线性代数课程

第一章 · 行列式

2019 年 5 月 1 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

行列式的来源

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题.

行列式的来源

行列式的概念来源于线性方程组的求解问题.

17 世纪末由日本数学家关孝和及德国数学家莱布尼茨引入.

第一节	二阶和三阶行列式
1.1	二阶行列式
1.2	三阶行列式

我们先来看看下面的二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases},$$

我们先来看看下面的二元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases},$$

利用消元法，可求得它的解为（设分母不为零）：

$$\begin{cases} x = \dfrac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \\ y = \dfrac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \end{cases}.$$

如果我们定义二阶行列式为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

则方程的解可以简单地表示为：

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_1}{D}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{D_2}{D}.$$

二阶行列式示意图

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

二阶行列式示意图

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

主对角线两个元素 a_{11} 和 a_{22} 的乘积，减去副对角线两个元素 a_{12} 和 a_{21} 的乘积.

$$\begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & \color{blue}{a_{12}} \\ \color{blue}{a_{21}} & \color{red}{a_{22}} \end{vmatrix}$$

例 1　求下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

例 1　求下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

练习 1　求下列二阶行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix}$.

第一节	二阶和三阶行列式
1.1	二阶行列式
1.2	三阶行列式

类似地，对于一般的三元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases},$$

类似地，对于一般的三元线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases},$$

利用消元法，可求得它的解为（设分母不为零）：

$$\begin{cases} x=\dfrac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-b_1a_{23}a_{32}-a_{12}b_2a_{33}-a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ y=\dfrac{a_{11}b_2a_{33}+b_1a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}b_3-a_{11}a_{23}b_3-b_1a_{21}a_{33}-a_{13}b_2a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \\ z=\dfrac{a_{11}a_{22}b_3+a_{12}b_2a_{31}+b_1a_{21}a_{32}-a_{11}b_2a_{32}-a_{12}a_{21}b_3-b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}} \end{cases}$$

三阶行列式的定义

对表示三元方程组的解，定义三阶行列式为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{array}$$

三阶行列式示意图

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

三阶行列式示意图

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

例 2　求下列三阶行列式的值.

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix};\qquad (2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

练习 2　求下列三阶行列式的值.

$$(1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix};\ (2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix};\ (3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

例 2　求下列三阶行列式的值.

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 96; \qquad (2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}.$$

练习 2　求下列三阶行列式的值.

$$(1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}; (2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}; (3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

例 2 求下列三阶行列式的值.

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 0 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 96; \qquad (2)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -1.$$

练习 2 求下列三阶行列式的值.

$$(1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 7 & 9 \end{vmatrix}; (2)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}; (3)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

复习 1　求下列行列式的值.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & 16 \end{vmatrix}$.

第二节	行列式的性质
2.1	行列式的基本性质
2.2	行列式的公理定义
2.3	四阶行列式的计算
2.4	n 阶行列式的计算

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

副对角线：从右上角到左下角的对角线

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

副对角线：从右上角到左下角的对角线

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0

- 二阶的：$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$；三阶的：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

行列式的规范性

主对角线：从左上角到右下角的对角线

副对角线：从右上角到左下角的对角线

单位行列式：主对角线上元素为 1 其他元素为 0

- 二阶的：$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$；三阶的：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

性质 1 (规范性)　单位行列式的值为 1.

行列式的反称性

性质 2 (反称性)　行列式交换两行（列）后，它的值变号.

行列式的反称性

性质 2 (反称性)　行列式交换两行（列）后，它的值变号.

例如，$D=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 1 & 4\end{vmatrix}=7$，则交换该行列式两行后得到

$$D'=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-7.$$

行列式的数乘性

性质 3 (数乘性)　行列式某行（列）每个元素都乘以 k 倍后，它的值变为原来的 k 倍.

行列式的数乘性

性质 3 (数乘性) 行列式某行（列）每个元素都乘以 k 倍后，它的值变为原来的 k 倍.

例如，$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = -28k$

行列式的数乘性

性质 3 (数乘性)　行列式某行（列）每个元素都乘以 k 倍后，它的值变为原来的 k 倍.

例如，$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -28 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3k \\ 0 & 5 & 4k \\ 1 & 6 & 3k \end{vmatrix} = -28k$

注记　行列式某一行（列）的公因子可以提到行列式外边.

行列式的可加性

性质 4 (可加性)　若行列式 D_1 和 D_2 在某行（列）之外的其他元素都相同，则两者之和等于另一个行列式 D. 其中 D 在该行（列）的元素等于 D_1 和 D_2 对应元素之和，其他位置的元素与 D_1 和 D_2 相同.

行列式的可加性

性质 4 (可加性) 若行列式 D_1 和 D_2 在某行（列）之外的其他元素都相同，则两者之和等于另一个行列式 D. 其中 D 在该行（列）的元素等于 D_1 和 D_2 对应元素之和，其他位置的元素与 D_1 和 D_2 相同.

例如：

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 9 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 7 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

行列式基本性质总结

性质 1 (规范性)　单位行列式的值为 1.

行列式基本性质总结

性质 1 (规范性)　单位行列式的值为 1.

性质 2 (反称性)　交换两行 (列) 后，值变号.

行列式基本性质总结

性质 1 (规范性)　单位行列式的值为 1.

性质 2 (反称性)　交换两行 (列) 后，值变号.

性质 3 (数乘性)　某行 (列) 乘 k 倍，值变 k 倍.

行列式基本性质总结

性质 1 (规范性)　单位行列式的值为 1.

性质 2 (反称性)　交换两行 (列) 后，值变号.

性质 3 (数乘性)　某行 (列) 乘 k 倍，值变 k 倍.

性质 4 (可加性)　两式仅一行 (列) 不同可相加.

性质 5 若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零.

性质 5　若行列式其中某行（列）所有元素都为零，则它的值为零.

例如，$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 7 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

性质 6　若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零.

性质 6　若行列式其中两行（列）对应元素相同，则它的值为零.

例如，$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 7 & 9 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

性质 7　若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零.

性质 7　若行列式其中两行（列）对应元素成比例，则它的值为零.

例如，$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 7 & 9 & 21 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

性质8 行列式的某行（列）的每个元素都加上另一行（列）对应位置元素的 k 倍，它的值不变.

性质 8　行列式的某行（列）的每个元素都加上另一行（列）对应位置元素的 k 倍，它的值不变.

例 1　利用行列式的性质说明 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$

符号说明

行列式有如下三种初等运算：

1 $r_i \longleftrightarrow r_j$ 表示第 i 行和第 j 行交换

符号说明

行列式有如下三种初等运算：

1 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行和第 j 行交换

2 $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍

符号说明

行列式有如下三种初等运算：

1. $r_i \leftrightarrow r_j$　表示第 i 行和第 j 行交换
2. $r_i \times k$　表示第 i 行乘以 k 倍
3. $r_i + kr_j$　表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

符号说明

行列式有如下三种初等运算：

1 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示第 i 行和第 j 行交换

2 $r_i \times k$ 表示第 i 行乘以 k 倍

3 $r_i + kr_j$ 表示第 i 行加上第 j 行的 k 倍

1 $c_i \leftrightarrow c_j$ 表示第 i 列和第 j 列交换

2 $c_i \times k$ 表示第 i 列乘以 k 倍

3 $c_i + kc_j$ 表示第 i 列加上第 j 列的 k 倍

在利用行列式的性质 3 时，下面两种说法是一样的：

1. 行列式第 i 行乘以 $\dfrac{1}{k}$ 倍 .... $r_i \times \dfrac{1}{k}$；
2. 行列式第 i 行除以 k 倍 .... $r_i \div k$.

在利用行列式的性质 3 时，下面两种说法是一样的：

1. 行列式第 i 行乘以 $\frac{1}{k}$ 倍 . . . . $r_i \times \frac{1}{k}$;
2. 行列式第 i 行除以 k 倍 . . . . $r_i \div k$.

在利用行列式的性质 8 时，下面两种说法是一样的：

1. 第 i 行加上第 j 行的 $-k$ 倍 . . . . $r_i + (-k)r_j$;
2. 第 i 行减去第 j 行的 k 倍 . . . . $r_i - kr_j$.

在利用行列式的性质 3 时，下面两种说法是一样的：

1 行列式第 i 行乘以 $\frac{1}{k}$ 倍 ………………… $r_i \times \frac{1}{k}$；

2 行列式第 i 行除以 k 倍 ………………… $r_i \div k$.

在利用行列式的性质 8 时，下面两种说法是一样的：

1 第 i 行加上第 j 行的 $-k$ 倍 ………… $r_i + (-k)r_j$；

2 第 i 行减去第 j 行的 k 倍 ……………… $r_i - kr_j$.

注意此时第 i 行元素改变，而第 j 行元素保持不变.

符号说明

例如：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \overset{r_3 - r_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=\!=\!=} -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_3 \div 3}{=\!=\!=} -3\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

第二节	行列式的性质
2.1	行列式的基本性质
2.2	行列式的公理定义
2.3	四阶行列式的计算
2.4	n 阶行列式的计算

n 阶行列式的性质

性质 1 (规范性)　单位行列式的值为 1.

性质 2 (反称性)　交换两行 (列) 后，值变号.

性质 3 (数乘性)　某行 (列) 乘 k 倍，值变 k 倍.

性质 4 (可加性)　两式仅一行 (列) 不同可相加.

n 阶行列式的性质

性质 1 (规范性)　单位行列式的值为 1.

性质 2 (反称性)　交换两行 (列) 后，值变号.

性质 3 (数乘性)　某行 (列) 乘 k 倍，值变 k 倍.

性质 4 (可加性)　两式仅一行 (列) 不同可相加.

实际上，n 阶行列式也满足这些基本性质，而且由这些性质唯一确定.

n 阶行列式的定义

定义 1　由 n 行 n 列共 n^2 个元素 a_{ij}（$i,j=1,\cdots,n$）组成的，满足前面所述的性质 1 至性质 4 的多项式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式.

按照性质 1，n 阶单位行列式的值同样为 1．即

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & \text{\huge 0} & \\ & & 1 & & \\ & \text{\huge 0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

主对角线之外都为零的行列式称为对角行列式．由性质 3，它的值为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & 0 \\ & & a_{33} & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 2　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

例 3　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$.

主对角线下面都为零的行列式称为上三角行列式．上三角行列式的值和相应的对角行列式的值相同：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn},$$

主对角线上面都为零的行列式称为下三角行列式．下三角行列式的值和相应的对角行列式的值相同：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ * & & a_{33} & \\ & & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

上三角行列式和下三角行列式合称三角行列式．

定义 2　对一个行列式 D，将它的行和列交换，即将所有 a_{ij} 和 a_{ji} 元素交换，得到的新行列式，称为行列式 D 的转置行列式，记为 D^{T}.

定义 2　对一个行列式 D，将它的行和列交换，即将所有 a_{ij} 和 a_{ji} 元素交换，得到的新行列式，称为行列式 D 的转置行列式，记为 D^{T}.

例如，设行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = -40$，则它的转置行列式为 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -40$.

定义 2　对一个行列式 D，将它的行和列交换，即将所有 a_{ij} 和 a_{ji} 元素交换，得到的新行列式，称为行列式 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}.

例如，设行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}=-40$，则它的转置行列式为 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}=-40$.

性质 9　行列式转置之后值不变，即 $D^{\mathrm{T}}=D$.

第二节	行列式的性质
2.1	行列式的基本性质
2.2	行列式的公理定义
2.3	四阶行列式的计算
2.4	n 阶行列式的计算

四阶行列式的计算方法一

$$\begin{vmatrix} a & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix}$$

四阶行列式的计算方法一

$$\begin{vmatrix} a & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \overset{r_i - kr_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix}$$

四阶行列式的计算方法一

$$\begin{vmatrix} a & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xlongequal{r_i - kr_1} \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i - kr_2} \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix}$$

四阶行列式的计算方法一

$$\begin{vmatrix} a & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xlongequal{r_i - kr_1} \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i - kr_2} \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$$

四阶行列式的计算方法一

$$\begin{vmatrix} a & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xlongequal{r_i - kr_1} \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_i - kr_2} \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & * & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} = a \cdot b \cdot c \cdot d$$

例 4　计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

例 4　计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

练习 1　计算四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

例 4　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

练习 1　计算四阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-12$.

例 5　计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$.

例 5　计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 5 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -62.$$

n 阶行列式的计算

例 7　求下面 n 阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 & n-1 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-2) & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & -(n-2) & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

n 阶行列式的计算方法

n 阶行列式的计算方法：使用批量变换

1. 先将它的很多元素变成零
2. 再将它变化为三角行列式

n 阶行列式的计算方法

n 阶行列式的计算方法：使用批量变换

1. 先将它的很多元素变成零
2. 再将它变化为三角行列式

在计算 n 阶行列式时，下面两种批量变换不同：

- 从第 2 行到第 n 行，各行依次加上前一行.
- 从第 n 行到第 2 行，各行依次加上前一行.

例 8　求下面 n 阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

例 8　求下面 n 阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

方法一：从第 n 行到第 2 行，各行减去前一行.

例 8　求下面 n 阶行列式的值.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

方法一：从第 n 行到第 2 行，各行减去前一行.

方法二：从第 2 行起，各行减去第一行（练习）.

复习与提高

复习1 将行列式化为三角行列式，并计算其值：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

复习与提高

复习 1　将行列式化为三角行列式，并计算其值：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \end{vmatrix}=-40.$$

复习与提高

注记　行列式的初等运算与一般与先后顺序有关.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-r_2]{r_2-r_3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & -3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

上面的做法是错误的！

第三节	行列式的展开
3.1	行列式的展开式
3.2	行列式展开式的使用
3.3	n 阶行列式的展开

三阶行列式的展开式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

其中规定 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

假设 D 为一个 n 阶行列式：

- 余子式 M_{ij} 是将 D 的第 i 行和第 j 列去掉之后得到的 $n-1$ 阶行列式.
- 代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

假设 D 为一个 n 阶行列式:

- **余子式** M_{ij} 是将 D 的第 i 行和第 j 列去掉之后得到的 $n-1$ 阶行列式.
- **代数余子式** $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

定理 1 对 n 阶行列式,取第 i 行,我们有行列式按行展开公式

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

假设 D 为一个 n 阶行列式:

- 余子式 M_{ij} 是将 D 的第 i 行和第 j 列去掉之后得到的 $n-1$ 阶行列式.
- 代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

定理 1　对 n 阶行列式，取第 i 行，我们有行列式按行展开公式

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

类似地，取第 j 列，我们有行列式按列展开公式

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

例 1　将行列式 $D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix}$ 按第 2 行展开计算它的值.

例 1 将行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$ 按第 2 行展开计算它的值.

练习 1 将行列式 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&4\\4&9&16\end{vmatrix}$ 分别按第 3 行和第 3 列展开并计算它的值.

例 2　对上面的行列式，我们也可以利用行列式的性质，先作简化再展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$$

例 2　对上面的行列式，我们也可以利用行列式的性质，先作简化再展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix}$$

例 2　对上面的行列式，我们也可以利用行列式的性质，先作简化再展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}$$

例 2　对上面的行列式，我们也可以利用行列式的性质，先作简化再展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 2$$

例 2　对上面的行列式，我们也可以利用行列式的性质，先作简化再展开：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 12 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = 2$$

练习 2　用上面的方法计算行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix}$.

四阶行列式的计算方法二

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix}$$

四阶行列式的计算方法二

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix}$$

四阶行列式的计算方法二

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

四阶行列式的计算方法二

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选择}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & b \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

四阶行列式的计算方法二

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选择}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & b \\ * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & b \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

四阶行列式的计算方法二

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & 0 & * \\ * & * & a & * \\ * & * & 0 & * \\ * & * & 0 & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{选择}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ * & * & b \\ * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{运算}} \begin{vmatrix} * & * & * \\ 0 & 0 & b \\ * & * & * \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{展开}} \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix}$$

例 3　利用行列式展开计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

例 3　利用行列式展开计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

练习 3　计算四阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

例 3　利用行列式展开计算 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

练习 3　计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 160.$

高阶行列式的计算方法

利用行列式性质，高阶行列式有两种计算方法：

高阶行列式的计算方法

利用行列式性质，高阶行列式有两种计算方法：

1. 三角法：从左到右，逐步变成上三角行列式

高阶行列式的计算方法

利用行列式性质，高阶行列式有两种计算方法：

1 三角法：从左到右，逐步变成上三角行列式

2 降阶法：从高到低，展开以降低行列式阶数

高阶行列式的计算方法

利用行列式性质，高阶行列式有两种计算方法：

1. 三角法：从左到右，逐步变成上三角行列式
2. 降阶法：从高到低，展开以降低行列式阶数

我们推荐使用降阶法，因为它更加灵活方便.

第三节	行列式的展开
3.1	行列式的展开式
3.2	行列式展开式的使用
3.3	*n* 阶行列式的展开

由展开式得到行列式

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D$$

由展开式得到行列式

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D$$

$$\Longrightarrow uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由展开式得到行列式

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D$$

$$\Longrightarrow uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

由展开式得到行列式

$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=D$$

$$\Longrightarrow uA_{21}+vA_{22}+wA_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ u & v & w \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Longrightarrow a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=0$$

定理 2　对于行列式的第 i 行和第 r 行，我们有

$$a_{i1}A_{r1}+a_{i2}A_{r2}+\cdots+a_{in}A_{rn}=\begin{cases} D, & \text{如果 } i=r \\ 0, & \text{如果 } i\neq r \end{cases}$$

而对于行列式的第 j 列和第 s 列，有

$$a_{1j}A_{1s}+a_{2j}A_{2s}+\cdots+a_{nj}A_{ns}=\begin{cases} D, & \text{如果 } j=s \\ 0, & \text{如果 } j\neq s \end{cases}$$

例 5　已知 $D = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$, 求 $M_{13} + 2M_{23} + 3M_{33} + 4M_{43}$.

例 5　已知 $D=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 7 & 0 \end{vmatrix}$，求 $M_{13}+2M_{23}+3M_{33}+4M_{43}$.

练习 5　已知行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & -6 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$，求 $3M_{41}+4M_{42}-5M_{43}-2M_{44}$.

例 6　求行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$ 的值.

这个行列式我们称为范德蒙行列式.

例 6　求行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 & x_4^3 \end{vmatrix}$ 的值.

这个行列式我们称为范德蒙行列式.

例 7　求四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}$ 的值.

范德蒙行列式

实际上，有任何 $n(n \geqslant 2)$ 阶的范德蒙行列式：

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

第三节	行列式的展开
3.1	行列式的展开式
3.2	行列式展开式的使用
3.3	n 阶行列式的展开

利用展开式计算 n 阶行列式

例 8　求 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & x-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x-1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x & {\color{red}0} \end{vmatrix}$$

利用展开式计算 n 阶行列式

练习 6 求 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1-x & x-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & x-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1-x & 0 & 0 & \cdots & x-1 & 0 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & x-1 & 0 \\ 1-x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

行列式的展开

复习1　计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

行列式的展开

复习1　计算四阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = -49.$

第四节	克莱姆法则
4.1	n 元线性方程组
4.2	齐次线性方程组

对于二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$，

对于二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$，

- 假设系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$

对于二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$，

- 假设系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$,
- 则方程组有唯一解 $\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} \end{cases}$，

对于二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$,

- 假设系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$,
- 则方程组有唯一解 $\begin{cases} x_1 = \frac{D_1}{D} \\ x_2 = \frac{D_2}{D} \end{cases}$,
- 其中 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$

定义 1 对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

称 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 为其系数行列式.

克莱姆法则

定理 1　对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

克莱姆法则

定理 1 对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果它的系数行列式 $D \neq 0$,

克莱姆法则

定理 1　对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果它的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

克莱姆法则

定理 1　对于 n 元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

如果它的系数行列式 $D \neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中将 D 的第 j 列用右边常数项代替后得到 D_j.

例 1　用克莱姆法则求下面方程组的解

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

例 1　用克莱姆法则求下面方程组的解

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

练习 1　用克莱姆法则求下面方程组的解

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 90 \\ x_2 + x_3 = 86 \; . \\ x_1 + x_3 = 80 \end{cases}$$

第四节	克莱姆法则
4.1	n 元线性方程组
4.2	齐次线性方程组

齐次线性方程组

如果线性方程组右边的所有 b_i（$1 \leqslant i \leqslant n$）都为零，我们称它为齐次线性方程组.

齐次线性方程组

如果线性方程组右边的所有 b_i（$1 \leqslant i \leqslant n$）都为零，我们称它为齐次线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组

如果线性方程组右边的所有 b_i（$1 \leqslant i \leqslant n$）都为零，我们称它为齐次线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

定理 2　如果 $D \neq 0$，则齐次方程组仅有零解.

齐次线性方程组

如果线性方程组右边的所有 b_i（$1 \leqslant i \leqslant n$）都为零，我们称它为齐次线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

定理 2　如果 $D \neq 0$，则齐次方程组仅有零解．也就是说：若齐次方程组有非零解，则 $D = 0$.

例 2　判断下面的齐次方程组:

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+5x_3+5x_4=0 \\ 4x_1+5x_2+6x_3+6x_4=0 \\ 5x_1+6x_2+8x_3+9x_4=0 \end{cases}$$

是否只有零解.

例 2　判断下面的齐次方程组：

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4=0 \\ 3x_1+4x_2+5x_3+5x_4=0 \\ 4x_1+5x_2+6x_3+6x_4=0 \\ 5x_1+6x_2+8x_3+9x_4=0 \end{cases}$$

是否只有零解.

例 3　已知方程组 $\begin{cases} kx+2y=0 \\ 2x-y=0 \end{cases}$ 有非零解，求 k.

第五节	行列式的显式定义
5.1	排列及逆序数
5.2	n 阶行列式的定义
5.3	用定义计算行列式

行列式各项的符号

行列式的每一项都是每行每列各取一个元素共 n 个元素相乘所得.

行列式各项的符号

行列式的每一项都是每行每列各取一个元素共 n 个元素相乘所得.

二阶行列式为: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

行列式各项的符号

行列式的每一项都是每行每列各取一个元素共 n 个元素相乘所得.

二阶行列式为: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

三阶行列式为:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \end{matrix}$$

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半
- 三阶行列式一共有 $6 = 3!$ 项，正负各半

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半
- 三阶行列式一共有 $6 = 3!$ 项，正负各半
- ★ 猜测四阶行列式一共应该有 $4! = 24$ 项

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半
- 三阶行列式一共有 $6 = 3!$ 项，正负各半
- ★ 猜测四阶行列式一共应该有 $4! = 24$ 项
- ★ 猜测四阶行列式取正号和负号的各有 12 项

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半
- 三阶行列式一共有 $6 = 3!$ 项，正负各半
- ★ 猜测四阶行列式一共应该有 $4! = 24$ 项
- ★ 猜测四阶行列式取正号和负号的各有 12 项

问题：四阶行列式的表达式应该有多少项？

- 二阶行列式一共有 $2 = 2!$ 项，正负各半
- 三阶行列式一共有 $6 = 3!$ 项，正负各半
- ★ 猜测四阶行列式一共应该有 $4! = 24$ 项
- ★ 猜测四阶行列式取正号和负号的各有 12 项

取正号或负号的关键在于下标的排列.

定义 1　由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$，称为一个 n 级排列.

定义 1　由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n 级排列.

定义 2　在一个 n 级排列中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面（$i_s < i_t$），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序.

定义 1　由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n 级排列.

定义 2　在一个 n 级排列中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面（$i_s < i_t$），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序. 一个 n 级排列的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

定义 1 由 n 个不同的数 1，2，$\cdots$，n 组成的有序数组 $i_1 i_2 \cdots i_n$，称为一个 n 级排列.

定义 2 在一个 n 级排列中，如果有较大的数 i_t 排在较小的数 i_s 前面（$i_s < i_t$），则称 i_t 和 i_s 组成一个逆序. 一个 n 级排列的逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$.

定义 3 如果一个排列的逆序数为奇数（偶数），则称它为奇排列（偶排列）.

例 1　求下面这些排列的逆序数并判定其奇偶性：

(1) 3142；(2) 4231；(3) 31524.

例 1　求下面这些排列的逆序数并判定其奇偶性：

(1) 3142；(2) 4231；(3) 31524.

练习 1　求下面这些排列的逆序数并判定其奇偶性：

(1) 1432；(2) 2431；(3) 54321.

定义　交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列．这个新排列称为原来排列的一个**对换**.

定义　交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列. 这个新排列称为原来排列的一个对换.

定理 1　任何排列经过一个对换之后奇偶性改变.

定义　交换排列中其中两个数的位置，而保持其他数的位置不变，就得到一个新排列．这个新排列称为原来排列的一个**对换**．

定理 1　任何排列经过一个对换之后奇偶性改变．

注记　因为排列经过对换之后奇偶性改变，所以在所有 n 级排列中，奇排列和偶排列各占一半．

第五节	行列式的显式定义
5.1	排列及逆序数
5.2	n 阶行列式的定义
5.3	用定义计算行列式

定义 4　由 n^2 个元素 a_{ij}（$i, j = 1, 2, \cdots, n$）组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \in S_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

就称为 n 阶行列式，其中 S_n 是所有 n 级排列组成的集合.

第五节	行列式的显式定义
5.1	排列及逆序数
5.2	n 阶行列式的定义
5.3	用定义计算行列式

例 2　在四阶行列式展开式中，确定下列各项的符号：

(1) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$；　　(2) $a_{33}a_{24}a_{12}a_{41}$.

例 2　在四阶行列式展开式中，确定下列各项的符号：

(1) $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$；　　　(2) $a_{33}a_{24}a_{12}a_{41}$.

练习 2　在四阶行列式展开式中，确定下列各项符号：

(1) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}$；　　　(2) $a_{42}a_{24}a_{11}a_{33}$.

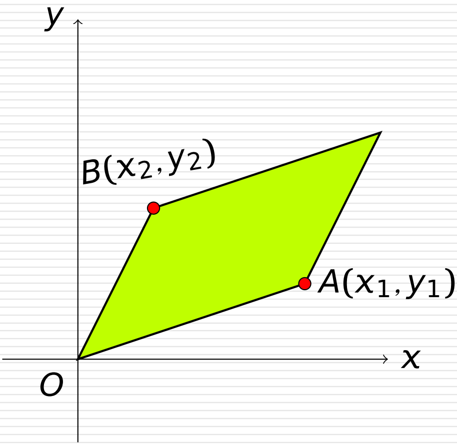
例 3　由显式定义计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

例 3　由显式定义计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值.

练习 3　由显式定义计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

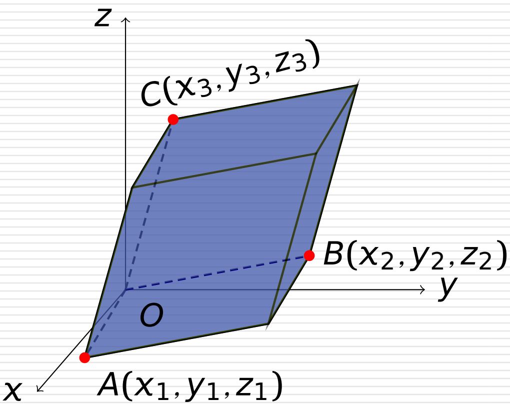
第二节	行列式的性质
第三节	行列式的展开
第四节	克莱姆法则
第五节	行列式的显式定义
第六节	行列式的几何意义

二阶行列式的几何意义



二阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ 的绝对值等于平行四边形的面积.

三阶行列式的几何意义



三阶行列式 $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ 的绝对值等于平行六面体的体积.