

微积分课程

第九章 · 微分方程与差分方程

2020年8月29日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节

微分方程的一般概念

第二节

一阶微分方程

第三节

二阶微分方程*

第四节

差分方程的一般概念

第五节

一阶常系数线性差分方程

第六节

二阶常系数线性差分方程*

定义 1 含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程.

定义 1 含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程. 其中出现的导数的最高阶数 n , 称为微分方程的阶.

定义 1 含有未知函数的导数或微分的方程

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程. 其中出现的导数的最高阶数 n , 称为微分方程的阶.

例子 判别下列微分方程的阶数:

$$(1) \frac{dy}{dx} + y = x$$

$$(2) x dx - y^2 dy = 0$$

$$(3) y'' + y' = e^x$$

例 1 求解一阶微分方程 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y|_{x=1} = 3 \end{cases}$

例 1 求解一阶微分方程
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y|_{x=1} = 3 \end{cases}$$

解答 对方程两边积分，得到

$$y = x^2 + C \quad (C \text{ 为任意常数})$$

例 1 求解一阶微分方程
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y|_{x=1} = 3 \end{cases}$$

解答 对方程两边积分, 得到

$$y = x^2 + C \quad (C \text{ 为任意常数})$$

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式, 得到 $C = 2$.

例 1 求解一阶微分方程
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y|_{x=1} = 3 \end{cases}$$

解答 对方程两边积分, 得到

$$y = x^2 + C \quad (C \text{ 为任意常数})$$

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式, 得到 $C = 2$. 因此

$$y = x^2 + 2$$

例 1 求解一阶微分方程
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y|_{x=1} = 3 \end{cases}$$

解答 对方程两边积分, 得到

$$y = x^2 + C \quad (C \text{ 为任意常数}) \dots\dots\dots \text{通解}$$

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式, 得到 $C = 2$. 因此

$$y = x^2 + 2$$

例 1 求解一阶微分方程 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y|_{x=1} = 3 \end{cases}$ 初始条件

解答 对方程两边积分, 得到

$$y = x^2 + C \quad (C \text{ 为任意常数}) \dots\dots\dots \text{通解}$$

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式, 得到 $C = 2$. 因此

$$y = x^2 + 2$$

例 1 求解一阶微分方程
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 2x \\ y|_{x=1} = 3 \dots\dots \text{初始条件} \end{cases}$$

解答 对方程两边积分, 得到

$$y = x^2 + C \quad (C \text{ 为任意常数}) \dots\dots\dots \text{通解}$$

将 $x = 1$ 时 $y = 3$ 代入上式, 得到 $C = 2$. 因此

$$y = x^2 + 2 \dots\dots\dots \text{特解}$$

例 2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$

例 2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分, 得到

① $y' = -x + C_1$ (C_1 为常数)

例2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分, 得到

$$\textcircled{1} \quad y' = -x + C_1 \quad (C_1 \text{ 为常数})$$

再对前式两边积分, 得到

$$\textcircled{2} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数})$$

例2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分, 得到

$$\textcircled{1} \quad y' = -x + C_1 \quad (C_1 \text{ 为常数})$$

再对前式两边积分, 得到

$$\textcircled{2} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数}) \dots \text{通解}$$

例2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分, 得到

$$\textcircled{1} \quad y' = -x + C_1 \quad (C_1 \text{ 为常数})$$

再对前式两边积分, 得到

$$\textcircled{2} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数}) \dots \text{通解}$$

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 $\textcircled{1}$, 得到 $C_1 = 1$.

例2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分, 得到

$$\textcircled{1} \quad y' = -x + C_1 \quad (C_1 \text{ 为常数})$$

再对前式两边积分, 得到

$$\textcircled{2} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数}) \dots \text{通解}$$

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 $\textcircled{1}$, 得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 $\textcircled{2}$, 得到 $C_2 = 0$.

例2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分, 得到

$$\textcircled{1} \quad y' = -x + C_1 \quad (C_1 \text{ 为常数})$$

再对前式两边积分, 得到

$$\textcircled{2} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数}) \dots \text{通解}$$

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 $\textcircled{1}$, 得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 $\textcircled{2}$, 得到 $C_2 = 0$. 因此

例2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分, 得到

$$\textcircled{1} \quad y' = -x + C_1 \quad (C_1 \text{ 为常数})$$

再对前式两边积分, 得到

$$\textcircled{2} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数}) \dots \text{通解}$$

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 $\textcircled{1}$, 得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 $\textcircled{2}$, 得到 $C_2 = 0$. 因此

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x$$

例2 求解二阶微分方程 $\begin{cases} y'' = -1, \\ y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 1. \end{cases}$

解答 对方程两边积分, 得到

$$\textcircled{1} \quad y' = -x + C_1 \quad (C_1 \text{ 为常数})$$

再对前式两边积分, 得到

$$\textcircled{2} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad (C_1, C_2 \text{ 为常数}) \dots \text{通解}$$

将初始条件 $y'|_{x=0} = 1$ 代入 $\textcircled{1}$, 得到 $C_1 = 1$.

将初始条件 $y|_{x=0} = 0$ 代入 $\textcircled{2}$, 得到 $C_2 = 0$. 因此

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + x \dots \dots \dots \text{特解}$$

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y') = 0$. 对应的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$.

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y') = 0$. 对应的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$.

在这一节中, 我们将研究 3 种一阶微分方程:

一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为 $F(x, y, y') = 0$. 对应的初始条件为 $y|_{x=x_0} = y_0$.

在这一节中，我们将研究 3 种一阶微分方程：

- 1 可分离变量微分方程
- 2 齐次微分方程
- 3 一阶线性微分方程

可分离变量微分方程

例2 求微分方程 $y' = -\frac{x}{y}$ 在初始条件 $y|_{x=0} = 1$ 下的特解.

可分离变量微分方程

例 3 求微分方程 $y' = 2xy^2$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=0} = -1$ 下的特解.

解答 通解为 $y = -\frac{1}{x^2 + C}$.

可分离变量微分方程

例 3 求微分方程 $y' = 2xy^2$ 的通解, 以及在初始条件 $y|_{x=0} = -1$ 下的特解.

解答 通解为 $y = -\frac{1}{x^2 + C}$.

注记 通解 \neq 全部解.

第二节

一阶微分方程

A

可分离变量微分方程

B

齐次微分方程

C

一阶线性微分方程

(二) 齐次微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程称为齐次微分方程.

(二) 齐次微分方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的微分方程称为齐次微分方程.

例如:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - 2y}{x + y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$$

齐次微分方程的解法

- 1 标准化：将微分方程化为 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$
- 2 换元：令 $v = \frac{y}{x}$,

齐次微分方程的解法

- 1 标准化：将微分方程化为 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$
- 2 换元：令 $v = \frac{y}{x}$ ，则有 $y = xv$ ，

齐次微分方程的解法

- 1 标准化：将微分方程化为 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$
- 2 换元：令 $v = \frac{y}{x}$ ，则有 $y = xv$ ，从而
$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v.$$

齐次微分方程的解法

1 标准化: 将微分方程化为 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

2 换元: 令 $v = \frac{y}{x}$, 则有 $y = xv$, 从而

$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$. 代入原方程得到

$$x \frac{dv}{dx} + v = f(v)$$

齐次微分方程的解法

1 标准化: 将微分方程化为 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

2 换元: 令 $v = \frac{y}{x}$, 则有 $y = xv$, 从而

$\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$. 代入原方程得到

$$x \frac{dv}{dx} + v = f(v)$$

3 分离变量: 得到 $\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$

齐次微分方程的解法

- 1 标准化：将微分方程化为 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$
- 2 换元：令 $v = \frac{y}{x}$ ，则有 $y = xv$ ，从而 $\frac{dy}{dx} = x \frac{dv}{dx} + v$ 。代入原方程得到

$$x \frac{dv}{dx} + v = f(v)$$

- 3 分离变量：得到 $\frac{dv}{f(v) - v} = \frac{dx}{x}$

- 4 两边积分：得到通解，然后将 v 代回

齐次微分方程

例 4 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ 的通解.

齐次微分方程

例 4 求 $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ 的通解.

练习 3 求微分方程 $y' = \frac{y+x}{x}$ 的通解.

例 5 求微分方程 $\left(x \tan \frac{y}{x} + y\right) dx = x dy$ 在初始条件 $y|_{x=2} = \pi$ 下的特解.

例 5 求微分方程 $\left(x \tan \frac{y}{x} + y\right) dx = x dy$ 在初始条件 $y|_{x=2} = \pi$ 下的特解.

解答 方程即为 $\frac{dy}{dx} = \tan \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

例 5 求微分方程 $\left(x \tan \frac{y}{x} + y\right) dx = x dy$ 在初始条件 $y|_{x=2} = \pi$ 下的特解.

解答 方程即为 $\frac{dy}{dx} = \tan \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

■ 令 $v = \frac{y}{x}$, 得到 $x \frac{dv}{dx} + v = \tan v + v$.

例 5 求微分方程 $\left(x \tan \frac{y}{x} + y\right) dx = x dy$ 在初始条件 $y|_{x=2} = \pi$ 下的特解.

解答 方程即为 $\frac{dy}{dx} = \tan \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

■ 令 $v = \frac{y}{x}$, 得到 $x \frac{dv}{dx} + v = \tan v + v$.

■ 分离变量, 得到 $\cot v dv = \frac{dx}{x}$.

例 5 求微分方程 $(x \tan \frac{y}{x} + y) dx = x dy$ 在初始条件 $y|_{x=2} = \pi$ 下的特解.

解答 方程即为 $\frac{dy}{dx} = \tan \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

■ 令 $v = \frac{y}{x}$, 得到 $x \frac{dv}{dx} + v = \tan v + v$.

■ 分离变量, 得到 $\cot v dv = \frac{dx}{x}$.

■ 两边积分, 得到 $\ln |\sin v| = \ln |x| + C_0$.

■ 整理等式, 得到 $\sin v = Cx$, 即 $\sin \frac{y}{x} = Cx$.

例5 求微分方程 $(x \tan \frac{y}{x} + y) dx = x dy$ 在初始条件 $y|_{x=2} = \pi$ 下的特解.

解答 方程即为 $\frac{dy}{dx} = \tan \frac{y}{x} + \frac{y}{x}$.

■ 令 $v = \frac{y}{x}$, 得到 $x \frac{dv}{dx} + v = \tan v + v$.

■ 分离变量, 得到 $\cot v dv = \frac{dx}{x}$.

■ 两边积分, 得到 $\ln |\sin v| = \ln |x| + C_0$.

■ 整理等式, 得到 $\sin v = Cx$, 即 $\sin \frac{y}{x} = Cx$.

代入初始条件, 得到 $C = \frac{1}{2}$, 故特解为 $\sin \frac{y}{x} = \frac{1}{2}x$.

练习 4 求微分方程 $(x^2 + y^2) dx - xy dy = 0$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 下的特解.

(三) 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

(三) 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$ ，称为一阶线性 $\underline{齐次}$ 微分方程
- 若 $q(x) \not\equiv 0$ ，称为一阶线性 $\underline{非齐次}$ 微分方程

(三) 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$, 称为一阶线性齐次微分方程
 - 若 $q(x) \not\equiv 0$, 称为一阶线性非齐次微分方程
-

(1) $y' + xy = x^2$ ✓

(2) $y' + y^2 = \sin x$ ✗

(三) 一阶线性微分方程

一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

- 若 $q(x) \equiv 0$, 称为一阶线性齐次微分方程
 - 若 $q(x) \not\equiv 0$, 称为一阶线性非齐次微分方程
-

(1) $y' + xy = x^2$ ✓

(2) $y' + y^2 = \sin x$ ✗

(3) $yy' + xy = 1$ ✗

一阶线性齐次微分方程

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

.....

分离变量得到

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx$$

一阶线性齐次微分方程

先看一阶线性齐次微分方程 $y' + p(x)y = 0$.

.....

分离变量得到

$$\frac{dy}{y} = -p(x) dx$$

两边同时积分，得到

$$\ln |y| = -\int p(x) dx + C_0$$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

例 6 求微分方程 $y' + \frac{1}{x}y = 1$ 的通解.

1 恒等变形: $xy' + y = x$

2 合并左边: $(xy)' = x$

3 两边积分: $xy = \frac{1}{2}x^2 + C$

4 得到通解: $y = \frac{1}{2}x + C\frac{1}{x}$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

例 7 求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

例 7 求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形： $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

例 7 求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形: $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

2 合并左边: $\left(\frac{1}{x}y\right)' = x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

例 7 求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形: $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

2 合并左边: $(\frac{1}{x}y)' = x$

3 两边积分: $\frac{1}{x}y = \frac{1}{2}x^2 + C$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....
例 7 求微分方程 $y' - \frac{1}{x}y = x^2$ 的通解.

1 恒等变形: $\frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = x$

2 合并左边: $(\frac{1}{x}y)' = x$

3 两边积分: $\frac{1}{x}y = \frac{1}{2}x^2 + C$

4 得到通解: $y = \frac{1}{2}x^3 + Cx$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

例 8 求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

例 8 求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1 恒等变形: $e^x y' + e^x y = e^x$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

例 8 求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1 恒等变形: $e^x y' + e^x y = e^x$

2 合并左边: $(e^x y)' = e^x$

3 两边积分: $e^x y = e^x + C$

一阶线性非齐次微分方程

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

例 8 求微分方程 $y' + y = 1$ 的通解.

1 恒等变形: $e^x y' + e^x y = e^x$

2 合并左边: $(e^x y)' = e^x$

3 两边积分: $e^x y = e^x + C$

4 得到通解: $y = 1 + Ce^{-x}$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

1 恒等变形: $v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

1 恒等变形: $v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

2 合并左边: $(v(x)y)' = q(x)v(x)$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

1 恒等变形: $v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

2 合并左边: $(v(x)y)' = q(x)v(x)$

3 两边积分: $v(x)y = \int q(x)v(x) dx + C$

4 得到通解: $y = \frac{1}{v(x)} \left(\int q(x)v(x) dx + C \right)$

积分因子法

再看一阶线性非齐次微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$.

.....

1 恒等变形: $v(x)y' + p(x)v(x)y = q(x)v(x)$

2 合并左边: $(v(x)y)' = q(x)v(x)$

3 两边积分: $v(x)y = \int q(x)v(x) dx + C$

4 得到通解: $y = \frac{1}{v(x)} \left(\int q(x)v(x) dx + C \right)$

问题 积分因子 $v(x)$ 是否一定存在? 如何求出它?

积分因子法

问题 寻找 $v = v(x)$ 使得 $v y' + p(x) v y = (v y)'$.

解答 展开等式右边得 $v y' + p(x) v y = v y' + v' y$.

积分因子法

问题 寻找 $v = v(x)$ 使得 $vy' + p(x)vy = (vy)'$.

解答 展开等式右边得 $vy' + p(x)vy = vy' + v'y$.

■ 化简条件: $p(x)v = v'$,

积分因子法

问题 寻找 $v = v(x)$ 使得 $vy' + p(x)vy = (vy)'$.

解答 展开等式右边得 $vy' + p(x)vy = vy' + v'y$.

■ 化简条件: $p(x)v = v'$, 即 $p(x)v = \frac{dv}{dx}$

积分因子法

问题 寻找 $v = v(x)$ 使得 $vy' + p(x)vy = (vy)'$.

解答 展开等式右边得 $vy' + p(x)vy = vy' + v'y$.

- 化简条件: $p(x)v = v'$, 即 $p(x)v = \frac{dv}{dx}$
- 分离变量: $\frac{dv}{v} = p(x)$

积分因子法

问题 寻找 $v = v(x)$ 使得 $vy' + p(x)vy = (vy)'$.

解答 展开等式右边得 $vy' + p(x)vy = vy' + v'y$.

- 化简条件: $p(x)v = v'$, 即 $p(x)v = \frac{dv}{dx}$
- 分离变量: $\frac{dv}{v} = p(x)$
- 求解方程: $\ln v = \int p(x) dx$, 即 $v = e^{\int p(x) dx}$

一阶线性微分方程的通解

对一阶线性非齐次微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

令积分因子为

$$v(x) = e^{\int p(x) dx}$$

一阶线性微分方程的通解

对一阶线性非齐次微分方程

$$y' + p(x)y = q(x)$$

令积分因子为

$$v(x) = e^{\int p(x) dx}$$

则方程的通解为

$$y = \frac{1}{v(x)} \left(\int q(x)v(x) dx + C \right)$$

例 9 求 $y' - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$ 的通解.

复习1 求方程 $xy dx + \sqrt{1-x^2} dy = 0$ 的通解.

复习 2 求微分方程 $(x + y) dx + x dy = 0$ 的通解.

复习3 求一阶微分方程 $xy' + y = 3x^2$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 下的特解.

复习 3 求一阶微分方程 $xy' + y = 3x^2$ 在初始条件 $y|_{x=1} = 0$ 下的特解.

解答 通解 $y = \frac{1}{x} (x^3 + C)$, 特解 $y = \frac{1}{x} (x^3 - 1)$.

一阶微分方程

例 10 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+y}$.

第一节

微分方程的一般概念

第二节

一阶微分方程

第三节

二阶微分方程*

第四节

差分方程的一般概念

第五节

一阶常系数线性差分方程

第六节

二阶常系数线性差分方程*

第三节

二阶微分方程*

A

可降阶的二阶微分方程

B

二阶常系数线性微分方程

(-) $y'' = f(x)$ 型

例 1 求 $y'' = e^{2x}$ 的通解.

(二) $y'' = f(x, y')$ 型

例 2 求 $y'' = \frac{1}{x} y'$ 的通解.

(二) $y'' = f(x, y')$ 型

例 2 求 $y'' = \frac{1}{x} y'$ 的通解.

练习 1 求 $xy'' + y' = 0$ 的通解.

(三) $y'' = f(y, y')$ 型

例3 求 $y'' = \frac{3}{2}y^2$ 在初始条件 $y|_{x=3} = 1, y'|_{x=3} = 1$ 下的特解.

(三) $y'' = f(y, y')$ 型

例 3 求 $y'' = \frac{3}{2}y^2$ 在初始条件 $y|_{x=3} = 1$, $y'|_{x=3} = 1$ 下的特解.

练习 2 求 $y'' = 3\sqrt{y}$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1$, $y'|_{x=0} = 2$ 的特解.

第三节

二阶微分方程*

A

可降阶的二阶微分方程

B

二阶常系数线性微分方程

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程: $y'' + py' + qy = 0$

.....

例 4 求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

.....

例4 求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

.....

例4 求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

- 1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$
- 2 变量代换：令 $z = y' + y$ ，则 $z' + 3z = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

.....

例4 求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

- 1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$
- 2 变量代换：令 $z = y' + y$ ，则 $z' + 3z = 0$
- 3 求解方程：得 $z = Ce^{-3x}$ ，即 $y' + y = Ce^{-3x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

.....

例4 求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = 0$ 的通解.

- 1 恒等变形：得 $(y'' + y') + 3(y' + y) = 0$
- 2 变量代换：令 $z = y' + y$ ，则 $z' + 3z = 0$
- 3 求解方程：得 $z = Ce^{-3x}$ ，即 $y' + y = Ce^{-3x}$
- 4 求解方程：得 $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程: $y'' + py' + qy = 0$

.....

例5 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

.....

例5 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

.....

例5 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

1 恒等变形：得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$

2 变量代换：令 $z = y' + 2y$ ，则 $z' + 2z = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程: $y'' + py' + qy = 0$

.....

例5 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

- 1 恒等变形: 得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$
- 2 变量代换: 令 $z = y' + 2y$, 则 $z' + 2z = 0$
- 3 求解方程: 得 $z = Ce^{-2x}$, 即 $y' + 2y = Ce^{-2x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程: $y'' + py' + qy = 0$

.....

例5 求微分方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

- 1 恒等变形: 得 $(y'' + 2y') + 2(y' + 2y) = 0$
- 2 变量代换: 令 $z = y' + 2y$, 则 $z' + 2z = 0$
- 3 求解方程: 得 $z = Ce^{-2x}$, 即 $y' + 2y = Ce^{-2x}$
- 4 求解方程: 得 $y = (C_1 + C_2x)e^{-2x}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

- 1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
- 2 变量代换：令 $z = y' - ay$ ，则 $z' - bz = 0$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

- 1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
- 2 变量代换：令 $z = y' - ay$ ，则 $z' - bz = 0$
- 3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$ ，即 $y' - ay = Ce^{bx}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

- 1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
- 2 变量代换：令 $z = y' - ay$ ，则 $z' - bz = 0$
- 3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$ ，即 $y' - ay = Ce^{bx}$
- 4 求解方程：得 $y = e^{ax} \left(\int Ce^{(b-a)x} dx + C' \right)$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

- 1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
- 2 变量代换：令 $z = y' - ay$ ，则 $z' - bz = 0$
- 3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$ ，即 $y' - ay = Ce^{bx}$
- 4 求解方程：得 $y = e^{ax} \left(\int Ce^{(b-a)x} dx + C' \right)$
 - 当 $a \neq b$ 时， $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

- 1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
- 2 变量代换：令 $z = y' - ay$ ，则 $z' - bz = 0$
- 3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$ ，即 $y' - ay = Ce^{bx}$
- 4 求解方程：得 $y = e^{ax} \left(\int Ce^{(b-a)x} dx + C' \right)$
 - 当 $a \neq b$ 时， $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$
 - 当 $a = b$ 时， $y = (C_1 + C_2 x)e^{ax}$

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

- 1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
- 2 变量代换：令 $z = y' - ay$ ，则 $z' - bz = 0$
- 3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$ ，即 $y' - ay = Ce^{bx}$
- 4 求解方程：得 $y = e^{ax} \left(\int Ce^{(b-a)x} dx + C' \right)$
 - 当 $a \neq b$ 时， $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$
 - 当 $a = b$ 时， $y = (C_1 + C_2 x)e^{ax}$

问题 常数 a 和 b 是否一定存在？如何求出它？

二阶常系数齐次线性方程

研究二阶常系数齐次线性方程： $y'' + py' + qy = 0$

- 1 恒等变形：得 $(y'' - ay') - b(y' - ay) = 0$
- 2 变量代换：令 $z = y' - ay$ ，则 $z' - bz = 0$
- 3 求解方程：得 $z = Ce^{bx}$ ，即 $y' - ay = Ce^{bx}$
- 4 求解方程：得 $y = e^{ax} \left(\int Ce^{(b-a)x} dx + C' \right)$
 - 当 $a \neq b$ 时， $y = C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}$
 - 当 $a = b$ 时， $y = (C_1 + C_2 x)e^{ax}$

问题 常数 a 和 b 是否一定存在？如何求出它？

解答 a 和 b 是方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根。

研究二阶常系数线性齐次方程： $y'' + py' + qy = 0$.

研究二阶常系数线性齐次方程： $y'' + py' + qy = 0$.

.....
设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2 .

研究二阶常系数线性齐次方程： $y'' + py' + qy = 0$.

.....
设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2 .

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

研究二阶常系数线性齐次方程： $y'' + py' + qy = 0$.

.....
设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2 .

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为相同实根，则方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$$

研究二阶常系数线性齐次方程： $y'' + py' + qy = 0$.

.....
设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2 .

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根，则方程的通解为

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为相同实根，则方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$$

3 若 $\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$ 为共轭复根，则方程的通解为

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

第一节

微分方程的一般概念

第二节

一阶微分方程

第三节

二阶微分方程*

第四节

差分方程的一般概念

第五节

一阶常系数线性差分方程

第六节

二阶常系数线性差分方程*

差分

定义 1 对于数列 y_x ($x = 0, 1, 2, \dots$),

差分

定义 1 对于数列 y_x ($x = 0, 1, 2, \dots$), 称

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

为 y_x 的 (一阶) 差分;

差分

定义 1 对于数列 y_x ($x = 0, 1, 2, \dots$), 称

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

为 y_x 的 (一阶) 差分; 称

$$\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x) = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x$$

为 y_x 的二阶差分.

差分

定义 1 对于数列 y_x ($x = 0, 1, 2, \dots$), 称

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

为 y_x 的 (一阶) 差分; 称

$$\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x) = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x$$

为 y_x 的二阶差分.

例 1 求 $y_x = x^2$ 的各阶差分.

差分

定义 1 对于数列 y_x ($x = 0, 1, 2, \dots$), 称

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$$

为 y_x 的 (一阶) 差分; 称

$$\Delta^2 y_x = \Delta(\Delta y_x) = \Delta y_{x+1} - \Delta y_x$$

为 y_x 的二阶差分.

例 1 求 $y_x = x^2$ 的各阶差分.

例 2 求 $y_x = a^x$ 的各阶差分.

差分的性质

性质 差分具有以下性质：

$$1 \quad \Delta(cy_x) = c\Delta y_x$$

差分的性质

性质 差分具有以下性质：

$$1 \quad \Delta(cy_x) = c\Delta y_x$$

$$2 \quad \Delta(y_x \pm z_x) = \Delta y_x \pm \Delta z_x$$

差分的性质

性质 差分具有以下性质：

$$1 \quad \Delta(cy_x) = c\Delta y_x$$

$$2 \quad \Delta(y_x \pm z_x) = \Delta y_x \pm \Delta z_x$$

$$3 \quad \Delta(y_x z_x) = z_x \Delta y_x + y_{x+1} \Delta z_x$$

差分的性质

性质 差分具有以下性质：

$$1 \quad \Delta(cy_x) = c\Delta y_x$$

$$2 \quad \Delta(y_x \pm z_x) = \Delta y_x \pm \Delta z_x$$

$$3 \quad \Delta(y_x z_x) = z_x \Delta y_x + y_{x+1} \Delta z_x$$

$$4 \quad \Delta \left(\frac{y_x}{z_x} \right) = \frac{z_x \Delta y_x - y_x \Delta z_x}{y_x y_{x+1}}$$

差分方程

定义 形如

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, \Delta^n y_x) = 0$$

的方程称为差分方程.

差分方程

定义 形如

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \Delta^2 y_x, \dots, \Delta^n y_x) = 0$$

的方程称为差分方程.

例 3 说明下面两个方程是等价的:

■ $\Delta^2 y_x - 2y_x = 3^x$

■ $y_{x+2} - 2y_{x+1} - y_x = 3^x$

差分方程

定义 形如

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0$$

的方程称为差分方程.

差分方程

定义 形如

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \cdots, y_{x+n}) = 0$$

的方程称为差分方程.

定义 差分方程中未知数列下标的最大值和最小值的差, 称为该差分方程的阶.

差分方程

定义 形如

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0$$

的方程称为差分方程.

定义 差分方程中未知数列下标的最大值和最小值的差, 称为该差分方程的阶.

例 4 $y_{x+2} - y_{x+1} = x$ 为一阶差分方程.

差分方程

定义 形如

$$F(x, y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \dots, y_{x+n}) = 0$$

的方程称为差分方程.

定义 差分方程中未知数列下标的最大值和最小值的差, 称为该差分方程的阶.

例 4 $y_{x+2} - y_{x+1} = x$ 为一阶差分方程.

例 5 $y_{x+2} = y_{x+1} + y_x$ 为二阶差分方程.

定义 2 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的解。

定义 2 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的解。

- 满足一定的初始条件的解称为特解。

定义 2 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的**解**。

- 满足一定的初始条件的解称为**特解**。
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的**通解**。

定义 2 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的**解**。

- 满足一定的初始条件的解称为**特解**。
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的**通解**。

例 6 一阶差分方程 $y_{x+1} - y_x = 2, y_0 = 1$ 有特解为

定义 2 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的**解**。

- 满足一定的初始条件的解称为**特解**。
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的**通解**。

例 6 一阶差分方程 $y_{x+1} - y_x = 2$, $y_0 = 1$ 有特解为 $y_x = 2x + 1$ 。

定义 2 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的**解**。

- 满足一定的初始条件的解称为**特解**。
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的**通解**。

例 6 一阶差分方程 $y_{x+1} - y_x = 2, y_0 = 1$ 有特解为 $y_x = 2x + 1$ 。

例 7 二阶差分方程 $y_{x+2} - 3y_{x+1} + 2y_x = 0$ 的通解为

定义 2 如果一个数列代入差分方程后，方程两边恒等，则称此数列为该差分方程的**解**。

- 满足一定的初始条件的解称为**特解**。
- 含有 n 个相互独立的任意常数的解称为 n 阶差分方程的**通解**。

例 6 一阶差分方程 $y_{x+1} - y_x = 2$, $y_0 = 1$ 有特解为 $y_x = 2x + 1$ 。

例 7 二阶差分方程 $y_{x+2} - 3y_{x+1} + 2y_x = 0$ 的通解为 $y_x = C_1 + C_2 2^x$ 。

第一节

微分方程的一般概念

第二节

一阶微分方程

第三节

二阶微分方程*

第四节

差分方程的一般概念

第五节

一阶常系数线性差分方程

第六节

二阶常系数线性差分方程*

研究一阶常系数线性差分方程 $y_{x+1} - ay_x = c$.

研究一阶常系数线性差分方程 $y_{x+1} - ay_x = c$.

- 若 $a = 1$, 解为 $y_x = y_0 + cx$.

研究一阶常系数线性差分方程 $y_{x+1} - ay_x = c$.

■ 若 $a = 1$, 解为 $y_x = y_0 + cx$.

■ 若 $a \neq 1$, 解为 $y_x = \left(y_0 - \frac{c}{1-a}\right) a^x + \frac{c}{1-a}$.

研究一阶常系数线性差分方程 $y_{x+1} - ay_x = c$.

■ 若 $a = 1$, 解为 $y_x = y_0 + cx$.

■ 若 $a \neq 1$, 解为 $y_x = \left(y_0 - \frac{c}{1-a}\right) a^x + \frac{c}{1-a}$.

例 1 求差分方程 $y_{x+1} - 3y_x = -2$ 的通解.

例 2 广州公积金贷款年利率为 3.25%。现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年。采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

例 2 广州公积金贷款年利率为 3.25%。现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年。采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解答 设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r （即年利率除以 12）。则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 500000.$$

例 2 广州公积金贷款年利率为 3.25%。现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年。采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解答 设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r （即年利率除以 12）。则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 500000.$$

该差分方程的解为

$$y_x = (y_0 - m/r)(1+r)^x + m/r.$$

例 2 广州公积金贷款年利率为 3.25%。现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年。采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解答 设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r （即年利率除以 12）。则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 500000.$$

该差分方程的解为

$$y_x = (y_0 - m/r)(1+r)^x + m/r.$$

从而可以解出

$$m = \frac{r[y_0(1+r)^x - y_x]}{(1+r)^x - 1}.$$

例 2 广州公积金贷款年利率为 3.25%。现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年。采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解答 设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r （即年利率除以 12）。则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 500000.$$

该差分方程的解为

$$y_x = (y_0 - m/r)(1+r)^x + m/r.$$

从而可以解出

$$m = \frac{r[y_0(1+r)^x - y_x]}{(1+r)^x - 1}.$$

当 $x = 240$ 时， $y_x = 0$,

例 2 广州公积金贷款年利率为 3.25%。现贷款 50 万元，贷款年限为 20 年。采用等额本息还款方式，每月还款金额是多少？

解答 设贷款 x 个月后欠款余额是 y_x 元，月还款额为 m 元，月利率为 r （即年利率除以 12）。则有

$$y_{x+1} = y_x(1+r) - m, \quad y_0 = 500000.$$

该差分方程的解为

$$y_x = (y_0 - m/r)(1+r)^x + m/r.$$

从而可以解出

$$m = \frac{r[y_0(1+r)^x - y_x]}{(1+r)^x - 1}.$$

当 $x = 240$ 时， $y_x = 0$ ，代入得到 $m = 2835.97$ 。

第一节

微分方程的一般概念

第二节

一阶微分方程

第三节

二阶微分方程*

第四节

差分方程的一般概念

第五节

一阶常系数线性差分方程

第六节

二阶常系数线性差分方程*

研究二阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = 0.$$

.....

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2 .

研究二阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = 0.$$

.....

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2 .

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根, 则方程的通解为

$$y_x = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x$$

研究二阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = 0.$$

.....

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2 .

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根, 则方程的通解为

$$y_x = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x$$

2 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为相同实根, 则方程的通解为

$$y_x = (C_1 + C_2x)\lambda^x$$

研究二阶常系数线性齐次差分方程

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = 0.$$

.....

设其特征方程 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ 的两个根为 λ_1 和 λ_2 .

1 若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 为相异实根, 则方程的通解为

$$y_x = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x$$

2 若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 为相同实根, 则方程的通解为

$$y_x = (C_1 + C_2x)\lambda^x$$

3 若 $\lambda_1 = \alpha + i\beta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$,
 $\lambda_2 = \alpha - i\beta = r(\cos \theta - i \sin \theta)$ 为共轭复根,
则通解为

$$y_x = r^x(C_1 \cos \theta x + C_2 \sin \theta x)$$