微积分课程

微积分 1 复习

2020 年 8 月 29 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞(lvjr.bitbucket.io)

第一章	集合与函数
第二章	极限与连续
第三章	导数与微分
第四章	导数的应用

函数的定义域

例 1　求下列函数的定义域：

(1) $$f(x)=\sqrt{x-2}$$

(2) $$f(x)=\ln(x^2-1)$$

(3) $$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$$

函数的定义域

例 1　求下列函数的定义域：

(1)　$$f(x)=\sqrt{x-2}$$

(2)　$$f(x)=\ln(x^2-1)$$

(3)　$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$$

求函数的定义域时有三个基本要求：

函数的定义域

例 1　求下列函数的定义域:

(1) $$f(x)=\sqrt{x-2}$$

(2) $$f(x)=\ln(x^2-1)$$

(3) $$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$$

求函数的定义域时有三个基本要求:

1 根号里面要求大于等于零;

函数的定义域

例 1　求下列函数的定义域:

(1) $$f(x)=\sqrt{x-2}$$

(2) $$f(x)=\ln(x^2-1)$$

(3) $$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$$

求函数的定义域时有三个基本要求:

1. 根号里面要求大于等于零;
2. 对数里面要求大于零;

函数的定义域

例 1　求下列函数的定义域:

(1) $$f(x)=\sqrt{x-2}$$

(2) $$f(x)=\ln(x^2-1)$$

(3) $$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$$

求函数的定义域时有三个基本要求:

1 根号里面要求大于等于零;

2 对数里面要求大于零;

3 分母要求不能等于零.

第一章	集合与函数
第二章	极限与连续
第三章	导数与微分
第四章	导数的应用

数列极限

对于数列极限，我们有如下基本公式：

数列极限

对于数列极限，我们有如下基本公式：

① $$\lim_{n\to\infty} c = c$$

② $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0 \quad (k>0)$$

③ $$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^k} = 0 \quad (k>0)$$

函数极限 I

对于 $x \to \infty$ 的函数极限，我们有如下基本公式：

函数极限 I

对于 $x \to \infty$ 的函数极限，我们有如下基本公式：

① $$\lim_{x\to\infty} c = c$$

② $$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k\text{ 为正整数})$$

③ $$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{a^x} = 0 \quad (a > 1)$$

函数极限 II

对于 $x \to x_0$ 的函数极限，如果 $f(x)$ 是初等函数，x_0 在 $f(x)$ 的定义区间中，则有

函数极限 II

对于 $x \to x_0$ 的函数极限，如果 $f(x)$ 是初等函数，x_0 在 $f(x)$ 的定义区间中，则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

左极限和右极限

例 1　设

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\le 0\\ x^2+1 & 0<x\le 1\\ \dfrac{2}{x} & x>1\end{cases}$$

判断该函数在 $x\to 0$ 及 $x\to 1$ 时的极限是否存在.

左极限和右极限

例 1　设

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & x\le 0\\ x^2+1 & 0<x\le 1\\ \frac{2}{x} & x>1\end{cases}$$

判断该函数在 $x\to 0$ 及 $x\to 1$ 时的极限是否存在.

定理　极限存在当且仅当左右极限都存在而且相等.

极限的四则运算

各种极限都有四则运算法则：

① $$\lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x)$$

② $$\lim(f(x) \cdot g(x)) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$$

③ $$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$$

等价无穷小代换

例 2　求下列极限：

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x}$$

等价无穷小代换

例 2　求下列极限：

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x}$$

事实　等价无穷小代换有如下特点：

- 我们只有对 $x \to 0$ 的代换公式；

等价无穷小代换

例 2　求下列极限:

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{1-\cos x}$$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\tan 5x}$$

事实　等价无穷小代换有如下特点:

- 我们只有对 $x\to 0$ 的代换公式;
- 只能对乘除因子代换，不能对加减项代换.

洛必达法则

例 3　求下列极限：

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^3 x}$$

(2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x}{\cos 3x}$$

洛必达法则

例 3　求下列极限：

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^3 x}$$

(2) $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x}{\cos 3x}$$

事实　洛必达法则有如下特点：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；

洛必达法则

例 3　求下列极限：

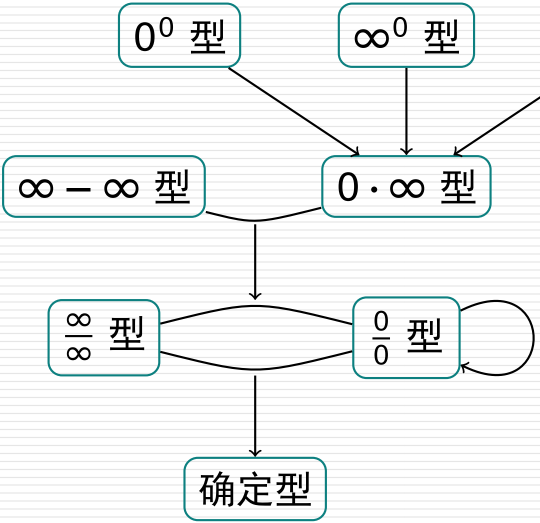
(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\tan^3 x}$$

(2) $$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin x}{\cos 3x}$$

事实　洛必达法则有如下特点：

- 如果能用等价无穷小代换，优先使用它；
- 如果某个乘除因子的极限不为零，可以先求出该因子极限.

函数极限



0^0 型
∞^0 型
1^∞ 型
$\infty - \infty$ 型
$0 \cdot \infty$ 型
$\frac{\infty}{\infty}$ 型
$\frac{0}{0}$ 型
确定型

关于 1^∞ 型极限

例 4　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$.

关于 1^∞ 型极限

例 4 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$.

定理 1 若 $x \to □$ 时，$a(x) \to 0$，$b(x) \to \infty$，则有

$$\boxed{\lim_{x\to□}(1+a(x))^{b(x)} = e^{\lim\limits_{x\to□} a(x)b(x)}}$$

例 5　求函数 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型．其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\leqslant 1, x\neq 0\\[2ex] \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$$

连续与间断

例 5　求函数 $f(x)$ 的间断点，并判断其类型．其中

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}, & x\leqslant 1, x\neq 0\\[2ex] \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x>1, x\neq 2\end{cases}$$

注记　函数的间断点通常在这两种点中出现：

1 使得分母为零的点；

2 分段函数的交界点．

导数公式

- $(C)' = 0$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^{x})' = a^{x} \ln a$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$

导数公式

- $(C)' = 0$
- $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$
- $(a^x)' = a^x \ln a$
- $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$
- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则：

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则:

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(Cu)' = Cu'$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则：

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(Cu)' = Cu'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

导数的四则运算

导数有如下四则运算法则：

- $(u \pm v)' = u' \pm v'$
- $(Cu)' = Cu'$
- $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

复合函数求导

例 1　求下列函数的导数:

(1) $f(x) = e^{x^2}$;

(2) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$;

(3) $f(x) = \cos(\ln x)$.

复合函数求导

例 1　求下列函数的导数:

(1) $f(x)=e^{x^2}$;

(2) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$;

(3) $f(x)=\cos(\ln x)$.

定理　设 $y=f(u)$, $u=g(x)$, 则有

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

隐函数求导

例 2　对下面的方程求导数 y'_x：

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

例 2　对下面的方程求导数 y'_x：

$$x^2 + y^2 = xy + 1$$

对于隐函数求导，要注意

- $(\phi(x))'_x = \phi'(x)$；
- $(\phi(y))'_x = \phi'(y)y'_x$.

罗尔定理

定理　如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

(3) $f(a)=f(b)$,

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

拉格朗日定理

定理　如果函数 $f(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内可导,

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

柯西定理

定理 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足下列条件:

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上都连续,

(2) 在开区间 (a,b) 内都可导,

(3) 在开区间 (a,b) 内 $g'(x) \neq 0$,

则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$ 使 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

例 1　求下列函数的单调区间与极值：

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$;

(2) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

单调区间与极值

例 1　求下列函数的单调区间与极值：

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$;

(2) $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

事实　对于单调区间与极值，有如下基本结果：

- $f'(x) > 0$ 的区间为单调增加区间；
- $f'(x) < 0$ 的区间为单调减少区间；
- $f'(x) = 0$ 或者不存在的点很可能为极值点.

函数的最值

事实 一般地，对于函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最值，我们只需考虑下述这些可疑点：

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点.

函数的最值

事实　一般地，对于函数在闭区间 $[a,b]$ 上的最值，我们只需考虑下述这些可疑点：

- 导数为零的点；
- 导数不存在的点；
- 区间的端点.

事实　特殊地，若函数在区间（开或闭，有限或无限）上可导，且在区间内只有一个驻点，则有

- 如果该驻点为极大值，则它也是最大值；
- 如果该驻点为极小值，则它也是最小值.

凹向与拐点

例 2　求下列曲线的凹向与拐点：

(1) $f(x)=x^4-2x^3+1$;

(2) $f(x)=(x-2)^{\frac{5}{3}}$.

凹向与拐点

例 2　求下列曲线的凹向与拐点：

(1) $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$;

(2) $f(x) = (x-2)^{\frac{5}{3}}$.

事实　对于凹向与拐点，有如下基本结果：

- $f''(x) > 0$ 的区间为凹（上凹）区间；
- $f''(x) < 0$ 的区间为凸（下凹）区间；
- $f''(x) = 0$ 或者不存在的点很可能为拐点.

曲线的渐近线

例 3　求曲线 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 的渐近线:

曲线的渐近线

例 3　求曲线 $f(x)=\frac{1}{x-1}$ 的渐近线:

事实　对于曲线的渐近线，我们有如下定义:

- 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$，则 $y=b$ 为水平渐近线;
- 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$，则 $x=a$ 为铅垂渐近线.

边际与弹性

若 $y = f(x)$ 可导，则变化率 $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为 $f(x)$ 的边际函数.

边际与弹性

若 $y = f(x)$ 可导，则变化率 $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为 $f(x)$ 的边际函数.

- 总成本函数 $C(Q) \Longrightarrow$ 边际成本 $C'(Q)$
- 总收益函数 $R(Q) \Longrightarrow$ 边际收益 $R'(Q)$

边际与弹性

若 $y=f(x)$ 可导，则变化率 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 也称为 $f(x)$ 的边际函数.

- 总成本函数 $C(Q)\Longrightarrow$ 边际成本 $C'(Q)$
- 总收益函数 $R(Q)\Longrightarrow$ 边际收益 $R'(Q)$

若 $y=f(x)$ 可导，则相对变化律

$$\frac{Ey}{Ex}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=y'\frac{x}{y}$$

称为 $f(x)$ 的弹性函数.