线性代数课程

第二章 · 矩阵

2019 年 5 月 1 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

求线性方程组的解

问题：求出线性方程组的全部解

- 未知数个数 $=$ 方程个数 $\Longrightarrow$ 已解决
- 未知数个数 $\neq$ 方程个数 $\Longrightarrow$ 待解决

求线性方程组的解

问题：求出线性方程组的全部解

- 未知数个数 $=$ 方程个数 $\Longrightarrow$ 已解决
- 未知数个数 $\neq$ 方程个数 $\Longrightarrow$ 待解决

例如：确定下列线性方程组的全部解

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 19 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 28 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 35 \end{cases}$$

求线性方程组的解

抽出方程组两边各个常数，得到两个矩形阵列：

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 19 \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 - 6x_4 = 28 \\ 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 8x_4 = 35 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -9 & 4 \\ 2 & 6 & 7 & -6 \\ 4 & -3 & 5 & 8 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 19 \\ 28 \\ 35 \end{pmatrix}.$$

方程组的全部解完全由这两个矩形阵列所决定.

矩阵的定义

定义 1　由 m 行 n 列共 $m \times n$ 个元素排列而成的如下数学结构

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}$$

称为 $m \times n$ 矩阵．为了表明矩阵的行数 m 和列数 n，有时也将 A 写为 $A_{m\times n}$ 或者 $(a_{ij})_{m\times n}$．如果 $m = n$，则简称 A 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵．

如果一个 $m \times n$ 矩阵所有位置的元素都等于零，则称它为零矩阵，记为 $O_{m\times n}$，或者 O.

如果一个 $m \times n$ 矩阵所有位置的元素都等于零，则称它为零矩阵，记为 $O_{m\times n}$，或者 O. 称两个矩阵 A 和 B 相等，记为 $A = B$，如果

- 两者的行数和列数相同；
- 对应位置的元素都相同.

否则称这两个矩阵不相等，记为 $A \neq B$.

如果一个 $m \times n$ 矩阵所有位置的元素都等于零，则称它为零矩阵，记为 $O_{m\times n}$，或者 O. 称两个矩阵 A 和 B 相等，记为 $A = B$，如果

- 两者的行数和列数相同；
- 对应位置的元素都相同.

否则称这两个矩阵不相等，记为 $A \neq B$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

区分矩阵和行列式

注意不要将 n 阶矩阵和 n 阶行列式的概念混淆：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

第二节	矩阵的运算
2.1	矩阵的加减
2.2	矩阵的数乘
2.3	矩阵的乘法
2.4	矩阵的转置
2.5	矩阵的幂次
2.6	矩阵的行列式

矩阵的加法

$$A+B=(a_{ij})_{m\times n}+(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix};$$

矩阵的减法

$$A - B = (a_{ij})_{m\times n} - (b_{ij})_{m\times n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m\times n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的加减法

注意，只有这两个矩阵是同种类型的，即它们的行数和列数相等，才能作加减法，此时得到的结果仍为同类型的矩阵.

矩阵的加减法

注意，只有这两个矩阵是同种类型的，即它们的行数和列数相等，才能作加减法，此时得到的结果仍为同类型的矩阵.

例 1　$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$，求 $A + B$ 和 $A - B$.

矩阵的加法

性质 1　矩阵的加法满足如下性质：

1. $A+B=B+A$;
2. $A+O=O+A=A$;
3. $(A+B)+C=A+(B+C)$.

第二节	矩阵的运算
2.1	矩阵的加减
2.2	矩阵的数乘
2.3	矩阵的乘法
2.4	矩阵的转置
2.5	矩阵的幂次
2.6	矩阵的行列式

矩阵的数乘

$$kA = k(a_{ij})_{m\times n} = (ka_{ij})_{m\times n}$$

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

例 2 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $2A$.

例 2 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $2A$.

练习 1 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$.

求 $3A+2B-4C$.

例 2 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, 求 $2A$.

练习 1 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \end{pmatrix}$. 求 $3A+2B-4C$.

练习 2 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$, 且 $5A+3X=B$. 求 X.

区分矩阵和行列式

注意，常数 k 和行列式相乘时，等同于用 k 乘以某一行或某一列的每个元素．而 k 和矩阵相乘时，等同于用 k 乘以矩阵的所有元素．例如：

$$k\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 2k \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \qquad k\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 2k \\ 3k & 4k \end{pmatrix}.$$

矩阵的数乘

性质2　设 k，l 为常数，A，B 为同种类型的矩阵. 矩阵的数乘有如下性质：

1. $(k+l)A = kA + lA$;
2. $k(lA) = (kl)A = l(kA)$;
3. $k(A+B) = kA + kB$.

第二节	矩阵的运算
2.1	矩阵的加减
2.2	矩阵的数乘
2.3	矩阵的乘法
2.4	矩阵的转置
2.5	矩阵的幂次
2.6	矩阵的行列式

矩阵的乘法

对两个矩阵作乘法，不能拿对应元素直接相乘．首先 $A_{m\times r}$ 和 $B_{s\times n}$ 可以相乘，需要满足 $r = s$, 即第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数．

定义 1　对矩阵 $A_{m\times r} = (a_{ij})_{m\times r}$ 和 $B_{r\times n} = (b_{ij})_{r\times n}$，我们定义

$$A_{m\times r}B_{r\times n} = C_{m\times n} = (c_{ij})_{m\times n}$$

其中 $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$.

设 $C = AB$，则 c_{ij} 由 A 的第 i 行和 B 的第 j 列的对应元素相乘，再相加得到.

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \boxed{\begin{matrix} b_{13} \\ b_{23} \end{matrix}} \\ b_{21} & b_{22} & \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22}} & \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & \boxed{c_{23}} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} \end{pmatrix} = C = AB$$

第 2 行第 3 列元素 $\boxed{c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}}$

矩阵的乘法

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 0 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA.

矩阵的乘法

例 3 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8 & 1\\ 7 & 0\\ 4 & 9\end{pmatrix}$，求 AB 和 BA.

这个例子说明，乘法交换律 $AB=BA$ 对矩阵乘法一般不成立！

矩阵的乘法

例 3 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 0 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$, 求 AB 和 BA.

这个例子说明，乘法交换律 $AB = BA$ 对矩阵乘法一般不成立！

定义 矩阵乘积 AB 称为 “A 左乘 B” 或 “B 右乘 A”.

矩阵的乘法

例 3 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}8&1\\7&0\\4&9\end{pmatrix}$，求 AB 和 BA.

这个例子说明，乘法交换律 $AB=BA$ 对矩阵乘法一般不成立！

定义　矩阵乘积 AB 称为“A 左乘 B”或“B 右乘 A”.

定义　若矩阵乘积 $AB=BA$，则称 A 和 B 可交换.

矩阵的乘法

例 4 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 $AB=$

矩阵的乘法

例 4　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则 $AB=O$.

矩阵的乘法

例 4　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB = O$.

注记　这个例子说明，对于矩阵乘法，从 $AB = O$ 不能推出 $A = O$ 或 $B = O$.

矩阵的乘法

例 4　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, 则 $AB = O$.

注记　这个例子说明，对于矩阵乘法，从 $AB = O$ 不能推出 $A = O$ 或 $B = O$.

注记　从 $AB = AC$ 和 $A \neq O$ 不能推出 $B = C$，即乘法消去律一般不成立！

矩阵的乘法

性质 3　矩阵的乘法满足下列性质（假设乘法运算都满足条件）：

1. $(AB)C = A(BC)$;
2. $(A+B)C = AC+BC$;
3. $C(A+B) = CA+CB$;
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$.

第二节	矩阵的运算
2.1	矩阵的加减
2.2	矩阵的数乘
2.3	矩阵的乘法
2.4	矩阵的转置
2.5	矩阵的幂次
2.6	矩阵的行列式

矩阵的转置

定义 2　对一个 $m \times n$ 的矩阵 A，将它的行和列的位置交换，即将第 i 行第 j 列的元素放在第 j 行第 i 列，得到新的 $n \times m$ 矩阵，称为矩阵 A 的转置，记为 A^{T}.

矩阵的转置

定义 2 对一个 $m \times n$ 的矩阵 A，将它的行和列的位置交换，即将第 i 行第 j 列的元素放在第 j 行第 i 列，得到新的 $n \times m$ 矩阵，称为矩阵 A 的**转置**，记为 A^{T}.

因此，如果 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$A^{\mathrm{T}} = (b_{ij})_{n\times m}$，则有 $b_{ij} = a_{ji}$.

矩阵的转置

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

则有

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

矩阵的转置

例 5 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$, 则 $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4\\2&5\\3&6\end{pmatrix}$.

矩阵的转置

例 5 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$，则 $A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

性质 4 关于矩阵的转置，我们有下列性质：

1. $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$;
2. $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$;
3. $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$;
4. $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

第二节	矩阵的运算
2.1	矩阵的加减
2.2	矩阵的数乘
2.3	矩阵的乘法
2.4	矩阵的转置
2.5	矩阵的幂次
2.6	矩阵的行列式

矩阵的幂次

定义 3　对于一个 n 阶矩阵 A，我们定义

$$A^1 = A,\quad A^2 = A\cdot A,\quad A^3 = A^2\cdot A,$$

$$A^4 = A^3\cdot A,\quad \cdots,\quad A^m = A^{m-1}\cdot A.$$

矩阵的幂次

定义 3 对于一个 n 阶矩阵 A，我们定义

$$A^1 = A,\quad A^2 = A\cdot A,\quad A^3 = A^2\cdot A,$$

$$A^4 = A^3\cdot A,\quad \cdots,\quad A^m = A^{m-1}\cdot A.$$

性质 5 设 A 为方阵，m、n 为自然数，则有

1. $A^m\cdot A^n = A^{m+n}$;
2. $(A^m)^n = A^{mn}$.

矩阵的幂次

例 6　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，求 A^n 和 B^n.

矩阵的幂次

例 6　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，求 A^n 和 B^n.

例 7　设 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，求 C^n.

矩阵的幂次

练习 3 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

1. 计算并验证 $(AB)^2 \neq A^2B^2$,
2. 计算并验证 $A^2 - B^2 \neq (A+B)(A-B)$.

第二节	矩阵的运算
2.1	矩阵的加减
2.2	矩阵的数乘
2.3	矩阵的乘法
2.4	矩阵的转置
2.5	矩阵的幂次
2.6	矩阵的行列式

方阵的行列式

对于一个 n 阶方阵 A，保持各个元素的位置不变，把它看成一个 n 阶行列式, 记为 $|A|$ 或 $\det(A)$.

方阵的行列式

对于一个 n 阶方阵 A，保持各个元素的位置不变，把它看成一个 n 阶行列式, 记为 $|A|$ 或 $\det(A)$.

例如，如果 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, 则 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

方阵的行列式的性质

性质 6 设 A, B 是 n 阶矩阵，k 为常数，则有

1. $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$;
2. $|kA| = k^n|A|$;
3. $|AB| = |A| \cdot |B|$;
4. $|AB| = |BA|$.

例 8　已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$，求 $\left||A|A^2A^{\mathrm{T}}\right|$.

例 8　已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$，求 $\left||A|A^2A^{\mathrm{T}}\right|$.

练习 4　已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$，求 $|4A|$.

复习：矩阵的乘法

复习1 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$，求 AB 和 BA.

几种特殊矩阵

1 单位矩阵

2 数量矩阵

3 对角矩阵

4 三角矩阵

5 对称矩阵

第三节	特殊矩阵
3.1	单位矩阵
3.2	数量矩阵
3.3	对角矩阵
3.4	三角矩阵
3.5	对称矩阵
3.6	一些问题

单位矩阵

对角线位置元素都是 1 而其他位置都是 0 的 n 阶矩阵称为单位矩阵，记为 I_n（有时简记为 I）. 即

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

单位矩阵

在矩阵的乘法中，单位矩阵扮演着和实数乘法中的 1 类似的角色，即有

命题 1 对于单位矩阵和 $m \times n$ 矩阵 A，有如下性质：

$$I_m A = A, \quad A I_n = A.$$

单位矩阵

在矩阵的乘法中，单位矩阵扮演着和实数乘法中的 1 类似的角色，即有

命题 1 对于单位矩阵和 $m \times n$ 矩阵 A，有如下性质：

$$I_m A = A, \quad A I_n = A.$$

另外，对于 n 阶矩阵 A，我们规定 $A^0 = I_n$.

第三节	特殊矩阵
3.1	单位矩阵
3.2	数量矩阵
3.3	对角矩阵
3.4	三角矩阵
3.5	对称矩阵
3.6	一些问题

数量矩阵

对角线位置元素都是 k 而其他位置都是 0 的 n 阶矩阵称为数量矩阵，记为 kI_n. 即

$$kI_n = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}$$

数量矩阵

命题 2　对于数量矩阵和 $m \times n$ 矩阵 A，我们有如下性质：

$$(kI_m)A = A(kI_n) = kA.$$

数量矩阵

命题 2　对于数量矩阵和 $m \times n$ 矩阵 A，我们有如下性质：

$$(kI_m)A = A(kI_n) = kA.$$

事实　两个数量矩阵的和、差及乘积仍然是数量矩阵.

对角矩阵

除了对角线，其他位置都是 0 的 n 阶矩阵称为对角矩阵. 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \mathbf{0} \\ & & a_{33} & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

容易得知，两个对角矩阵的和、差以及乘积仍然是对角矩阵．例如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & & \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

第三节	特殊矩阵
3.1	单位矩阵
3.2	数量矩阵
3.3	对角矩阵
3.4	三角矩阵
3.5	对称矩阵
3.6	一些问题

三角矩阵

对角线下边的各个元素都是 0 的 n 阶矩阵称为上三角矩阵，即形如下面的方阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

三角矩阵

对角线上边的各个元素都是 0 的 n 阶矩阵称为下三角矩阵，即形如下面的方阵：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \mathbf{0} \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & \ast & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

容易得知，两个上（下）三角矩阵的和、差以及乘积仍然是上（下）三角矩阵．例如：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & 0 & a_{33} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & & & * \\ & b_{22} & & \\ & 0 & b_{33} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & * \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & 0 & a_{33}b_{33} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

第三节	特殊矩阵
3.1	单位矩阵
3.2	数量矩阵
3.3	对角矩阵
3.4	三角矩阵
3.5	对称矩阵
3.6	一些问题

对称矩阵

对于 n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，如果对于任何 i,j 都有 $a_{ij}=a_{ji}$, 我们就称它为对称矩阵. 例如，$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵. 容易看出，矩阵 A 是对称的，等价于它满足 $A^{\mathrm{T}}=A$.

对称矩阵

事实

1 设 A 和 B 为对称矩阵，则 $A \pm B$ 也是对称矩阵.

对称矩阵

事实

1. 设 A 和 B 为对称矩阵，则 $A \pm B$ 也是对称矩阵.
2. 设 A 为对称矩阵，则 kA 也是对称矩阵.

对称矩阵

事实

1. 设 A 和 B 为对称矩阵，则 $A \pm B$ 也是对称矩阵.
2. 设 A 为对称矩阵，则 kA 也是对称矩阵.
3. 设 A 为任何方阵，则 $A + A^{\mathrm{T}}$ 必是对称矩阵.

对称矩阵

事实

1. 设 A 和 B 为对称矩阵，则 $A \pm B$ 也是对称矩阵.
2. 设 A 为对称矩阵，则 kA 也是对称矩阵.
3. 设 A 为任何方阵，则 $A + A^{\mathsf{T}}$ 必是对称矩阵.
4. 设 A 为任何矩阵，则 AA^{T} 和 $A^{\mathsf{T}}A$ 都是对称矩阵.

对称矩阵

注记　如果 A, B 都是对称矩阵，AB 未必是对称矩阵.

例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵，但是 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 就不是对称矩阵.

对称矩阵

注记　如果 A, B 都是对称矩阵，AB 未必是对称矩阵.

例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 和 $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 都是对称矩阵，但是 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ 就不是对称矩阵.

定理 1　如果 A, B 都是对称矩阵，而且两者是可交换的，即 $AB = BA$，则 AB 仍然是对称矩阵.

练习 1 对于二阶矩阵，找出下列命题的反例：

1. 由 $A^2 = O$ 未必有 $A = O$；
2. 由 $A^2 = I$ 未必有 $A = I$ 或 $A = -I$;
3. 由 $A^2 = A$ 未必有 $A = O$ 或 $A = I$.

第四节	逆矩阵
4.1	逆矩阵的定义和计算
4.2	可逆矩阵的性质

我们来回顾一下一元一次方程的详细解答过程：

(1) $$ax = b$$

(2) $$a^{-1}(ax) = a^{-1}b$$

(3) $$(a^{-1}a)x = a^{-1}b$$

(4) $$1x = a^{-1}b$$

(5) $$x = a^{-1}b$$

再来看看现在的二元一次方程组:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ x \quad + 2y = 7 \end{cases}$$

我们希望模仿前面的解法. 因此设 $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. 此时原来的方程组变成:

$$AX = B$$

假设存在一个矩阵 A^{-1}，那么应该有 $A^{-1}A = I$．则有

$$
\begin{aligned}
AX &= B && (6)\\
A^{-1}(AX) &= A^{-1}B && (7)\\
(A^{-1}A)X &= A^{-1}B && (8)\\
IX &= A^{-1}B && (9)\\
X &= A^{-1}B && (10)
\end{aligned}
$$

假设存在一个矩阵 A^{-1}，那么应该有 $A^{-1}A = I$. 则有

$$
\begin{aligned}
(6)\quad && AX &= B \\
(7)\quad && A^{-1}(AX) &= A^{-1}B \\
(8)\quad && (A^{-1}A)X &= A^{-1}B \\
(9)\quad && IX &= A^{-1}B \\
(10)\quad && X &= A^{-1}B
\end{aligned}
$$

实际上，我们确实可以找到满足上面条件的 $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$，从而得到方程组的解：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -13 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

定义 1　对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $AB = I, BA = I$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，并称 B 为 A 的逆矩阵.

定义 1　对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $AB=I, BA=I$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，并称 B 为 A 的逆矩阵.

命题 1　如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的.

定义 1 对于 n 阶矩阵 A，如果存在 n 阶矩阵 B，使得 $AB = I, BA = I$，则称矩阵 A 为可逆矩阵，并称 B 为 A 的逆矩阵.

命题 1 如果 A 可逆，那么逆矩阵是唯一的.

由于 A 的逆矩阵是唯一的，我们就把它记为 A^{-1}.

例 1　对角矩阵的逆矩阵还是对角矩阵，即如果矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix},$$

则它的逆矩阵为（假设各个 a_i 均不为零）

$$B=\begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}.$$

定理 1 方阵 A 可逆等价于 $|A| \neq 0$，且当 A 可逆时，有 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$，其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵, 而 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

定理 1 方阵 A 可逆等价于 $|A| \neq 0$，且当 A 可逆时，有 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$，其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵，而 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

注记 1 若 n 阶矩阵 A 的行列式 $|A| = 0$，则称 A 是奇异的．因此，矩阵可逆 $\Longleftrightarrow$ 矩阵非奇异.

例 2　求二阶矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例 2　求二阶矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例 3　求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例 2　求二阶矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例 3　求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

注记　对称阵的逆矩阵仍为对称阵.

例 2 求二阶矩阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

例 3 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

注记 对称阵的逆矩阵仍为对称阵.

练习 1 求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

第四节	逆矩阵
4.1	逆矩阵的定义和计算
4.2	可逆矩阵的性质

命题 2 对于 n 阶矩阵 A，如果 $AB = I$, 则 B 为 A 的逆矩阵，即有 $BA = I$.

例 4 设 $A=\begin{pmatrix}2&3&0\\1&2&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&-3\\-1&2\\0&0\end{pmatrix}$, 计算 AB 和 BA.

例 4　设 $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，计算 AB 和 BA.

注记　在这个例子中，AB 为单位阵，但是 BA 不是单位阵．因此，我们一般不考虑非方阵的逆矩阵.

例 5　已知方阵 A 满足等式

$$2A^2 - 3A + 4I = O,$$

证明 A 可逆，并求出它的逆.

例 5　已知方阵 A 满足等式

$$2A^2-3A+4I=O,$$

证明 A 可逆，并求出它的逆.

练习 2　已知方阵 A 满足等式

$$3A^3-2A^2+5A+I=O,$$

证明 A 可逆，并求出它的逆.

例 6 已知方阵 A 满足等式

$$A^2-3A+4I=O,$$

证明 $A-I$ 可逆，并求出它的逆.

例 6　已知方阵 A 满足等式

$$A^2 - 3A + 4I = O,$$

证明 $A - I$ 可逆，并求出它的逆.

练习 3　已知方阵 A 满足等式

$$2A^2 + 5A - I = O,$$

证明 $A + I$ 可逆，并求出它的逆.

例 6　已知方阵 A 满足等式

$$A^2-3A+4I=O,$$

证明 $A-I$ 可逆，并求出它的逆.

练习 3　已知方阵 A 满足等式

$$2A^2+5A-I=O,$$

证明 $A+I$ 可逆，并求出它的逆.

练习 4　已知方阵 A 满足等式

$$3A^3-2A^2+5A+I=O,$$

证明 $A+I$ 可逆，并求出它的逆.

命题 3　逆矩阵有如下这些性质：

1 如果 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；

命题 3　逆矩阵有如下这些性质：

1. 如果 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 如果 A 可逆，k 为非零常数，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；

命题 3 逆矩阵有如下这些性质：

1. 如果 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 如果 A 可逆，k 为非零常数，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 如果 A 可逆，则 A^{T} 也可逆，而且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$；

命题 3　逆矩阵有如下这些性质：

1. 如果 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 如果 A 可逆，k 为非零常数，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 如果 A 可逆，则 A^{T} 也可逆，而且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$；
4. 如果 A 和 B 同阶而且都可逆，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；

命题 3 逆矩阵有如下这些性质：

1. 如果 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，而且 $(A^{-1})^{-1} = A$；
2. 如果 A 可逆，k 为非零常数，则 kA 也可逆，而且 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$；
3. 如果 A 可逆，则 A^{T} 也可逆，而且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$；
4. 如果 A 和 B 同阶而且都可逆，则 AB 也可逆，而且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$；
5. 如果 A 可逆，则有 $|A^{-1}| = |A|^{-1}$.

例 7　由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此在对矩阵方程中写矩阵逆的时候需要注意矩阵的位置.

例 7　由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此在对矩阵方程中写矩阵逆的时候需要注意矩阵的位置．假设 A, B 可逆，则有

1. $AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C$,
2. $XA = C \Rightarrow X = CA^{-1}$,

例 7　由于矩阵的乘法是不满足交换律的，因此在对矩阵方程中写矩阵逆的时候需要注意矩阵的位置．假设 A, B 可逆，则有

1. $AX = C \Rightarrow X = A^{-1}C,$
2. $XA = C \Rightarrow X = CA^{-1},$
3. $AXB = C \Rightarrow X = A^{-1}CB^{-1},$
4. $XAB = C \Rightarrow X = CB^{-1}A^{-1},$
5. $ABX = C \Rightarrow X = B^{-1}A^{-1}C.$

例 8　已知二阶方阵 X 满足

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

求 X.

例 8　已知二阶方阵 X 满足

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix},$$

求 X.

例 9　设 n 阶矩阵 A 可逆，且 A^* 已知，求 A.

复习：逆矩阵

复习 1　求矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&0&-4\\0&5&3\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

定义 1　对于一个矩阵 A，我们将它的行和列分为几个部分后得到的由小矩阵 A_{ij} 组成的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} = (A_{ij})_{r\times s}$$

称为分块矩阵.

分块矩阵例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ \hdashline 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

- 行的分隔方式为 $3 = 1 + 2$,
- 列的分隔方式为 $4 = 3 + 1$.

分块矩阵例子

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 4 & 7 & 10 \\ 2 & 5 & 8 & 11 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \end{pmatrix}$$

- 行的分隔方式为 $3 = 3$,
- 列的分隔方式为 $4 = 1 + 1 + 1 + 1$.

第五节	分块矩阵
5.1	矩阵的分块
5.2	分块矩阵的运算

分块矩阵的加减法

对于两个分块矩阵，它们可以分块做加减法的条件是：

1. 两个矩阵的行和列的数目相等；
2. 两个矩阵的行和列的分隔方式相同.

分块矩阵的加减法

分块加减法的方法与矩阵的加减法一样，即如果

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1s} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{r1} & B_{r2} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix},$$

则有

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2s}+B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1}+B_{r1} & A_{r2}+B_{r2} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}.$$

分块矩阵的乘法

两个分块矩阵可以分块相乘的要求是:

1. 第一个矩阵的列的数目等于第二个矩阵的行的数目;
2. 第一个矩阵的列的分隔方式等于第二个矩阵的行的分隔方式.

分块矩阵的乘法

分块相乘的方法与矩阵的乘法法则一样：如果

$$A=(A_{ij})_{r\times s},\ B=(B_{jk})_{s\times t},$$

则有

$$AB=C=(C_{ik})_{r\times t},$$

其中 $C_{ik}=\sum_{j=1}^{s}A_{ij}B_{jk}$，对任何 $1\leqslant i\leqslant r$，$1\leqslant k\leqslant t$.

分块矩阵的乘法

例 1　选择矩阵 A 和 B 的合适分块并计算它们的乘积 AB，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&3&2&0\\5&2&0&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0&2&1\\0&-1&3&4\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

练习 1　选择矩阵 A 和 B 的合适分块并计算它们的乘积 AB.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&5&7\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

练习 1　选择矩阵 A 和 B 的合适分块并计算它们的乘积 AB.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 7 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

练习 1 选择矩阵 A 和 B 的合适分块并计算它们的乘积 AB.

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&5&7\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

练习 2 选择矩阵 A 和 B 的合适分块并计算它们的乘积 AB.

$$A=\begin{pmatrix}5&2&0\\0&0&2\\3&1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&7&0&0\\-1&0&1&4\\0&-1&2&5\end{pmatrix}.$$

性质 1　分块对角阵和分块对角阵的乘积还是分块对角阵．即有

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_nB_n \end{pmatrix},$$

其中，A_i 和 B_i 是同阶的方阵，对任何 $1 \leqslant i \leqslant n$.

性质 2　分块上（下）三角阵和分块上（下）三角阵的乘积还是分块上（下）三角阵．即有

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & A_3 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & & & * \\ & B_2 & & \\ & & B_3 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & B_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & * \\ & A_2B_2 & & \\ & & A_3B_3 & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_nB_n \end{pmatrix},$$

性质 3 分块对角阵的逆矩阵还是分块对角阵．即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix}$$

其中要求 A_i 是可逆方阵，对任何 $1\leqslant i\leqslant n$.

性质 3　分块对角阵的逆矩阵还是分块对角阵．即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_n^{-1} \end{pmatrix}$$

其中要求 A_i 是可逆方阵，对任何 $1 \leqslant i \leqslant n$.

注记　分块对角阵的行列式等于对角线位置各子块的行列式的乘积，既有 $|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_n|$.

分块矩阵的逆

例 2　求分块矩阵 $D=\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$ 的逆矩阵，其中 A 与 B 分别为 r 阶与 k 阶可逆矩阵.

第六节	矩阵的初等变换
6.1	初等矩阵和初等变换
6.2	矩阵的等价标准形
6.3	用初等变换求逆矩阵

初等矩阵之一

例 1　观察下面的 3 阶矩阵乘法：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \xlongequal{(1)} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

可以看出，用这种矩阵左乘一个矩阵 A，等同于将 A 的某两行交换了位置.

初等矩阵之一

定义 1 第一种初等矩阵是指如下 n 阶矩阵：

$$I(i,j)=\begin{array}{cl}\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
 & & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
 & & & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{array}\right) & \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
\leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\
 \\
 \\
 \\
\leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\
 \\
 \\

\end{array}\end{array}$$

初等矩阵之二

例 2　观察下面的 3 阶矩阵乘法：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \overset{(2)}{=\!=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

可以看出，用这种矩阵左乘一个矩阵 A，等同于将 A 的某行变成原来的 k 倍.

初等矩阵之二

定义 2　第二种初等矩阵是指如下 n 阶矩阵：

$$I(i(k)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow 第\ i\ 行 \quad (k \neq 0) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

初等矩阵之三

例 3　观察下面的 3 阶矩阵乘法:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\xlongequal{(3)} \begin{pmatrix} a_{11}+la_{31} & a_{12}+la_{32} & a_{13}+la_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

可以看出，用这种矩阵左乘一个矩阵 A，等同于将 A 的某行加上另一行的 l 倍.

初等矩阵之三

定义 3　第三种初等矩阵是指如下 n 阶矩阵：

$$I(i,j(l)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & \cdots & l & & \\ & & & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow \text{第 } i \text{ 行} \\ \\ \leftarrow \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

定义 4 矩阵的**初等变换**是下面这三种对矩阵元素的变换：

1. 矩阵的某两行（列）交换；
2. 某一行（列）乘以非零的 k 倍；
3. 某一行（列）加上另一行（列）的 l 倍.

初等矩阵与初等变换

用初等矩阵 $\Longleftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应

左乘矩阵 A 的初等行变换

初等矩阵	左乘矩阵对应的初等变换
$I(ij)$	第 i 行和第 j 行交换
$I(i(k)), k \neq 0$	第 i 行乘以 k 倍
$I(ij(l)), i \neq j$	第 i 行加上第 j 行的 l 倍

初等矩阵与初等变换

用初等矩阵 $\Leftrightarrow$ 对矩阵 A 作对应

右乘矩阵 A 的初等列变换

初等矩阵	右乘矩阵对应的初等变换
$I(ij)$	第 i 列和第 j 列交换
$I(i(k)), k \neq 0$	第 i 列乘以 k 倍
$I(ij(l)), i \neq j$	第 j 列加上第 i 列的 l 倍

初等矩阵的可逆性

初等矩阵都是可逆的，而且它们的逆仍然是初等矩阵．事实上：

1. $I(ij)^{-1} = I(ij)$;
2. $I(i(k))^{-1} = I(i(k^{-1}))$;
3. $I(ij(l))^{-1} = I(ij(-l))$.

第六节	矩阵的初等变换
6.1	初等矩阵和初等变换
6.2	矩阵的等价标准形
6.3	用初等变换求逆矩阵

定理 1　任何 $m \times n$ 矩阵 A 经过若干次初等变换后，可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

即，除了左上角为 r 阶单位阵，其他元素都是 0．该形式的矩阵称为矩阵 A 的等价标准形.

定理 1 任何 $m \times n$ 矩阵 A 经过若干次初等变换后，可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

即，除了左上角为 r 阶单位阵，其他元素都是 0．该形式的矩阵称为矩阵 A 的等价标准形.

例子 3×4 矩阵的等价标准形有如下几种

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \end{pmatrix}.$$

例 4 求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的等价标准形.

求矩阵的等价标准形的步骤如下：

- 将 a_{11} 变为 1，再将 r_1 和 c_1 的其他元素变为 0
- 将 a_{22} 变为 1，再将 r_2 和 c_2 的其他元素变为 0
- ……………………………

求矩阵的等价标准形的步骤如下：

- 将 a_{11} 变为 1，再将 r_1 和 c_1 的其他元素变为 0
- 将 a_{22} 变为 1，再将 r_2 和 c_2 的其他元素变为 0
- ………………………………

练习 1　求矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ 的等价标准形.

第六节	矩阵的初等变换
6.1	初等矩阵和初等变换
6.2	矩阵的等价标准形
6.3	用初等变换求逆矩阵

用初等变换求逆矩阵

定理 2　设 A 为 n 阶矩阵，则有

1. A 可逆当且仅当它的等价标准形为 I_n；
2. A 可逆当且仅当它可表示为一些初等矩阵的乘积.

用初等变换求逆矩阵

定理 2 设 A 为 n 阶矩阵，则有

1. A 可逆当且仅当它的等价标准形为 I_n；
2. A 可逆当且仅当它可表示为一些初等矩阵的乘积.

用初等变换求逆矩阵的方法：

$$\left(A \;\vdots\; I \right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(I \;\vdots\; A^{-1} \right)$$

用初等变换求逆矩阵

例 5　用初等变换求矩阵的逆矩阵：

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

用初等变换求逆矩阵

例 5 用初等变换求矩阵的逆矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

用初等变换求逆矩阵

用初等行变换求逆矩阵的步骤如下:

$$\text{矩阵} \xrightarrow[\text{变为}]{\text{从左到右}} \text{上三角阵} \xrightarrow[\text{变为}]{\text{从右到左}} \text{对角阵} \rightarrow \text{单位阵}$$

用初等变换求逆矩阵

用初等行变换求逆矩阵的步骤如下:

$$\text{矩阵}\xrightarrow[\text{变为}]{\text{从左到右}}\text{上三角阵}\xrightarrow[\text{变为}]{\text{从右到左}}\text{对角阵}\rightarrow\text{单位阵}$$

注记　如果在过程中发现矩阵的某一行或列全为零,则该矩阵不可逆.

用初等变换求逆矩阵

用初等行变换求逆矩阵的步骤如下：

$$\text{矩阵} \xrightarrow[\text{变为}]{\text{从左到右}} \text{上三角阵} \xrightarrow[\text{变为}]{\text{从右到左}} \text{对角阵} \to \text{单位阵}$$

注记　如果在过程中发现矩阵的某一行或列全为零，则该矩阵不可逆.

练习 2　用初等变换求矩阵的逆矩阵.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

用初等变换求逆矩阵

用初等行变换求逆矩阵的步骤如下：

$$\text{矩阵} \xrightarrow[\text{变为}]{\text{从左到右}} \text{上三角阵} \xrightarrow[\text{变为}]{\text{从右到左}} \text{对角阵} \rightarrow \text{单位阵}$$

注记　如果在过程中发现矩阵的某一行或列全为零，则该矩阵不可逆.

练习 2　用初等变换求矩阵的逆矩阵.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

矩阵的秩：秩序

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 10 \\ -1 & -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$r=0 \qquad r=1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 12 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$r=2 \qquad r=3$$

第七节	矩阵的秩
7.1	秩的定义及性质
7.2	秩的计算和例子

定义 1　对于 $m \times n$ 的矩阵 A，任取其中的 k 行和 k 列，由这 k 行和 k 列交叉处的 k^2 个元素，按照原来的顺序组成的行列式，称为矩阵 A 的一个 k 阶子式.

定义 1　对于 $m \times n$ 的矩阵 A，任取其中的 k 行和 k 列，由这 k 行和 k 列交叉处的 k^2 个元素，按照原来的顺序组成的行列式，称为矩阵 A 的一个 k 阶子式.

例 1　求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \\ 3 & 6 & 15 & 0 \end{pmatrix}$ 的各阶子式.

定义 2　矩阵 A 的非零子式的最大阶数 r 称为矩阵的**秩**，记为 $r(A)$.

定义 2 矩阵 A 的非零子式的最大阶数 r 称为矩阵的**秩**，记为 $r(A)$.

- 如果矩阵 A 有一个非零的 r 阶子式，但是所有大于 r 阶的子式都为零，则我们称矩阵 A 的秩 $r(A)=r$.

定义 2 矩阵 A 的非零子式的最大阶数 r 称为矩阵的**秩**，记为 $r(A)$.

- 如果矩阵 A 有一个非零的 r 阶子式，但是所有大于 r 阶的子式都为零，则我们称矩阵 A 的秩 $r(A)=r$.
- 规定零矩阵的秩为 0. 则 $0 \leqslant r(A) \leqslant \min\{m,n\}$.

定义 2 矩阵 A 的非零子式的最大阶数 r 称为矩阵的**秩**，记为 $r(A)$.

- 如果矩阵 A 有一个非零的 r 阶子式，但是所有大于 r 阶的子式都为零，则我们称矩阵 A 的秩 $r(A) = r$.
- 规定零矩阵的秩为 0. 则 $0 \leqslant r(A) \leqslant \min\{m, n\}$.

例 2 对于前面的矩阵 A，它的秩 $r(A) = 2$.

定义 2 矩阵 A 的非零子式的最大阶数 r 称为矩阵的秩，记为 $r(A)$.

- 如果矩阵 A 有一个非零的 r 阶子式，但是所有大于 r 阶的子式都为零，则我们称矩阵 A 的秩 $r(A)=r$.
- 规定零矩阵的秩为 0. 则 $0 \leqslant r(A) \leqslant \min\{m,n\}$.

例 2 对于前面的矩阵 A，它的秩 $r(A)=2$.

注记 对于 n 阶矩阵 A，$r(A)=n \Longleftrightarrow |A| \neq 0 \Longleftrightarrow$ A 可逆.

矩阵的秩的性质

定理 1　矩阵的秩在初等变换下不变.

矩阵的秩的性质

定理 1　矩阵的秩在初等变换下不变.

推论　矩阵乘以一个可逆矩阵后，秩保持不变．也就是说，如果 A 为 $m \times n$ 矩阵，P 为 m 阶可逆矩阵，Q 为 n 阶可逆矩阵，则有

$$r(PA) = r(A) = r(AQ).$$

第七节	矩阵的秩
7.1	秩的定义及性质
7.2	秩的计算和例子

用初等变换求矩阵的秩

方法：通过初等变换将矩阵化为如下梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{各 } a_{ii} \text{ 均不为零}).$$

结果：矩阵的秩就等于梯形矩阵中元素不全为零的行的数目.

用初等变换求矩阵的秩

例子　下面各矩阵的秩均为 3（设 a,b,c 均不为零）:

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

用初等变换求矩阵的秩

例子 下面各矩阵的秩均为 3（设 a, b, c 均不为零）：

$$\begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & * & * & * \\ 0 & b & * & * \\ 0 & 0 & c & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & * & * \\ 0 & b & * \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

注记 矩阵的秩等于它的等价标准形中的 1 的个数.

矩阵的秩

例 3　求 $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 的秩.

矩阵的秩

例 3　求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ 的秩.

练习 1　求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 6 & 2 \\ 6 & 5 & 12 & 10 \end{pmatrix}$ 的秩.

矩阵的秩

例 5　求 $A=\begin{pmatrix} t+2 & 2t+1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

矩阵的秩

例 5　求 $A=\begin{pmatrix} t+2 & 2t+1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

练习 3　求 $A=\begin{pmatrix} t & 2 & 1 \\ 2 & t & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的秩.

复习与提高

复习1　求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ 的秩.

复习与提高

复习 2　对于 3 阶矩阵 A 和 B，说明下列各结论是否正确：

1. $r(A)=3$，$r(B)=2$，则有 $r(AB)=2$；
2. $r(A)=2$，$r(B)=1$，则有 $r(AB)=1$；
3. $r(A)=1$，$r(B)=0$，则有 $r(AB)=0$.

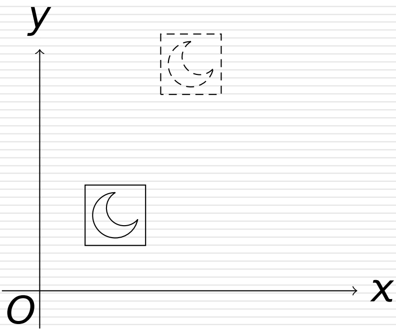
第四节	逆矩阵
第五节	分块矩阵
第六节	矩阵的初等变换
第七节	矩阵的秩
第八节	矩阵的几何意义

矩阵加法等同于平移变换

将平面上点的坐标 (x, y) 看作矩阵，则图形的平移对应于（对每个点）应用矩阵的加法. 例如：

平移：

$$(x, y) + (1, 2) = (x', y')$$



矩阵乘法等同于线性变换

用二阶矩阵乘以坐标矩阵的变换称为线性变换. 即有

$$(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (x',y'),$$

或者

$$\begin{cases} x' = ax + cy \\ y' = bx + dy \end{cases}.$$

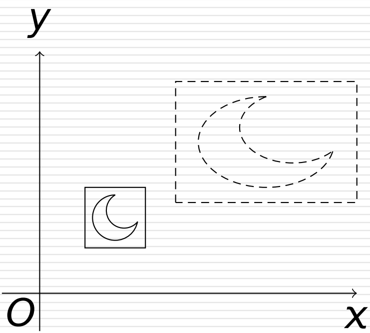
线性变换将把直线变为直线，但可能会将矩形变成平行四边形.

平面图形的线性变换之一

图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

1. 伸缩（x 和 y 分别缩放）:

$$(x,y)\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix} = (x',y')$$

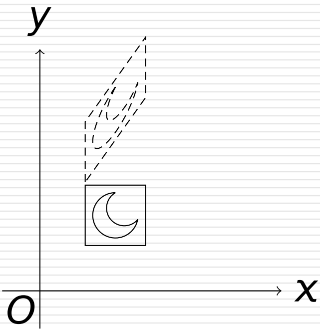


平面图形的线性变换之二

图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

2. 错切（x 不变，y 倾斜）:

$$(x,y)\begin{pmatrix}1 & k\\ 0 & 1\end{pmatrix}=(x',y')$$

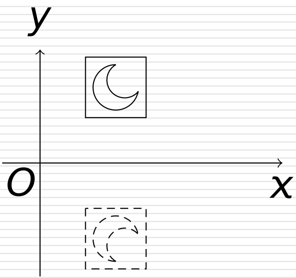


平面图形的线性变换之三

图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

3. 倒影（或称反射）:

$$(x,y)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=(x',y')$$



倒影后逆时针变成顺时针.

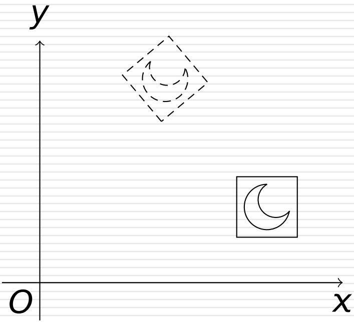
平面图形的线性变换之四

图形的线性变换对应于（对每个点）应用矩阵乘法.

4. 旋转（逆时针转 θ 度）：

$$(x, y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = (x', y')$$

旋转后逆时针还是逆时针.



线性变换的复合

线性变换的复合对应于二阶矩阵的乘积.

线性变换的复合

线性变换的复合对应于二阶矩阵的乘积.

先旋转再伸缩对应于下面的矩阵运算（注意矩阵运算满足结合律）:

$$(x,y)\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1 & 0 \\ 0 & k_2\end{pmatrix}\right)=(x',y')$$

线性变换的复合

线性变换的复合对应于二阶矩阵的乘积.

先旋转再伸缩对应于下面的矩阵运算（注意矩阵运算满足结合律）:

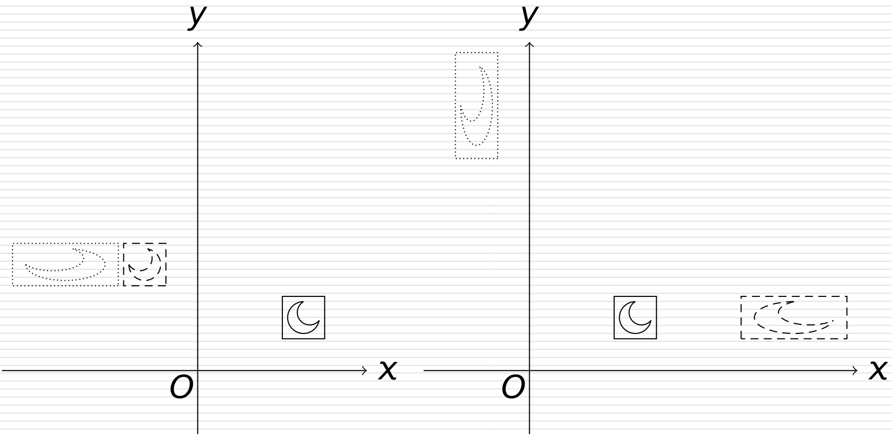
$$(x,y)\left(\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1 & 0 \\ 0 & k_2\end{pmatrix}\right)=(x',y')$$

而先伸缩再旋转对应于下面的矩阵运算:

$$(x,y)\left(\begin{pmatrix}k_1 & 0 \\ 0 & k_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right)=(x',y')$$

线性变换的复合

在上面两个变换中取 $\theta = 90°$, $k_1 = 2.5$, $k_2 = 1$，得到的图形如下：



矩阵乘法无交换律

我们可以看到：对一个图形，先旋转再伸缩和先伸缩再旋转得到的结果通常是不一样的，这也是矩阵乘法不可交换的实际例子.