 $z = x^3 + y^3 - 3xy^2$ 的各二阶偏导数.

例 5　求 $z=x^3+y^3-3xy^2$ 的各二阶偏导数.

例 6　求 $z=x^2ye^y$ 的各二阶偏导数.

例 5　求 $z = x^3 + y^3 - 3xy^2$ 的各二阶偏导数.

例 6　求 $z = x^2 y e^y$ 的各二阶偏导数.

注记 1　当二阶偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 都连续时，两者必定相等.

例 5 求 $z = x^3 + y^3 - 3xy^2$ 的各二阶偏导数.

例 6 求 $z = x^2 y e^y$ 的各二阶偏导数.

注记 1 当二阶偏导数 $f''_{xy}(x, y)$ 和 $f''_{yx}(x, y)$ 都连续时，两者必定相等.

练习 2 求下列函数的二阶偏导数.

(1) $z = x^2 y^3 + e^x \sin y$

例 5　求 $z=x^3+y^3-3xy^2$ 的各二阶偏导数.

例 6　求 $z=x^2ye^y$ 的各二阶偏导数.

注记 1　当二阶偏导数 $f''_{xy}(x,y)$ 和 $f''_{yx}(x,y)$ 都连续时，两者必定相等.

练习 2　求下列函数的二阶偏导数.

(1) $z=x^2y^3+\mathrm{e}^x\sin y$

(2) $z=\sin(x-y)$

二阶偏导数

$z = f(x, y)$ 的二阶偏导数也可以这样表示：

二阶偏导数

$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数也可以这样表示：

- $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$$

二阶偏导数

$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数也可以这样表示：

- $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$$
- $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}$$

二阶偏导数

$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数也可以这样表示：

- $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$$
- $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=z''_{xy}$$
- $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=z''_{yx}$$

二阶偏导数

$z=f(x,y)$ 的二阶偏导数也可以这样表示：

- $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=z''_{xx}$$
- $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=z''_{xy}$$
- $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=z''_{yx}$$
- $$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=z''_{yy}$$

全微分

例子　用 S 表示边长分别为 x 与 y 的矩形的面积，则 $S = xy$.

全微分

例子　用 S 表示边长分别为 x 与 y 的矩形的面积，则 $S = xy$．如果边长 x 与 y 分别取得改变量 Δx 与 Δy，

全微分

例子　用 S 表示边长分别为 x 与 y 的矩形的面积，则 $S = xy$．如果边长 x 与 y 分别取得改变量 Δx 与 Δy，则面积 S 相应地有一个改变量

$$\Delta S = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

定义　对于二元函数 $z=f(x,y)$，如果

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A，B 与 Δx，Δy 无关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数可微，并称它的全微分为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$$

定义 对于二元函数 $z = f(x, y)$，如果

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中 A，B 与 Δx，Δy 无关，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$，则称函数**可微**，并称它的**全微分**为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$$

定理 如果函数 $z = f(x, y)$ 可微，则 $A = f'_x(x, y)$，$B = f'_y(x, y)$. 即有

$$\mathrm{d}z = f'_x(x, y)\,\mathrm{d}x + f'_y(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{d}x = \Delta x$，$\mathrm{d}y = \Delta y$.

全微分

定理　如果多元函数的各个偏导数都连续，则全微分存在.

全微分

定理 如果多元函数的各个偏导数都连续，则全微分存在.

……………………………………………………

设 $z = f(x,y)$，则全微分为

$$\mathrm{d}z = f'_x(x,y)\mathrm{d}x + f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

全微分

定理 如果多元函数的各个偏导数都连续，则全微分存在.

. . . .

设 $z=f(x,y)$，则全微分为

$$\mathrm{d}z=f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$$

设 $u=f(x,y,z)$，则全微分为

$$\mathrm{d}u=f'_x(x,y,z)\mathrm{d}x+f'_y(x,y,z)\mathrm{d}y+f'_z(x,y,z)\mathrm{d}z$$

例 7 求 $z = x^2y^3$ 在 $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = 0.1$ 时的全微分.

全微分

例 7　求 $z = x^2y^3$ 在 $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = 0.1$ 时的全微分.

例 8　求 $z = e^{xy}$ 的全微分.

全微分

例 7　求 $z = x^2y^3$ 在 $x = 1$, $y = 2$, $\Delta x = 0.2$, $\Delta y = 0.1$ 时的全微分.

例 8　求 $z = e^{xy}$ 的全微分.

例 9　求 $u = xy + yz + zx$ 的全微分.

近似计算

利用全微分公式，我们有下列近似计算公式：

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y)+f'_x(x,y)\Delta x+f'_y(x,y)\Delta y$$

近似计算

利用全微分公式，我们有下列近似计算公式：

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y$$

例 10　求 $1.01^{2.99}$ 的近似值.

复习 1　求下列函数的偏导数.

(1) $z = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$

复习 1　求下列函数的偏导数.

(1) $z = \dfrac{x}{x^2 - y^2}$

(2) $z = \arctan(x - y)$

复习 2　求下列函数的二阶偏导数.

(1) $z = y^2 e^{x-y}$

复习 2　求下列函数的二阶偏导数.

(1) $z = y^2 e^{x-y}$

(2) $z = xy\cos y$

复合函数求导：情形 1

设 $z = f(x, y)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$,

复合函数求导：情形 1

设 $z=f(x,y)$, $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$，则我们得到复合函数 $z=f(\phi(t),\psi(t))$.

复合函数求导：情形 1

设 $z=f(x,y)$, $x=\phi(t)$, $y=\psi(t)$，则我们得到复合函数 $z=f(\phi(t),\psi(t))$. 此时我们有**全导数**

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

复合函数求导：情形 1

设 $z = f(x, y)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$，则我们得到复合函数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$．此时我们有全导数

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

例 1　设 $z = xy$，$x = \mathrm{e}^t$, $y = \sin t$，求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

复合函数求导：情形 2

设 $z = f(u, v)$, $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$,

复合函数求导：情形 2

设 $z = f(u, v)$, $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$，则有复合函数 $z = f(\phi(x, y), \psi(x, y))$.

复合函数求导：情形 2

设 $z = f(u,v)$, $u = \phi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$，则有复合函数 $z = f(\phi(x,y),\psi(x,y))$. 此时我们有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

复合函数求导：情形 2

设 $z=f(u,v)$, $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$，则有复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$. 此时我们有偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

例 2　设 $z=uv$，$u=3x^2+y^2$, $v=2x+y$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

练习 1

(1) 设 $z = e^{x-2y}$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, 求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

练习 1

(1) 设 $z = e^{x-2y}$，$x = \sin t, y = \cos t$，求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

(2) 设 $z = e^{u}\sin v$，$u = xy, v = x - y$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

全微分的形式不变性

设有 $z = f(u, v)$，u, v 为自变量，则全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

全微分的形式不变性

设有 $z=f(u,v)$，u, v 为自变量，则全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

若又有 $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$，u, v 为中间变量，则全微分仍为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$$

例 3　利用全微分的形式不变性，求二元函数 $z = (x^2 - y^2)e^{xy}$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

隐函数的导数 1

定理 1 设方程 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，且 $F(x,y)$ 有连续偏导数，$F'_y \neq 0$，

隐函数的导数 1

定理 1 设方程 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，且 $F(x,y)$ 有连续偏导数，$F'_y\neq 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

隐函数的导数 1

定理 1 设方程 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，且 $F(x,y)$ 有连续偏导数，$F'_y\neq 0$，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

例 4 设方程 $y-xe^y+x=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，求导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

隐函数的导数 2

定理2 设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，且 $F(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $F'_z\neq 0$，

隐函数的导数 2

定理2 设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，且 $F(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $F'_z\neq 0$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

隐函数的导数 2

定理2 设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，且 $F(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $F'_z\neq 0$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

例5 设方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

练习 2

(1) 设方程 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$ 确定了隐函数 $y = f(x)$，求导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

练习 2

(1) 设方程 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$ 确定了隐函数 $y = f(x)$，求导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

(2) 设方程 $e^z = xyz$ 确定了隐函数 $z = f(x,y)$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

例 6　设方程 $x^2+y^2+z^2=1$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，求二阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

复习 1

(1) 设 $z = \dfrac{x}{y}$，$x = \mathrm{e}^t, y = \sqrt{t}$，求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

(2) 设 $z = uv$，$u = x\sin y, v = y\cos x$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

复习2

(1) 设方程 $xy+\ln y-\ln x=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，求导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

(2) 设方程 $\dfrac{x}{z}=\ln z-\ln y$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

极值和极值点

定义 设点 (x_0, y_0) 在 $z = f(x, y)$ 定义域中.

极值和极值点

定义 设点 (x_0, y_0) 在 $z = f(x, y)$ 定义域中.

1. 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有
$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

极值和极值点

定义 设点 (x_0, y_0) 在 $z = f(x, y)$ 定义域中.

1 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

称 (x_0, y_0) 为极大值点，$f(x_0, y_0)$ 为极大值.

极值和极值点

定义　设点 (x_0, y_0) 在 $z = f(x, y)$ 定义域中.

1 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

称 (x_0, y_0) 为极大值点，$f(x_0, y_0)$ 为极大值.

2 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

极值和极值点

定义　设点 (x_0,y_0) 在 $z=f(x,y)$ 定义域中.

1 若对 (x_0,y_0) 去心邻域中任何点 (x,y)，总有

$$f(x,y)<f(x_0,y_0),$$

称 (x_0,y_0) 为极大值点，$f(x_0,y_0)$ 为极大值.

2 若对 (x_0,y_0) 去心邻域中任何点 (x,y)，总有

$$f(x,y)>f(x_0,y_0),$$

称 (x_0,y_0) 为极小值点，$f(x_0,y_0)$ 为极小值.

极值和极值点

定义　设点 (x_0, y_0) 在 $z = f(x, y)$ 定义域中.

1 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有

$$f(x, y) < f(x_0, y_0),$$

称 (x_0, y_0) 为极大值点，$f(x_0, y_0)$ 为极大值.

2 若对 (x_0, y_0) 去心邻域中任何点 (x, y)，总有

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

称 (x_0, y_0) 为极小值点，$f(x_0, y_0)$ 为极小值.

- 极大值和极小值统称极值.
- 极大值点和极小值点统称极值点.

极值和极值点

例 1 对下列各函数，判定点 $(0,0)$ 是否为极值点：

极值和极值点

例 1　对下列各函数，判定点 $(0,0)$ 是否为极值点：

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$

极值和极值点

例 1　对下列各函数，判定点 $(0,0)$ 是否为极值点：

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

极值和极值点

例 1　对下列各函数，判定点 $(0,0)$ 是否为极值点：

(1) $f(x,y)=x^2+y^2$

(2) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

(3) $f(x,y)=xy$

极值和与驻点

定理 1 (极值的必要条件)　如果 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处取得极值，且偏导数存在，

极值和与驻点

定理 1 (极值的必要条件)　如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且偏导数存在，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\qquad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

极值和与驻点

定理 1 (极值的必要条件) 如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且偏导数存在，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0, \qquad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

定义 使两个偏导数都为零的点称为**驻点**.

极值和与驻点

定理 1 (极值的必要条件)　如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处取得极值，且偏导数存在，则有

$$f'_x(x_0,y_0)=0,\qquad f'_y(x_0,y_0)=0.$$

定义　使两个偏导数都为零的点称为驻点.

注记　极值点可能在驻点取得，也可能在偏导数不存在的点取得.

定理 2 (极值的充分条件)　设函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0, y_0) 是它的驻点.

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

(2) 如果 $B^2-AC>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

定理 2 (极值的充分条件) 设函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 令 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

(2) 如果 $B^2-AC>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

(3) 如果 $B^2-AC=0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值需另外判定.

极值问题

例 2　求二元函数的极值：

$$f(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+5.$$

极值问题

例 2　求二元函数的极值：

$$f(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+5.$$

练习 1　求二元函数的极值：

(1) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy.$

极值问题

例 2　求二元函数的极值:

$$f(x,y)=y^3-x^2+6x-12y+5.$$

练习 1　求二元函数的极值:

(1) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy.$

(2) $f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2.$

最值问题

例 3　要造一个容积为 2 的长方体箱子．问选择长、宽、高为多少时，所用的材料最少？

最值问题

例 4　某工厂生产两种产品 I 和 II，出售单价分别为 10 元与 9 元．生产 x 单位的产品 I 与生产 y 单位的产品 II 的总费用为

$$C(x,y)=400+2x+3y+0.01(3x^2+xy+3y^2).$$

问两种产品各生产多少时，总利润最大？

条件极值与拉格朗日乘数法 I

问题　求函数 $u = f(x, y)$ 在约束条件 $g(x, y) = 0$ 下的极值.

条件极值与拉格朗日乘数法 I

问题　求函数 $u = f(x, y)$ 在约束条件 $g(x, y) = 0$ 下的极值.

解法　令 $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$,

条件极值与拉格朗日乘数法 I

问题　求函数 $u=f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y)=0$ 下的极值.

解法　令 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$，由

$$\begin{cases} L'_x(x,y)=0 \\ L'_y(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

条件极值与拉格朗日乘数法 I

问题　求函数 $u = f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y) = 0$ 下的极值.

解法　令 $L(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$，由

$$\begin{cases} L'_x(x,y) = 0 \\ L'_y(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

消去 λ，解得的 (x,y) 即为极值可疑点.

条件极值

例 5 求 $f(x,y)=xy^2$ 在条件 $x^2+y^2=1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 下的最大值.

条件极值

例 5　求 $f(x,y)=xy^2$ 在条件 $x^2+y^2=1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 下的最大值.

练习 2　求 $f(x,y)=x^2y$ 在条件 $x+y=1$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$ 下的最大值.

条件极值与拉格朗日乘数法 I

问题　求 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $g(x, y, z) = 0$ 下的极值.

条件极值与拉格朗日乘数法 I

问题　求 $u = f(x, y, z)$ 在约束条件 $g(x, y, z) = 0$ 下的极值.

解法　令 $L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$,

条件极值与拉格朗日乘数法 I

问题　求 $u = f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z) = 0$ 下的极值.

解法　令 $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$，由

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z) = 0 \\ L'_y(x,y,z) = 0 \\ L'_z(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

条件极值与拉格朗日乘数法 I

问题　求 $u = f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z) = 0$ 下的极值.

解法　令 $L(x,y,z) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$，由

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z) = 0 \\ L'_y(x,y,z) = 0 \\ L'_z(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

消去 λ，解得的 (x,y,z) 即为极值可疑点.

例 6　求 $S = 2xy + 2yz + 2zx$ 在条件 $xyz = 2$（$x > 0, y > 0, z > 0$）条件下的最小值.

条件极值与拉格朗日乘数法 II

问题　求 $u = f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z) = 0$ 和 $h(x,y,z) = 0$ 下的极值.

条件极值与拉格朗日乘数法 II

问题　求 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z)=0$ 和 $h(x,y,z)=0$ 下的极值.

解法　令

$$L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z).$$

条件极值与拉格朗日乘数法 II

问题　求 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z)=0$ 和 $h(x,y,z)=0$ 下的极值.

解法　令

$$L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z).$$

由下面方程组

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z)=0,\ L'_y(x,y,z)=0,\ L'_z(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0,\quad h(x,y,z)=0 \end{cases}$$

条件极值与拉格朗日乘数法 II

问题 求 $u=f(x,y,z)$ 在约束条件 $g(x,y,z)=0$ 和 $h(x,y,z)=0$ 下的极值.

解法 令

$$L(x,y,z)=f(x,y,z)+\lambda g(x,y,z)+\mu h(x,y,z).$$

由下面方程组

$$\begin{cases} L'_x(x,y,z)=0,\ L'_y(x,y,z)=0,\ L'_z(x,y,z)=0 \\ g(x,y,z)=0,\quad h(x,y,z)=0 \end{cases}$$

消去 λ 和 μ，解得的 (x,y,z) 即为极值可疑点.

条件极值与拉格朗日乘数法 II

问题　求 $u = f(x, y, z, t)$ 在约束条件 $g(x, y, z, t) = 0$ 和 $h(x, y, z, t) = 0$ 下的极值.

条件极值与拉格朗日乘数法 II

问题　求 $u=f(x,y,z,t)$ 在约束条件 $g(x,y,z,t)=0$ 和 $h(x,y,z,t)=0$ 下的极值.

解法　令

$$L(x,y,z,t)=f(x,y,z,t)+\lambda g(x,y,z,t)+\mu h(x,y,z,t).$$

条件极值与拉格朗日乘数法 II

问题　求 $u = f(x, y, z, t)$ 在约束条件 $g(x, y, z, t) = 0$ 和 $h(x, y, z, t) = 0$ 下的极值.

解法　令

$$L(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) + \lambda g(x, y, z, t) + \mu h(x, y, z, t).$$

由下面各式

$$L'_x = 0,\ L'_y = 0,\ L'_z = 0,\ L'_t = 0,\ g = 0,\ h = 0$$

条件极值与拉格朗日乘数法 II

问题 求 $u = f(x, y, z, t)$ 在约束条件 $g(x, y, z, t) = 0$ 和 $h(x, y, z, t) = 0$ 下的极值.

解法 令

$$L(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) + \lambda g(x, y, z, t) + \mu h(x, y, z, t).$$

由下面各式

$$L'_x = 0, \ L'_y = 0, \ L'_z = 0, \ L'_t = 0, \ g = 0, \ h = 0$$

消去 λ 和 μ，解得的 (x, y, z, t) 即为极值可疑点.

复习1　求二元函数的极值：

(1) $f(x,y)=xy(1-x-y)$

复习1　求二元函数的极值：

(1) $f(x,y)=xy(1-x-y)$

(2) $f(x,y)=(6x-x^2)(4y-y^2)$

复习2　求二元函数 $f(x, y) = x + 2y$ 在约束条件 $x^2 + y^2 = 1$ 下的最值.

第三节	极限与连续
第四节	偏导数与全微分
第五节	复合函数的导数
第六节	二元函数的极值
第七节	二重积分

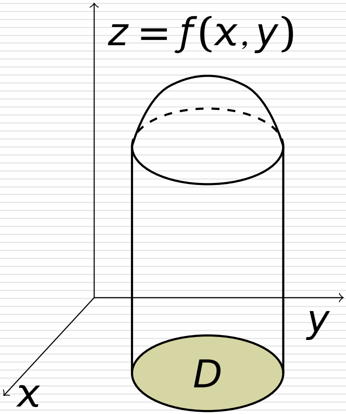
第七节	二重积分
A	二重积分的概念和性质
B	用直角坐标计算二重积分
C	用极坐标计算二重积分

曲顶柱体

底面：在 xOy 面中的闭区域 D

侧面：母线平行于 z 轴的柱面

顶面：在 D 之上的曲面 $f(x,y)$

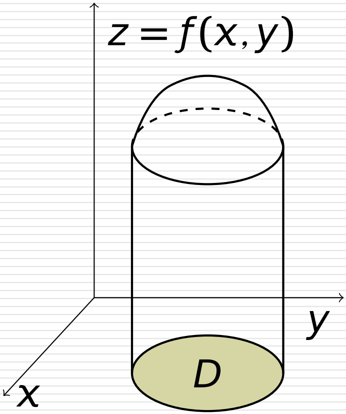


曲顶柱体

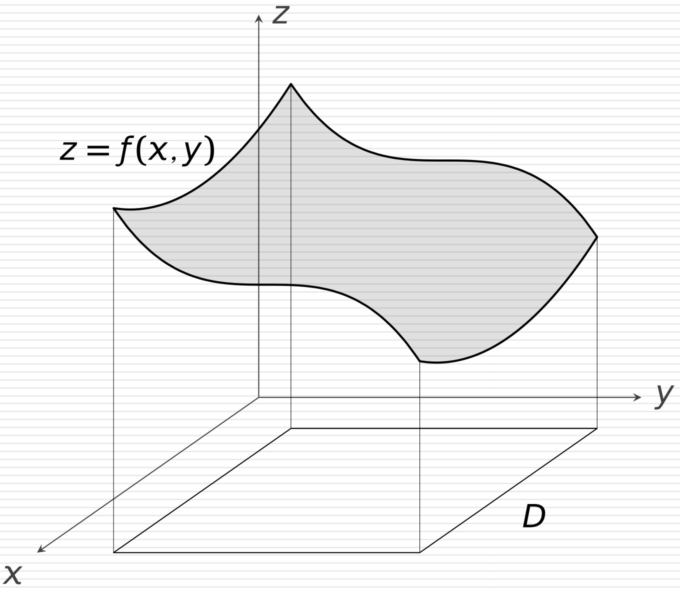
底面：在 xOy 面中的闭区域 D

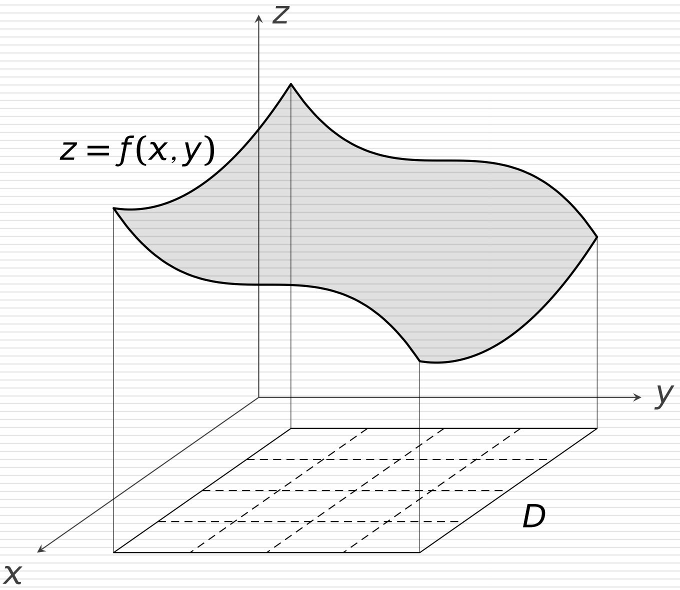
侧面：母线平行于 z 轴的柱面

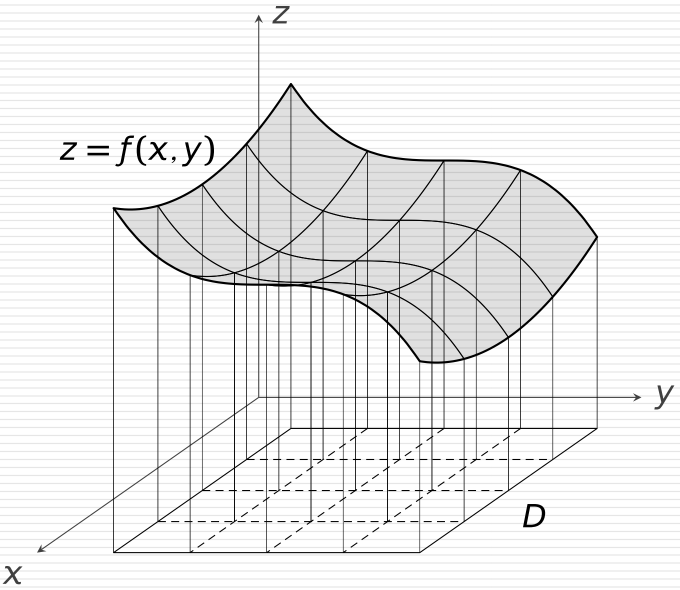
顶面：在 D 之上的曲面 $f(x,y)$

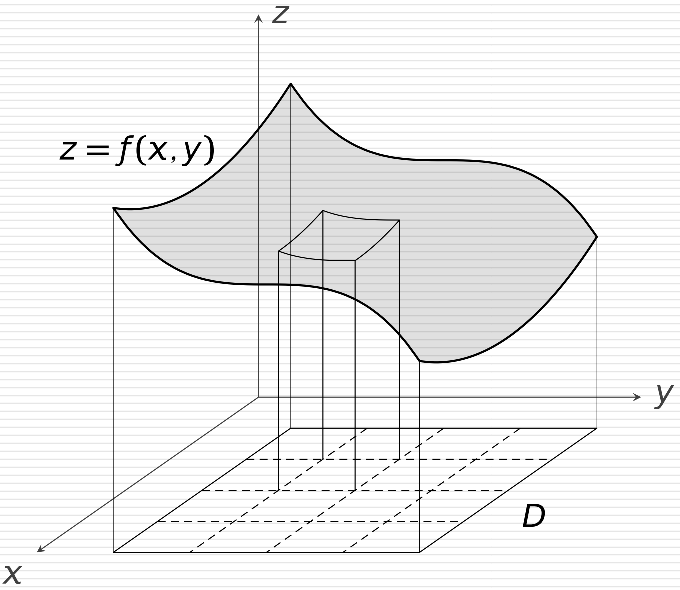


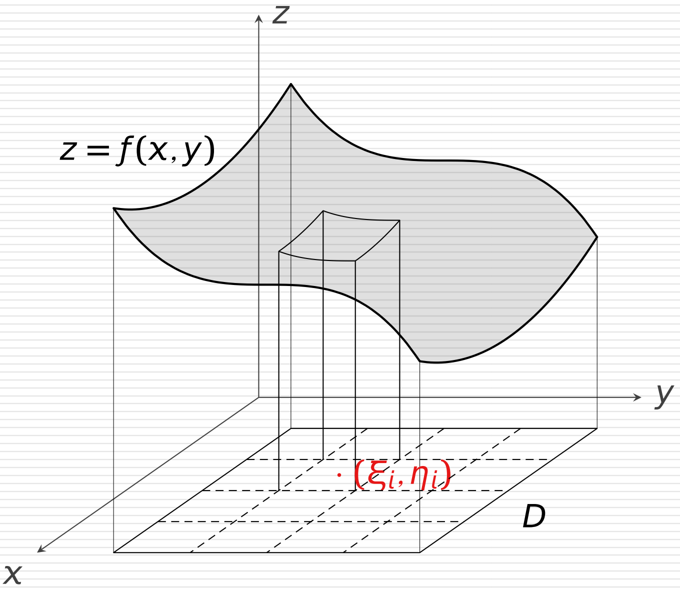
问题 如何求曲顶柱体的体积？

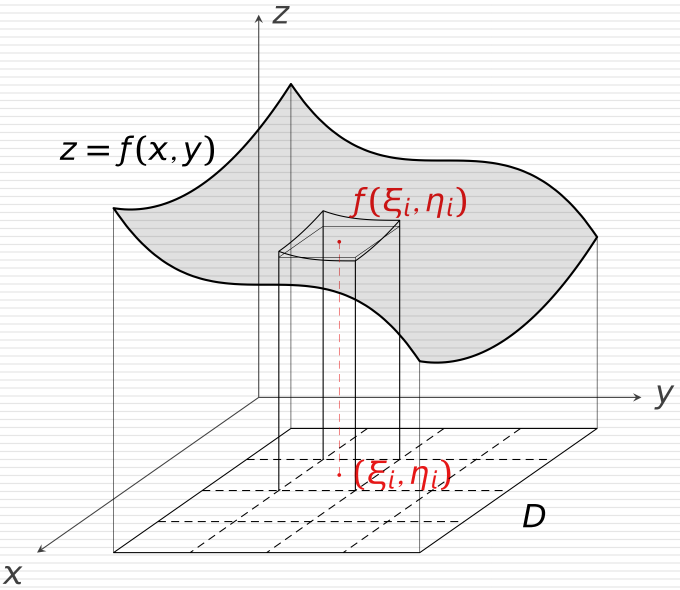

z
$z = f(x, y)$
y
D
x

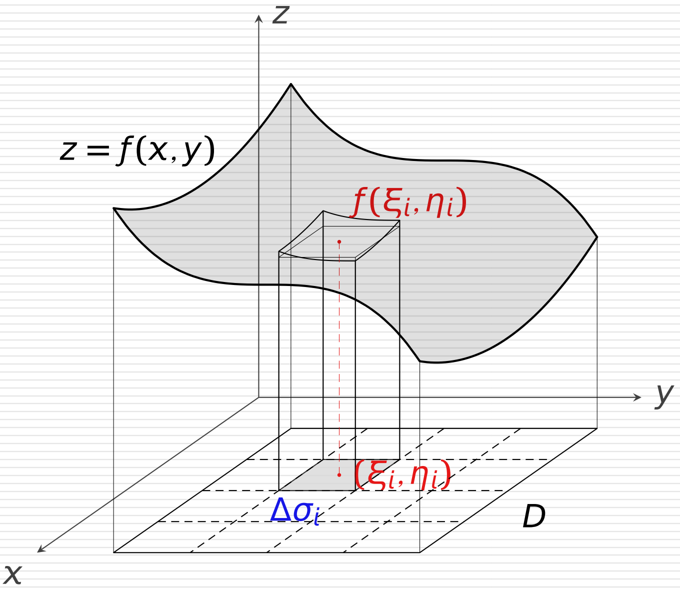

z
$z = f(x, y)$
y
D
x

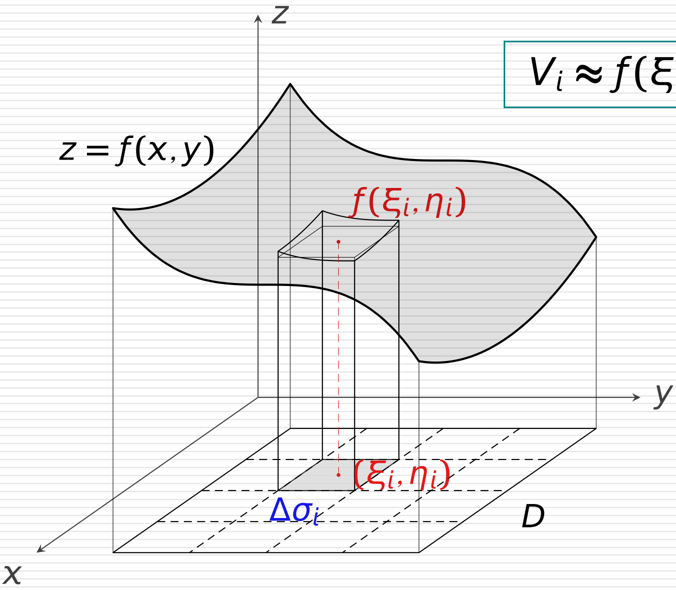

z
z = f(x, y)
y
D
x


z
$z = f(x, y)$
y
D
x

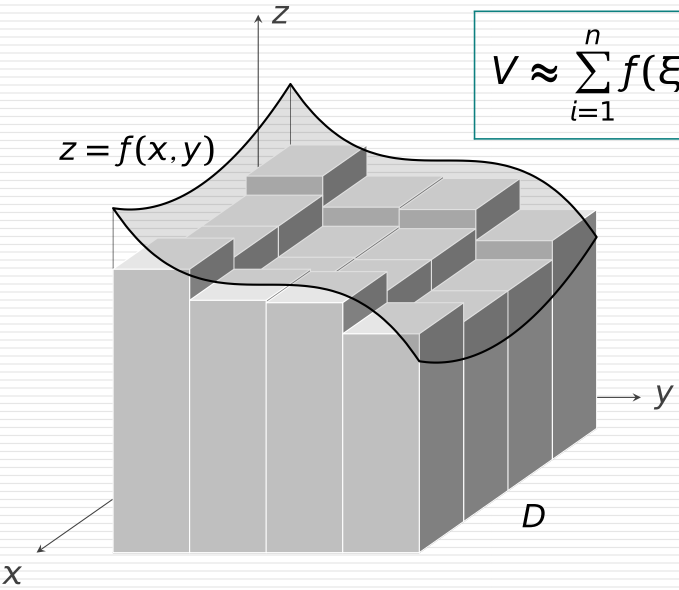

z
z = f(x, y)
y
(ξi, ηi)
D
x


z
$z = f(x, y)$
$f(\xi_i, \eta_i)$
y
(ξ_i, η_i)
D
x

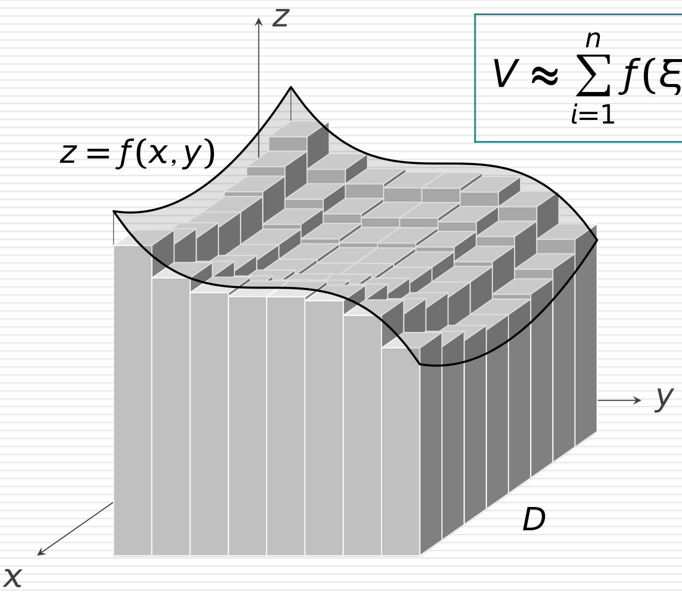

z
z = f(x, y)
f(ξ_i, η_i)
y
(ξ_i, η_i)
Δσ_i
D
x



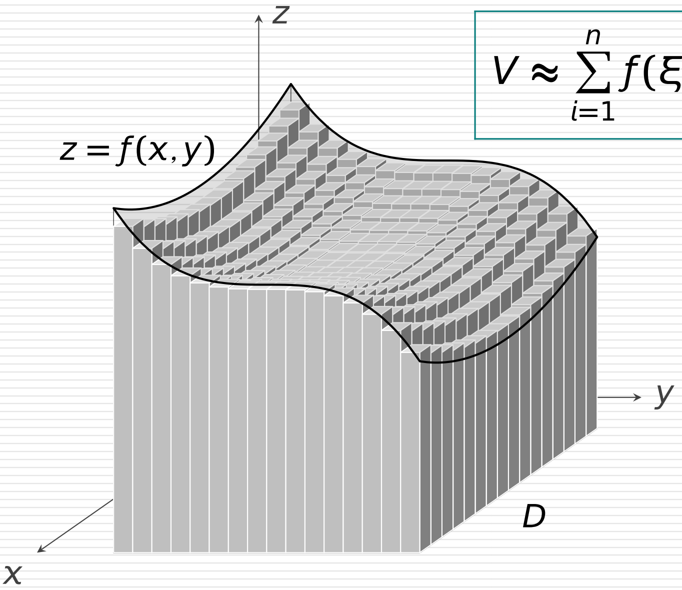
$$V_i \approx f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



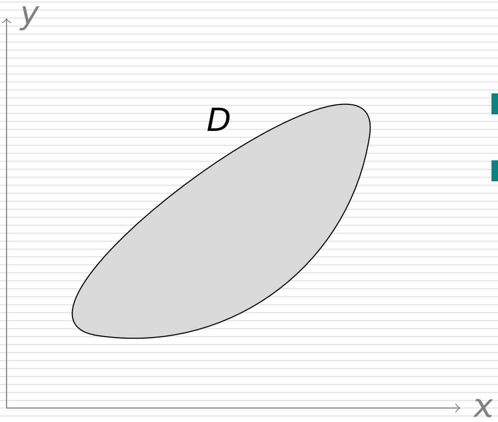
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



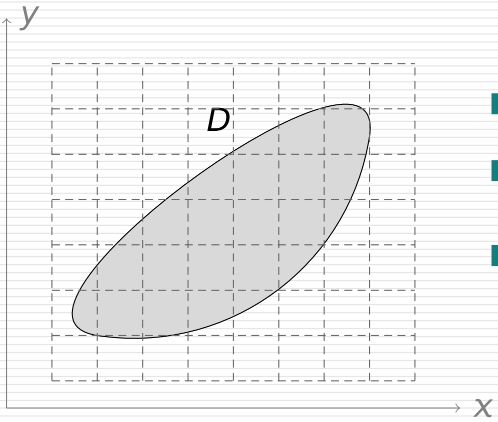
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$



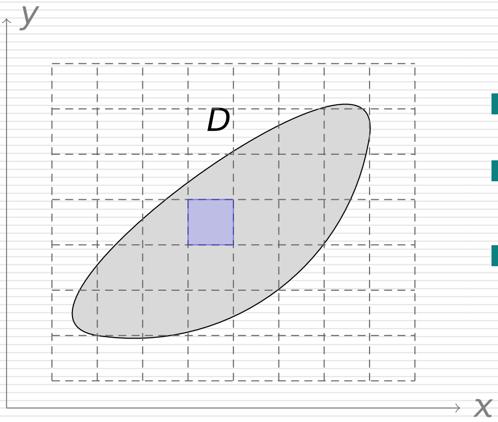
$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



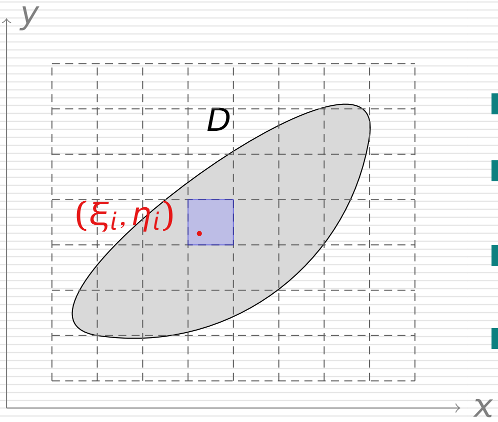
- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上



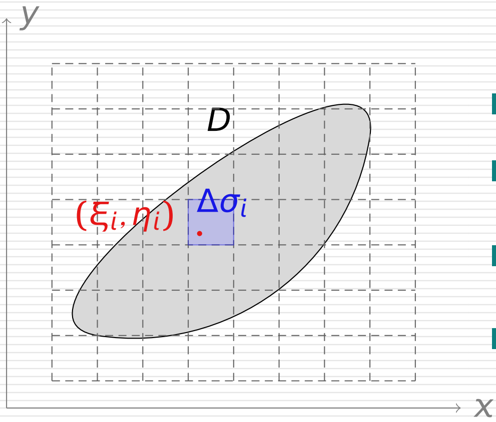
- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D = \bigcup_i D_i$



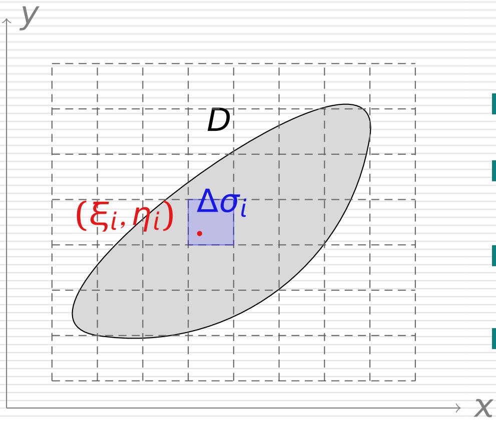
- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D = \bigcup_i D_i$



- D 是有界闭区域
- $f(x, y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D = \bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$

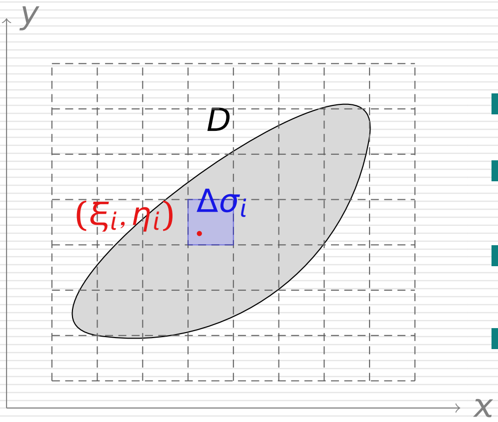


- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D=\bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$



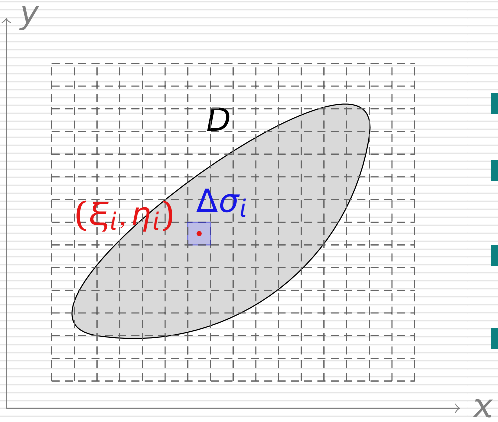
- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D=\bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$

$$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



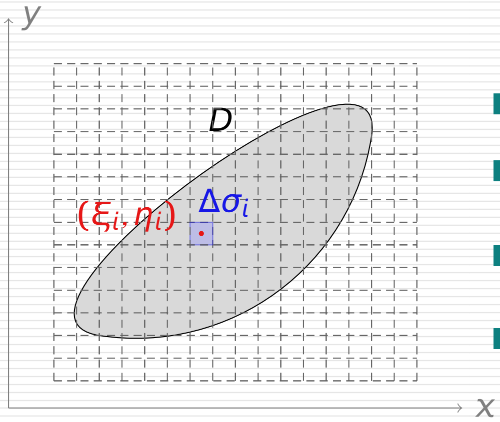
- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D=\bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



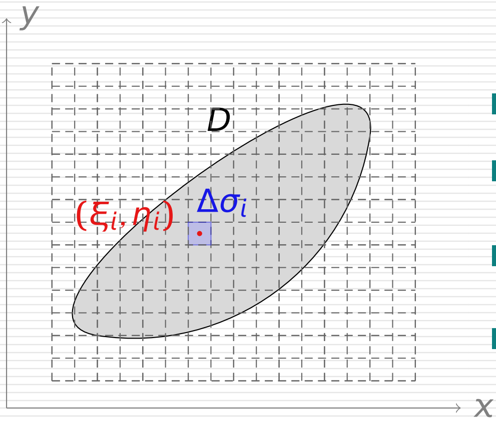
- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D=\bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D=\bigcup_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$



- D 是有界闭区域
- $f(x,y)$ 定义在 D 上
- 任意划分 $D=\bigcup\limits_i D_i$
- 任取点 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$

定义二重积分 $$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

二重积分

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 中：

二重积分

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 中：

- D 称为积分区域

二重积分

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 中：

- D 称为积分区域
- $f(x,y)$ 称为被积函数

二重积分

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 中：

- D 称为积分区域
- $f(x,y)$ 称为被积函数
- $\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元素

二重积分

在二重积分的记号 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 中：

- D 称为积分区域
- $f(x,y)$ 称为被积函数
- $\mathrm{d}\sigma$ 称为面积元素

定理　若 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$ 存在.

二重积分的性质

性质 1 (函数可加性)

$$\iint\limits_D \left[af(x,y)+bg(x,y)\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=a\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma+b\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

二重积分的性质

性质 2 (区域可加性) 设积分区域 D 可以划分为 D_1 和 D_2，则有

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

二重积分的性质

性质 3 如果在 D 上有 $f(x,y) \geqslant g(x,y)$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

二重积分的性质

性质 3　如果在 D 上有 $f(x,y) \geqslant g(x,y)$，则有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \geqslant \iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

性质 4　如果在 D 上有 $f(x,y) \equiv 1$，D 的面积为 A，则有

$$\iint_D 1\,\mathrm{d}\sigma = A$$

二重积分的性质

性质 5　设在 D 上 $m \leqslant f(x,y) \leqslant M$，$D$ 的面积为 A，则有

$$mA \leqslant \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma \leqslant MA$$

二重积分的性质

性质 6 (积分中值定理)　如果 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，D 的面积为 A，则在 D 中至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)A$$

第七节	二重积分
A	二重积分的概念和性质
B	用直角坐标计算二重积分
C	用极坐标计算二重积分

直角坐标中的二重积分

在直角坐标中，我们有 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，从而有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

X 型区域

如果区域 D 由直线 $x = a$ 和 $x = b$，以及曲线 $y = \phi_1(x)$ 和 $y = \phi_2(x)$ 围成，我们称 D 为 X 型区域.

X 型区域

如果区域 D 由直线 $x = a$ 和 $x = b$，以及曲线 $y = \phi_1(x)$ 和 $y = \phi_2(x)$ 围成，我们称 D 为 X 型区域.

即 X 型区域可以表示为：

$$D = \left\{(x, y) \middle| a \leqslant x \leqslant b, \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x)\right\}$$

用直角坐标计算二重积分 I

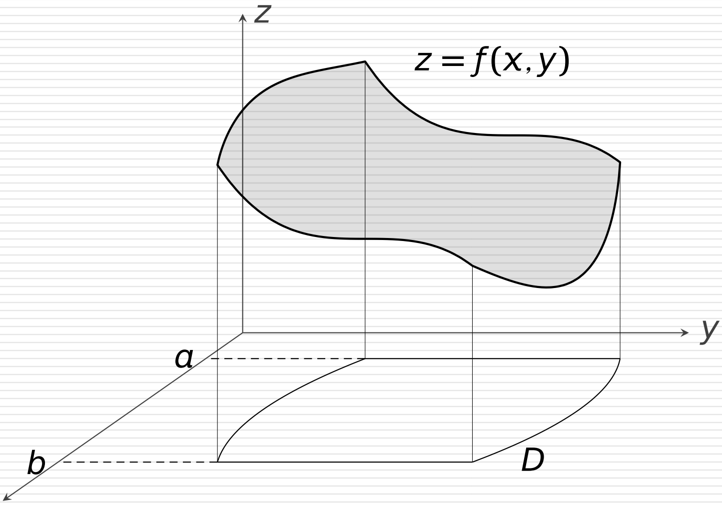
如果积分区域 D 为 X 型区域，即有

$$D = \left\{ (x, y) \middle| a \leqslant x \leqslant b, \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x) \right\}$$

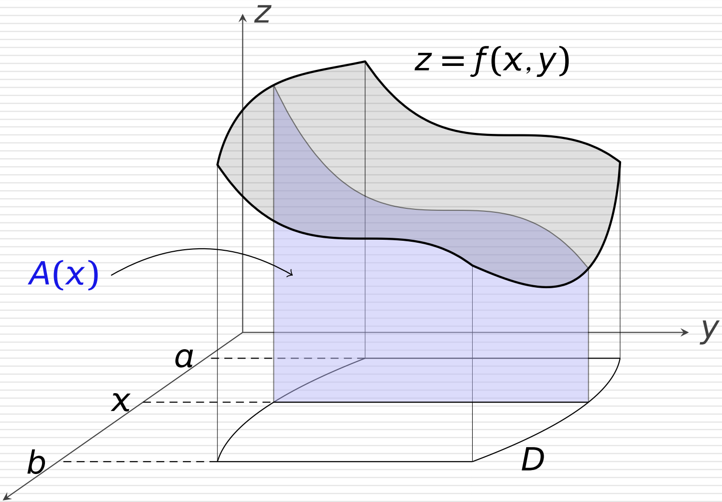
二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

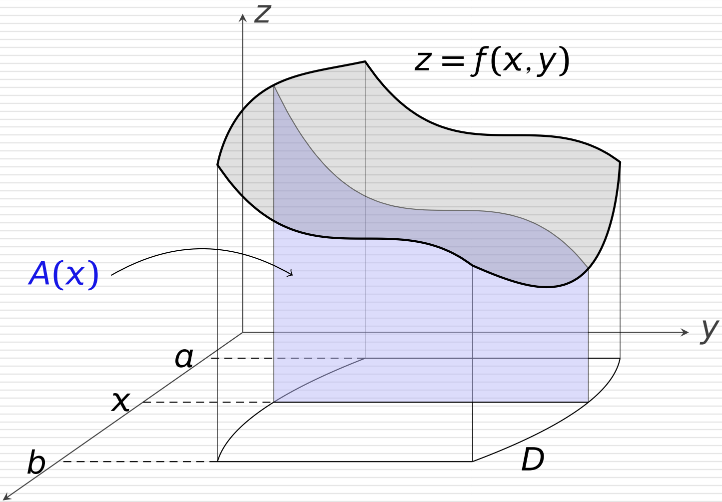
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$



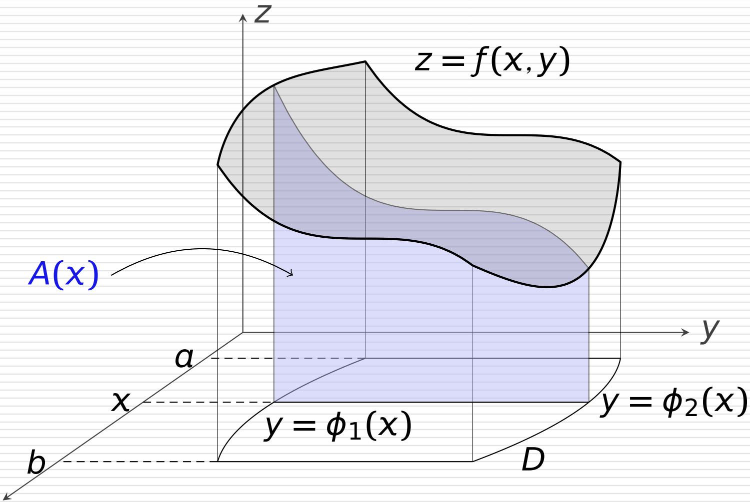
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$



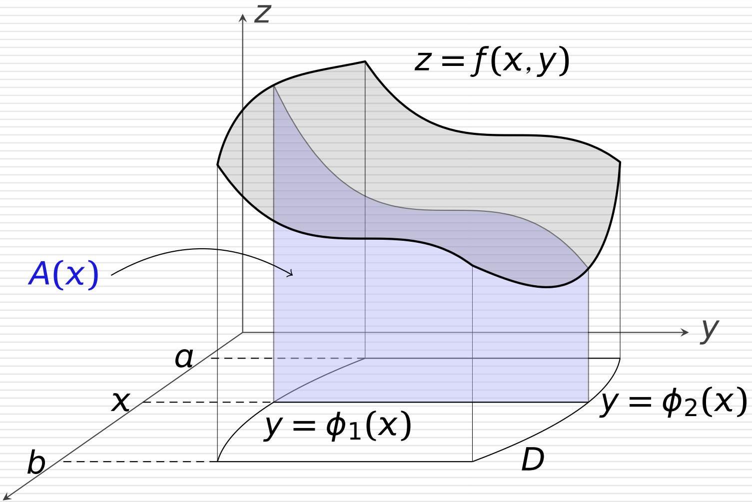
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x$$



$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$



例 1　计算二重积分 $\iint\limits_D x^2 y \, d\sigma$，其中 D 是由 $x = 0$，$y = 0$ 与 $x^2 + y^2 = 1$ 在第一象限所围成的图形.

例 1 计算二重积分 $\iint\limits_D x^2 y\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=0$，$y=0$ 与 $x^2+y^2=1$ 在第一象限所围成的图形.

例 2 计算二重积分 $\iint\limits_D (x-2y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=-1$，$y=1$ 与 $x+y-3=0$ 所围成的图形.

练习 1　计算二重积分 $\iint\limits_D (x+6y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=1$，$y=x$ 与 $y=5x$ 所围成的图形.

Y 型区域

如果区域 D 由直线 $y = c$ 和 $y = d$，以及曲线 $x = \phi_1(y)$ 和 $x = \phi_2(y)$ 围成，我们称 D 为 Y 型区域.

Y 型区域

如果区域 D 由直线 $y = c$ 和 $y = d$，以及曲线 $x = \phi_1(y)$ 和 $x = \phi_2(y)$ 围成，我们称 D 为 Y 型区域.

即 Y 型区域可以表示为：

$$D = \left\{(x, y) \middle| c \leqslant y \leqslant d, \phi_1(y) \leqslant x \leqslant \phi_2(y)\right\}$$

用直角坐标计算二重积分 II

如果积分区域 D 为 Y 型区域，即有

$$D = \left\{ (x, y) \middle| c \leqslant y \leqslant d, \phi_1(y) \leqslant x \leqslant \phi_2(y) \right\}$$

二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint_D f(x, y)\, \mathrm{d}\sigma = \int_c^d \left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x, y)\, \mathrm{d}x \right] \mathrm{d}y.$$

例 3　求二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=1$ 与 $x=y^2$ 所围成的图形.

例 3　求二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=1$ 与 $x=y^2$ 所围成的图形. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\dfrac{4}{5}$

例 3　求二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=1$ 与 $x=y^2$ 所围成的图形. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\dfrac{4}{5}$

练习 2　用 X 型区域和 Y 型区域分别计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=0$，$y=1$ 及 $x+y=2$ 所围成的图形.

例 3 求二重积分 $\iint\limits_D (x+y)\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=1$ 与 $x=y^2$ 所围成的图形. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\dfrac{4}{5}$

练习 2 用 X 型区域和 Y 型区域分别计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=0$，$y=1$ 及 $x+y=2$ 所围成的图形. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ $\dfrac{5}{24}$

矩形区域的二重积分

如果积分区域 D 为矩形区域，即

$$D = \left\{(x,y) \middle| a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\right\},$$

矩形区域的二重积分

如果积分区域 D 为矩形区域，即

$$D=\left\{(x,y)\middle|a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\right\},$$

而且被积函数 $f(x,y)$ 可分离变量，即

$$f(x,y)=g(x)h(y),$$

矩形区域的二重积分

如果积分区域 D 为矩形区域，即

$$D = \left\{(x,y) \middle| a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\right\},$$

而且被积函数 $f(x,y)$ 可分离变量，即

$$f(x,y) = g(x)h(y),$$

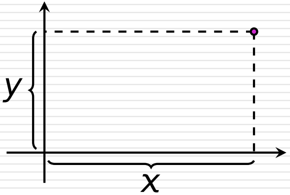
则二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \left(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\right).$$

第七节	二重积分
A	二重积分的概念和性质
B	用直角坐标计算二重积分
C	用极坐标计算二重积分

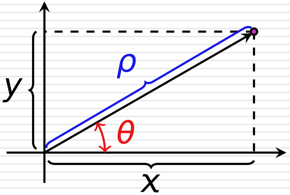
用极坐标计算二重积分

直角坐标 (x, y)



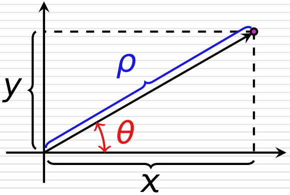
用极坐标计算二重积分

直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为



用极坐标计算二重积分

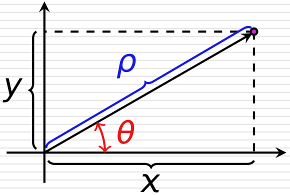
直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

用极坐标计算二重积分

直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 的关系为

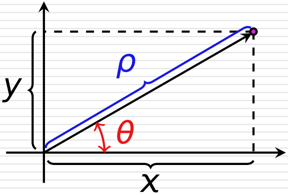


$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

如果积分区域是圆盘或者圆盘的一部分，用极坐标来计算更容易.

用极坐标计算二重积分

直角坐标 (x,y) 和极坐标 (ρ,θ) 的关系为

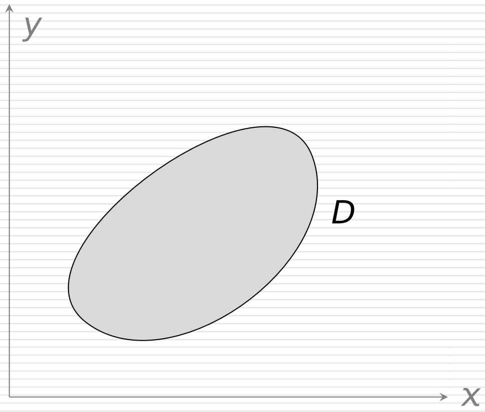


$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

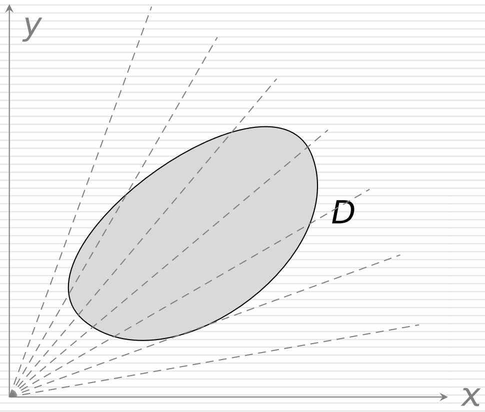
如果积分区域是圆盘或者圆盘的一部分，用极坐标来计算更容易．此时

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

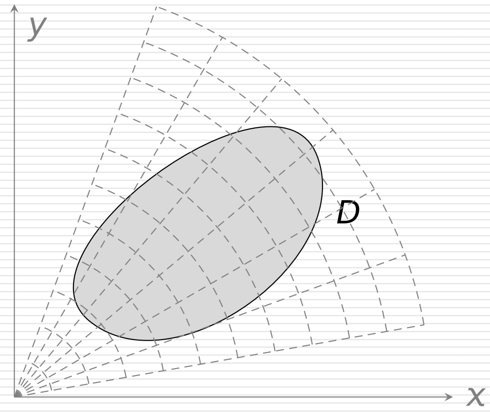
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



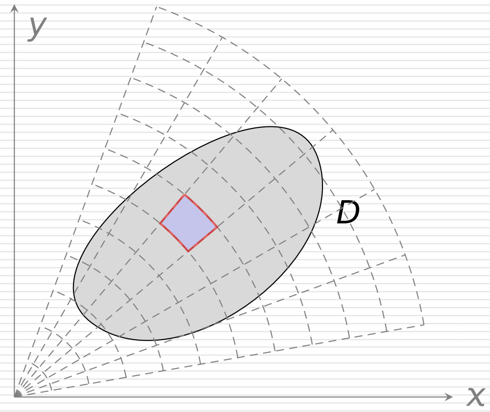
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



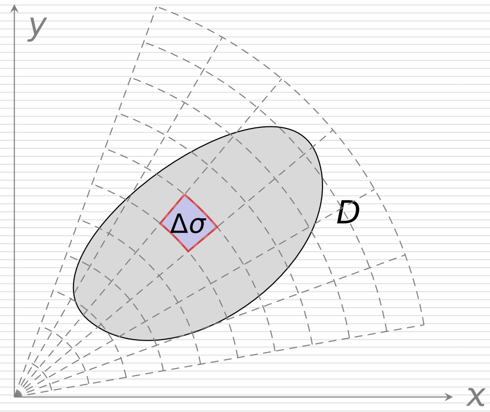
$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



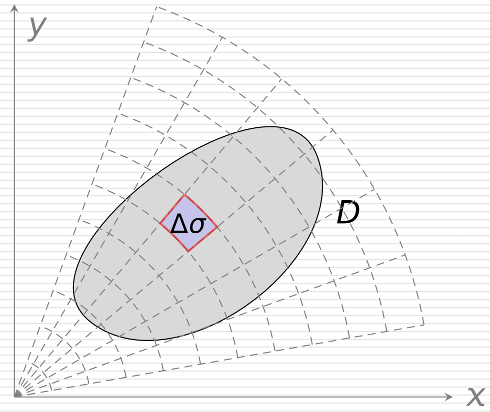
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

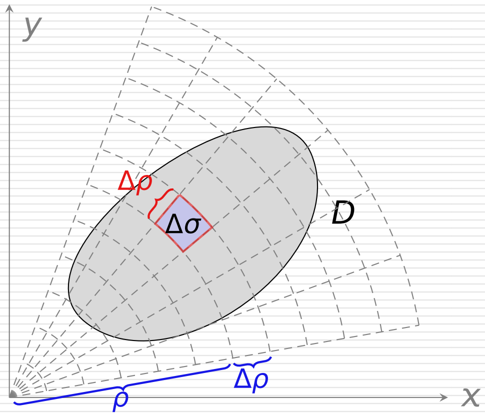


$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



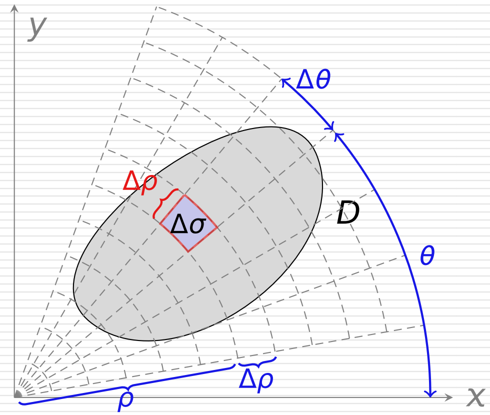
$$\Delta\sigma = ??$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$



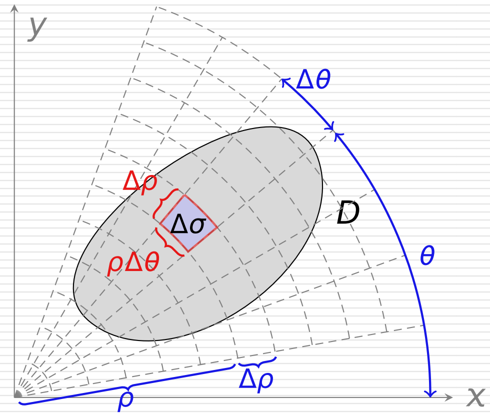
$$\Delta\sigma = ??$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



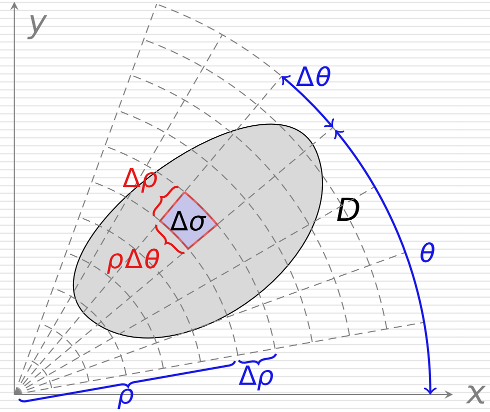
$$\Delta\sigma = ??$$

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



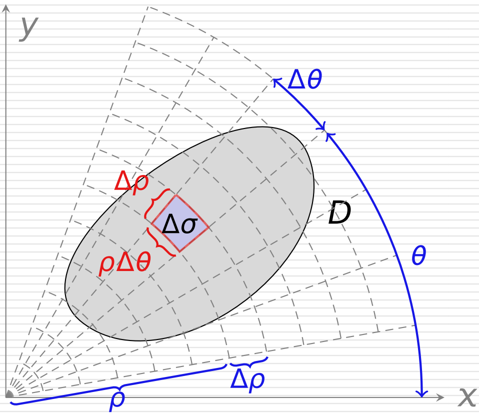
$$\Delta\sigma = ??$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



$$\Delta\sigma \approx \Delta\rho \cdot \rho\Delta\theta$$

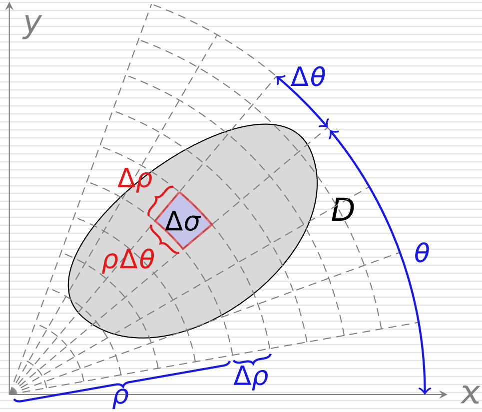
$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$



$$\Delta\sigma \approx \Delta\rho\cdot\rho\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\sigma \approx \rho\cdot\Delta\rho\cdot\Delta\theta$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

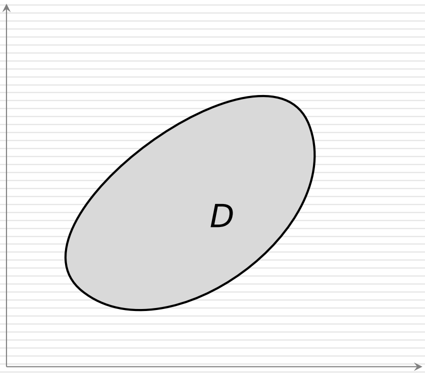


$$\Delta\sigma \approx \Delta\rho \cdot \rho\Delta\theta$$

$$\Rightarrow \Delta\sigma \approx \rho \cdot \Delta\rho \cdot \Delta\theta$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}\sigma = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = ??$$

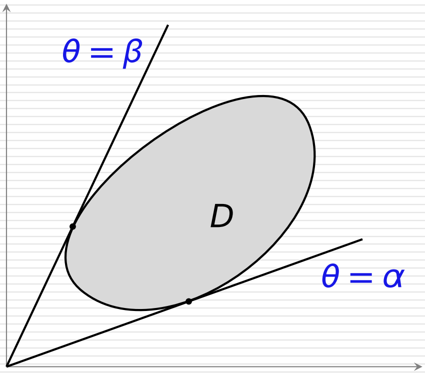


用极坐标表示积分区域

1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$

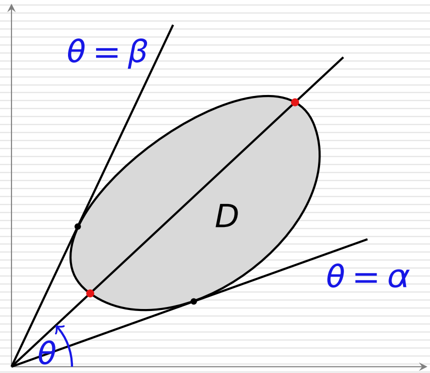


用极坐标表示积分区域

1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$

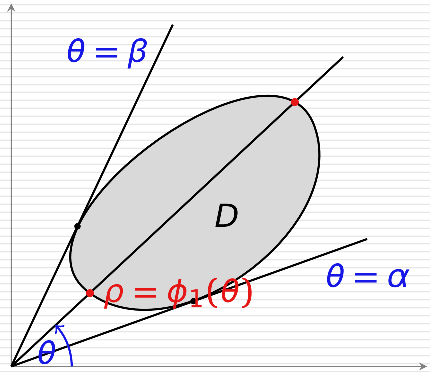


用极坐标表示积分区域

1. 先求 θ 的范围
2. 再求 ρ 的函数

$$D=\{(\rho,\theta)\mid \alpha\le\theta\le\beta, \qquad\qquad \}$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta = ??$$



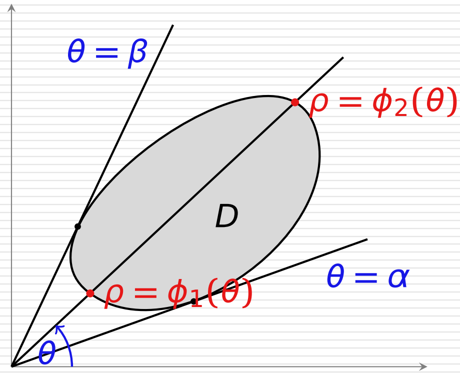
用极坐标表示积分区域

1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$D = \{(\rho,\theta)\,|\,\alpha \le \theta \le \beta, \qquad \}$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$



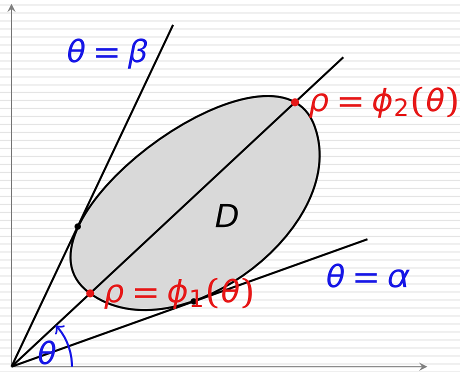
用极坐标表示积分区域

1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$D = \{(\rho, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta, \qquad \}$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = ??$$



用极坐标表示积分区域

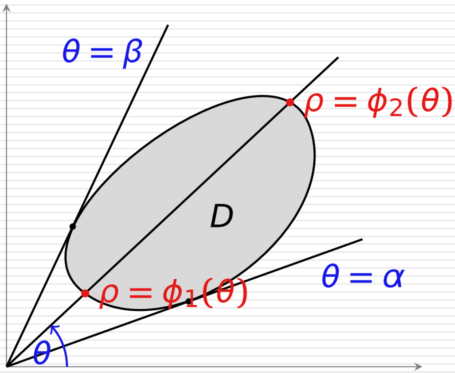
1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$D = \{(\rho, \theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ \phi_1(\theta) \le \rho \le \phi_2(\theta)\}$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta \left[\int_{\phi_1(\theta)}^{\phi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho\,d\rho\right] d\theta$$



用极坐标表示积分区域

1 先求 θ 的范围

2 再求 ρ 的函数

$$D = \{(\rho,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ \phi_1(\theta) \le \rho \le \phi_2(\theta)\}$$

用极坐标计算二重积分

注记 圆心在原点半径为 R 的圆盘 D 用极坐标表示为

$$D = \left\{(\rho, \theta) \,\middle|\, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \rho \leqslant R\right\}.$$

用极坐标计算二重积分

注记 圆心在原点半径为 R 的圆盘 D 用极坐标表示为

$$D = \left\{(\rho, \theta) \,\middle|\, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \rho \leqslant R\right\}.$$

例 5 计算二重积分 $\displaystyle\iint_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{1 + x^2 + y^2}$，其中 D 是半径为 1 的圆盘 $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

用极坐标计算二重积分

例 6　计算二重积分 $\iint\limits_{D} \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是圆 $x^2+y^2=2y$ 围成的区域.

练习 4　计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是半径为 1 的圆盘 $x^2+y^2 \leqslant 1$.

练习 4　计算二重积分 $\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}\,d\sigma$，其中 D 是半径为 1 的圆盘 $x^2+y^2 \leqslant 1$. …………………… $\frac{2\pi}{3}$

用极坐标计算二重积分

例 7 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是半径为 R 的圆盘 $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

用极坐标计算二重积分

例 7 计算二重积分 $\iint\limits_D e^{-(x^2+y^2)}\,d\sigma$，其中 D 是半径为 R 的圆盘 $x^2+y^2 \leqslant R^2$.

注记 令 $R \to +\infty$，可以得到泊松积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

复习 1 计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=2$，$y=1$ 与 $y=x$ 所围成的图形.

复习 1　计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $x=2$，$y=1$ 与 $y=x$ 所围成的图形.

复习 2　计算二重积分 $\iint\limits_D x\sqrt{y}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 是由 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 所围成的图形.