微积分课程

微积分 2 复习

2020 年 8 月 29 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞(lvjr.bitbucket.io)

积分公式大全

(1) $$\int 1\,\mathrm{d}x = x + C$$

(2) $$\int x^{a}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C$$

(3) $$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

(4) $$\int a^{x}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$$

(5) $$\int e^{x}\,\mathrm{d}x = e^{x} + C$$

积分公式大全

(6) $$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

(7) $$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

(8) $$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + C$$

(9) $$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + C$$

积分公式大全

(10) $$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

(11) $$\int \csc x\,dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$$

(12) $$\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$$

(13) $$\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$$

积分公式大全

(14) $$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

(15) $$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$$

(16) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

(17) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right| + C$$

第一类换元法

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\phi(x))\,\mathrm{d}(\phi(x))$$
$$= \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\phi(x)}$$

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到.

最常用的积分换元

一般地，如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$，则有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

这个公式利用换元 $u = ax + b$ 可以得到.

例 1　求不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4x+5)^2}$.

正弦和余弦换元

例 2　求不定积分 $\int \sin^2 x \cos x \, dx.$

第二类换元法

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\psi(t))\,\mathrm{d}(\psi(t))$$

$$= \left[\int f(\psi(t))\psi'(t)\,\mathrm{d}t\right]_{t=\psi^{-1}(x)}$$

指数函数换元

例 3　求不定积分 $\int \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$.

根号换元

例 4　求不定积分 $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}}\mathrm{d}x.$

三角函数换元总结

1 $\int f(\sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x = a\sin t$

三角函数换元总结

1 $\int f(\sqrt{a^2 - x^2})\mathrm{d}x$，令 $x = a\sin t$

2 $\int f(\sqrt{x^2 + a^2})\mathrm{d}x$，令 $x = a\tan t$

三角函数换元总结

1 $\int f(\sqrt{a^2-x^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\sin t$

2 $\int f(\sqrt{x^2+a^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\tan t$

3 $\int f(\sqrt{x^2-a^2})\,\mathrm{d}x$，令 $x=a\sec t$

分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

分部积分公式: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例 5　求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

例 6　求不定积分 $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

分部积分公式：$\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

例 5　求不定积分 $\int x\cos x\,\mathrm{d}x$.

例 6　求不定积分 $\int xe^x\,\mathrm{d}x$.

例 7　求不定积分 $\int x\ln x\,\mathrm{d}x$.

例 8　求不定积分 $\int x\arctan x\,\mathrm{d}x$.

分部积分公式：$\int u\,dv = uv - \int v\,du$

例 5　求不定积分 $\int x\cos x\,dx$.

例 6　求不定积分 $\int xe^x\,dx$.

例 7　求不定积分 $\int x\ln x\,dx$.

例 8　求不定积分 $\int x\arctan x\,dx$.

例 9　求不定积分 $\int e^x\sin x\,dx$.

微积分基本公式

定理 1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

微积分基本公式

定理 1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

它称为微积分基本公式或牛顿一莱布尼茨公式.

定积分的换元公式

定积分换元公式：令 $x = \phi(t)$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

其中，当 $x = a$ 时，$t = \alpha$；当 $x = b$ 时，$t = \beta$.

定积分的换元公式

定积分换元公式：令 $x = \phi(t)$, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t$$

其中，当 $x = a$ 时，$t = \alpha$；当 $x = b$ 时，$t = \beta$.

例 1 求下列定积分 $\int_{-1}^{2} xe^{x^2}\,\mathrm{d}x$.

定积分的分部积分公式

分部积分公式：

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

定积分的分部积分公式

分部积分公式：

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$$

例 2　求下列定积分 $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x$.

平面图形的面积

由曲线 $y = f(x)$, x 轴，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

平面图形的面积

由曲线 $y = f(x)$, x 轴，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

由曲线 $x = f(y)$, y 轴，直线 $y = a$ 以及直线 $y = b$ 所围成的曲边梯形的面积为

$$S = \int_a^b |f(y)|\,\mathrm{d}y$$

平面图形的面积

由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的图形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$$

平面图形的面积

由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$，直线 $x = a$ 以及直线 $x = b$ 所围成的图形的面积为

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x$$

由曲线 $x = f(y)$, $x = g(y)$，直线 $y = a$ 以及直线 $y = b$ 所围成的图形的面积为

$$S = \int_a^b |f(y) - g(y)| \, \mathrm{d}y$$

计算面积的步骤

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

计算面积的步骤

1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

2 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

2 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到

3 确定被积函数

计算面积的步骤

1. 画出曲线草图
2. 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到
3. 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到

计算面积的步骤

1 画出曲线草图

2 确定积分区间 $\Longleftarrow$ 从曲线交点得到

3 确定被积函数 $\Longleftarrow$ 从曲线方程得到

4 计算积分结果

例 3　求曲线 $y = 1 - x^2$ 与 x 轴所围成图形的面积.

例 3　求曲线 $y = 1 - x^2$ 与 x 轴所围成图形的面积.

例 4　求曲线 $y^2 = x$ 和 $y^2 = 2 - x$ 所围成的图形的面积.

正项级数审敛法

必要条件 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发散

$\downarrow$ 满足

比值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$

根值判别法 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

$\xrightarrow[\text{不定}]{\rho = 1}$ $\left\{\begin{array}{l}\text{比较判别法}\\ \text{部分和极限}\end{array}\right.$

$\rho < 1$ $\downarrow$ 收敛

$\rho > 1$ $\downarrow$ 发散

一般级数审敛法

必要条件 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ $\xrightarrow{\text{不满足}}$ 发散

满足

比值判别法 $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \rho$

根值判别法 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$

$\rho = 1$ 不定 $\left\{\begin{array}{l}\text{Leibniz 定理}\\ \text{部分和极限}\end{array}\right.$

$\rho < 1$ (绝对) 收敛

$\rho > 1$ 发散

幂级数收敛域的求法

- 标准形式幂级数
  1. 先求幂级数的收敛半径 R
  2. 再讨论在 $x = \pm R$ 处的敛散性
- 非标准形式幂级数
  - 通过换元转化为标准形式
  - 直接用比值法或者根值法

幂级数和函数的求法

- 初等变换法：分解和式并套用公式
- 映射变换法：逐项求导或逐项积分

$$
\begin{tikzcd}
\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n \arrow[r, "\text{逐项求导或积分}"] \arrow[d, dashed, "\text{难}"] & \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^* x^n \arrow[d, "\text{求和}"] \\
S(x) & S^*(x) \arrow[l, "\text{对和式积分或求导}"']
\end{tikzcd}
$$

常数项级数和的求法

- 直接求和：求出级数的部分和，再求极限
- 间接求和：转换为求幂级数和，再代入值

函数展开为幂级数的方法

直接展开法 利用泰勒公式计算系数，并研究余项

间接展开法 利用已知的函数展开式，及幂级数性质

偏导数

对于 $z=f(x,y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，

偏导数

对于 $z = f(x, y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，或 z'_x，或 f'_x.

偏导数

对于 $z=f(x,y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，或 z'_x，或 f'_x.

对于 $z=f(x,y)$，将 x 看为常数，对 y 求导，得到 z 对 y 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，

偏导数

对于 $z=f(x,y)$，将 y 看为常数，对 x 求导，得到 z 对 x 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，或 z'_x，或 f'_x.

对于 $z=f(x,y)$，将 x 看为常数，对 y 求导，得到 z 对 y 的偏导数，记为 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$，或 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$，或 z'_y，或 f'_y.

复合函数求导：情形 1

设 $z = f(x, y)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$,

复合函数求导：情形 1

设 $z = f(x, y)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$，则我们得到复合函数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$.

复合函数求导：情形 1

设 $z = f(x, y)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$，则我们得到复合函数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$．此时我们有全导数

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

复合函数求导：情形 1

设 $z = f(x, y)$, $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$，则我们得到复合函数 $z = f(\phi(t), \psi(t))$．此时我们有全导数

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

例 1　设 $z = xy$，$x = \mathrm{e}^t$, $y = \sin t$，求全导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

复合函数求导：情形 2

设 $z = f(u, v)$, $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$,

复合函数求导：情形 2

设 $z=f(u,v)$, $u=\phi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$，则我们得到复合函数 $z=f(\phi(x,y),\psi(x,y))$.

复合函数求导：情形 2

设 $z = f(u, v)$, $u = \phi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$，则我们得到复合函数 $z = f(\phi(x, y), \psi(x, y))$. 此时我们有偏导数

① $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

② $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

复合函数求导：情形 2

设 $z = f(u,v)$, $u = \phi(x,y)$, $v = \psi(x,y)$，则我们得到复合函数 $z = f(\phi(x,y),\psi(x,y))$．此时我们有偏导数

① $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

② $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

例 2　设 $z = uv$，$u = 3x^2 + y^2$, $v = 2x + y$，求偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

隐函数的导数 1

定理 1 设方程 $F(x, y) = 0$ 确定了隐函数 $y = f(x)$，且 $F(x, y)$ 有连续偏导数，

隐函数的导数 1

定理 1　设方程 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，且 $F(x,y)$ 有连续偏导数，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

隐函数的导数 1

定理 1　设方程 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，且 $F(x,y)$ 有连续偏导数，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

例 3　设方程 $y-xe^y+x=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

隐函数的导数 2

定理 2 设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，且 $F(x,y,z)$ 有连续偏导数，

隐函数的导数 2

定理2 设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，且 $F(x,y,z)$ 有连续偏导数，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

隐函数的导数 2

定理 2 设方程 $F(x,y,z)=0$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，且 $F(x,y,z)$ 有连续偏导数，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}\qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}$$

例 4 设方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 确定了隐函数 $z=f(x,y)$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

定理 3 (极值的充分条件)　如果函数 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0, y_0) 是它的驻点.

定理 3 (极值的充分条件) 如果函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

定理 3 (极值的充分条件) 如果函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

定理 3 (极值的充分条件) 如果函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值

定理 3 (极值的充分条件) 如果函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

定理 3 (极值的充分条件)　如果函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

(2) 如果 $B^2-AC>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

定理 3 (极值的充分条件)　如果函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 某邻域有连续的二阶偏导数，且 (x_0,y_0) 是它的驻点. 设 $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$，$B=f''_{xy}(x_0,y_0)$，$C=f''_{yy}(x_0,y_0)$，则有

(1) 如果 $B^2-AC<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极值.

- 若 $A<0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极大值
- 若 $A>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 为极小值

(2) 如果 $B^2-AC>0$，则 $f(x_0,y_0)$ 不是极值.

(3) 如果 $B^2-AC=0$，则 $f(x_0,y_0)$ 是否为极值需另外判定.

条件极值与拉格朗日乘数法

问题　求函数 $u = f(x, y)$ 在约束条件 $g(x, y) = 0$ 下的极值.

条件极值与拉格朗日乘数法

问题　求函数 $u=f(x,y)$ 在约束条件 $g(x,y)=0$ 下的极值.

解法　令 $L(x,y)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$,

条件极值与拉格朗日乘数法

问题　求函数 $u = f(x, y)$ 在约束条件 $g(x, y) = 0$ 下的极值.

解法　令 $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$，由

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 0 \\ L'_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

条件极值与拉格朗日乘数法

问题　求函数 $u = f(x, y)$ 在约束条件 $g(x, y) = 0$ 下的极值.

解法　令 $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$，由

$$\begin{cases} L'_x(x, y) = 0 \\ L'_y(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

消去 λ，解得的 (x, y) 即为极值可疑点.

二重积分的计算 I

如果积分区域 D 为 X 型区域，即有

$$D = \left\{ (x, y) \middle| a \leqslant x \leqslant b, \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x) \right\}$$

二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint\limits_D f(x, y)\, \mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y)\, \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x.$$

二重积分的计算 II

如果积分区域 D 为 Y 型区域，即有

$$D = \left\{(x,y)\middle| a \leqslant y \leqslant b, \phi_1(y) \leqslant x \leqslant \phi_2(y)\right\}$$

二重积分可以用下面公式来计算：

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y.$$

微分方程的概念

定义 1　含有未知函数的导数或微分的方程，即形如下面形式的方程

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

称为微分方程.

微分方程的概念

定义 1　含有未知函数的导数或微分的方程，即形如下面形式的方程

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0$$

称为微分方程．其中微分方程中出现的导数的最高阶数 n，称为微分方程的阶．

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

2 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

2 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

- 令 $v = \frac{y}{x}$，得 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

2 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

- 令 $v = \frac{y}{x}$，得 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$
- 分离变量，得到 $\frac{\mathrm{d}v}{f(v)-v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

2 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

- 令 $v = \frac{y}{x}$，得 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$
- 分离变量，得到 $\frac{\mathrm{d}v}{f(v)-v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

3 一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

2 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

- 令 $v = \frac{y}{x}$，得 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$
- 分离变量，得到 $\frac{\mathrm{d}v}{f(v)-v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

3 一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$

- 先求 $r(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$

一阶微分方程

1 可分离变量微分方程 $f(x)\,\mathrm{d}x = g(y)\,\mathrm{d}y$

- 两边积分得 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int g(y)\,\mathrm{d}y$

2 齐次微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{y}{x})$

- 令 $v = \frac{y}{x}$，得 $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v = f(v)$
- 分离变量，得到 $\frac{\mathrm{d}v}{f(v)-v} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

3 一阶线性微分方程 $y' + p(x)y = q(x)$

- 先求 $r(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$
- 再求 $y = r(x)^{-1}\left(\int q(x)r(x)\,\mathrm{d}x + C\right)$

一阶微分方程

例 1　判别一阶微分方程的类型并求通解：

(1) $(1+y^2)\,\mathrm{d}x+(x^2+1)\,\mathrm{d}y=0$

(2) $(x+y)\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}y=0$

(3) $(x+y)\,\mathrm{d}x+(x+1)\,\mathrm{d}y=0$

一阶微分方程

例 1　判别一阶微分方程的类型并求通解：

(1) $(1+y^2)\,dx+(x^2+1)\,dy=0$

(2) $(x+y)\,dx+(x-y)\,dy=0$

(3) $(x+y)\,dx+(x+1)\,dy=0$

解答

(1) $\arctan x+\arctan y=C$

(2) $y^2-2xy-x^2=C$

(3) $y=\dfrac{1}{x+1}\left(-\dfrac{1}{2}x^2+C\right)$