

微积分课程

附录：差分与和式

2020年8月29日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

连续与离散

我们已经知道差分 $\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x)$.

连续与离散

我们已经知道差分 $\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x)$.

- 差分的运算性质与微分很相似.

连续与离散

我们已经知道差分 $\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x)$.

- 差分的运算性质与微分很相似.
- 差分可以认为是离散的微分.

连续与离散

我们已经知道差分 $\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x)$.

- 差分的运算性质与微分很相似.
- 差分可以认为是离散的微分.
- 是否可以定义离散的积分呢?

连续与离散

我们已经知道差分 $\Delta(f(x)) = f(x+1) - f(x)$.

- 差分的运算性质与微分很相似.
- 差分可以认为是离散的微分.
- 是否可以定义离散的积分呢?

⇒ 微分的逆运算是积分，而差分的逆运算是和式.

第一节

不定和式

第二节

定和式

第三节

分部求和

微分与差分

$$1 \quad d(cu) = c du$$

微分 $2 \quad d(u \pm v) = du \pm dv$

性质 $3 \quad d(uv) = v du + u dv$

$$4 \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

微分与差分

$$1 \quad d(cu) = c du$$

微分 $2 \quad d(u \pm v) = du \pm dv$

性质 $3 \quad d(uv) = v du + u dv$

$$4 \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

$$1 \quad \Delta(cu) = c\Delta u$$

差分 $2 \quad \Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$

性质 $3 \quad \Delta(uv) = v\Delta u + E u \Delta v = u\Delta v + E v \Delta u$

$$4 \quad \Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v E v}$$

其中移位算子 $E(f(x)) = f(x+1)$.

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则定义 $f(x)$ 的不定积分为

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则定义 $f(x)$ 的**不定积分**为

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

例如, 由 $d(x^2) = 2x dx$ 可知 $\int 2x dx = x^2 + C$.

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则定义 $f(x)$ 的**不定积分**为

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

例如, 由 $d(x^2) = 2x dx$ 可知 $\int 2x dx = x^2 + C$.

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$, 则定义 $f(x)$ 的**不定和式**为

$$\sum f(x) = F(x) + C.$$

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则定义 $f(x)$ 的**不定积分**为

$$\int f(x) dx = F(x) + C.$$

例如, 由 $d(x^2) = 2x dx$ 可知 $\int 2x dx = x^2 + C$.

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$, 则定义 $f(x)$ 的**不定和式**为

$$\sum f(x) = F(x) + C.$$

例如, 由 $\Delta(x^2) = 2x + 1$ 可知 $\sum(2x + 1) = x^2 + C$.

微分与差分

1 $d(c) = 0$

微分 2 $d(x) = 1 \cdot dx$

公式 3 $d(x^a) = a \cdot x^{a-1} \cdot dx$

4 $d(a^x) = \ln a \cdot a^x \cdot dx$

微分与差分

1 $d(c) = 0$

微分 2 $d(x) = 1 \cdot dx$

公式 3 $d(x^a) = a \cdot x^{a-1} \cdot dx$

4 $d(a^x) = \ln a \cdot a^x \cdot dx \Rightarrow d(e^x) = e^x dx$

微分与差分

微分
公式

$$1 \quad d(c) = 0$$

$$2 \quad d(x) = 1 \cdot dx$$

$$3 \quad d(x^a) = a \cdot x^{a-1} \cdot dx$$

$$4 \quad d(a^x) = \ln a \cdot a^x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad d(e^x) = e^x dx$$

差分
公式

$$1 \quad \Delta(c) = 0$$

$$2 \quad \Delta(x) = 1$$

$$3 \quad \Delta(x^a) = a \cdot x^{\underline{a-1}}$$

$$4 \quad \Delta(a^x) = (a - 1) \cdot a^x$$

微分与差分

微分
公式

$$1 \quad d(c) = 0$$

$$2 \quad d(x) = 1 \cdot dx$$

$$3 \quad d(x^a) = a \cdot x^{a-1} \cdot dx$$

$$4 \quad d(a^x) = \ln a \cdot a^x \cdot dx \quad \Rightarrow \quad d(e^x) = e^x dx$$

差分
公式

$$1 \quad \Delta(c) = 0$$

$$2 \quad \Delta(x) = 1$$

$$3 \quad \Delta(x^a) = a \cdot x^{a-1}$$

$$4 \quad \Delta(a^x) = (a - 1) \cdot a^x \quad \Rightarrow \quad \Delta(2^x) = 2^x$$

微分与差分

1 $d(c) = 0$

微分 2 $d(x) = 1 \cdot dx$

公式 3 $d(x^a) = a \cdot x^{a-1} \cdot dx$

4 $d(a^x) = \ln a \cdot a^x \cdot dx \Rightarrow d(e^x) = e^x dx$

1 $\Delta(c) = 0$

差分 2 $\Delta(x) = 1$

公式 3 $\Delta(x^a) = a \cdot x^{a-1}$

4 $\Delta(a^x) = (a - 1) \cdot a^x \Rightarrow \Delta(2^x) = 2^x$

定义下降幂 $x^{\underline{a}} = x(x-1)(x-2)\cdots(x-a+1)$.

不定积分与不定和式

积分
公式

$$1 \quad \int 1 \, dx = x + C$$

$$2 \quad \int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$$

$$3 \quad \int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C$$

不定积分与不定和式

积分
公式

$$1 \quad \int 1 \, dx = x + C$$

$$2 \quad \int x^a \, dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$$

$$3 \quad \int a^x \, dx = \frac{1}{\ln a} a^x + C \quad \Rightarrow \quad \int e^x \, dx = e^x + C$$

不定积分与不定和式

积分
公式

1 $\int 1 dx = x + C$

2 $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$

3 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$

和式
公式

1 $\sum 1 = x + C$

2 $\sum x^a = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$

3 $\sum a^x = \frac{1}{a-1}a^x + C$

不定积分与不定和式

积分
公式

1 $\int 1 dx = x + C$

2 $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$

3 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$

和式
公式

1 $\sum 1 = x + C$

2 $\sum x^a = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$

3 $\sum a^x = \frac{1}{a-1}a^x + C \Rightarrow \sum(2^x) = 2^x + C$

不定积分与不定和式

积分
公式

1 $\int 1 dx = x + C$

2 $\int x^a dx = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$

3 $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C \Rightarrow \int e^x dx = e^x + C$

和式
公式

1 $\sum 1 = x + C$

2 $\sum x^a = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$

3 $\sum a^x = \frac{1}{a-1}a^x + C \Rightarrow \sum(2^x) = 2^x + C$

定义负指数下降幂 $x^{-a} = 1/(x+1)(x+2)\cdots(x+a)$.

第一节

不定和式

第二节

定和式

第三节

分部求和

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则 $f(x)$ 的定积分等于

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则 $f(x)$ 的定积分等于

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

其中定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示对应的曲边梯形的面积.

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则 $f(x)$ 的定积分等于

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

其中定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示对应的曲边梯形的面积.

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的定和式等于

$$\sum_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则 $f(x)$ 的定积分等于

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

其中定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 表示对应的曲边梯形的面积。

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的定和式等于

$$\sum_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

其中定和式 $\sum_a^b f(x)$ 表示有限和 $\sum_{k=a}^{b-1} f(k)$.

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则 $f(x)$ 的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则 $f(x)$ 的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

其中广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 表示对应的图形的面积.

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则 $f(x)$ 的广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

其中广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 表示对应的图形的面积.

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的无限和式

$$\sum_a^{+\infty} f(x) = [F(x)]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

积分与和式

如果 $d(F(x)) = f(x) dx$, 则 $f(x)$ 的**广义积分**

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = [F(x)]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

其中**广义积分** $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 表示对应的图形的面积.

如果 $\Delta(F(x)) = f(x)$, 则 $f(x)$ 的**无限和式**

$$\sum_a^{+\infty} f(x) = [F(x)]_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a).$$

其中**无限和式** $\sum_a^{+\infty} f(x)$ 表示无限和 $\sum_{k=a}^{+\infty} f(k)$.

有限和式

利用不定和式的公式，我们可以计算出平方和：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_1^{n+1} x^2 = \sum_1^{n+1} (x(x-1) + x) \\ &= \sum_1^{n+1} (x^2 + x^1) = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} - 0 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

有限和式

利用不定和式的公式，我们可以计算出平方和：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^2 &= \sum_1^{n+1} x^2 = \sum_1^{n+1} (x(x-1) + x) \\ &= \sum_1^{n+1} (x^2 + x^1) = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^{n+1} \\ &= \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} - 0 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\end{aligned}$$

类似地，也可以计算出高次方和。

第一节

不定和式

第二节

定和式

第三节

分部求和

分部积分与分部求和

不定积分的分部积分公式为

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

分部积分与分部求和

不定积分的**分部积分**公式为

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

不定和式的**分部求和**公式为

$$\sum u \Delta v = uv - \sum Ev \Delta u.$$

分部积分与分部求和

定积分的**分部积分**公式为

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

分部积分与分部求和

定积分的**分部积分**公式为

$$\int_a^b u dv = [uv]_a^b - \int_a^b v du.$$

定和式的**分部求和**公式为

$$\sum_a^b u \Delta v = [uv]_a^b - \sum_a^b Ev \Delta u.$$

分部求和

在分部求和公式中令 $u = x$, $\Delta v = \frac{1}{2^x}$, 得到

$$\begin{aligned}\sum \frac{x}{2^x} &= -2 \sum x \cdot \Delta \left(\frac{1}{2^x} \right) \\ &= -2x \cdot \frac{1}{2^x} + 2 \sum \frac{1}{2^{x+1}} \cdot \Delta x \\ &= -2x \cdot \frac{1}{2^x} + \sum \frac{1}{2^x} \\ &= -2x \cdot \frac{1}{2^x} - 2 \frac{1}{2^x} + C = -\frac{2x+2}{2^x} + C\end{aligned}$$

分部求和

由上页不定和式的结果，可以得到定和式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} &= \sum_1^{n+1} \frac{x}{2^x} = \left[-\frac{2x+2}{2^x} \right]_1^{n+1} \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n}\end{aligned}$$

分部求和

由上页不定和式的结果，可以得到定和式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} &= \sum_1^{n+1} \frac{x}{2^x} = \left[-\frac{2x+2}{2^x} \right]_1^{n+1} \\ &= 2 - \frac{n+2}{2^n}\end{aligned}$$

以及无限和式

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k} &= \sum_1^{\infty} \frac{x}{2^x} = \left[-\frac{2x+2}{2^x} \right]_1^{\infty} \\ &= 2 - 0 = 2\end{aligned}$$