线性代数课程

第三章 · 线性方程组

2019 年 5 月 1 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	线性方程组的消元解法
第二节	向量组及其线性表示
第三节	向量组的线性相关性
第四节	向量组的秩
第五节	线性方程组解的结构

第一节	线性方程组的消元解法
1.1	一般线性方程组
1.2	齐次线性方程组

一般线性方程组

一般地，由 m 个方程构成的 n 元线性方程组可用如下形式表示：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

一般线性方程组

对这个含 m 个方程的 n 元线性方程组，如果记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则它可以表示为矩阵形式 $Ax = b$. 我们称 A 为系数矩阵，b 为常数项矩阵，$(A \,\vdots\, b)$ 为增广矩阵.

消元法与初等行变换

用消元法求解线性方程组

$\Longleftrightarrow$ 对它的增广矩阵作初等行变换.

消元法与初等行变换

用消元法求解线性方程组

$\Longleftrightarrow$ 对它的增广矩阵作初等行变换.

1 对方程组作 ①$\times k$ $\Longleftrightarrow$ 对增广矩阵作 $r_1 \times k$

消元法与初等行变换

用消元法求解线性方程组

$\Longleftrightarrow$ 对它的增广矩阵作初等行变换.

1 对方程组作 ①$\times k$ $\Longleftrightarrow$ 对增广矩阵作 $r_1 \times k$

2 对方程组作 ②$\times k-$③$\times l$

$\Longleftrightarrow$ 对增广矩阵作 $r_2 \times k$ 再作 $r_2 - l r_3$

消元法与初等行变换

用消元法求解线性方程组

$\Longleftrightarrow$ 对它的增广矩阵作初等行变换.

1 对方程组作 ①$\times k$ $\Longleftrightarrow$ 对增广矩阵作 $r_1 \times k$

2 对方程组作 ②$\times k-$③$\times l$

$\Longleftrightarrow$ 对增广矩阵作 $r_2 \times k$ 再作 $r_2 - l r_3$

对增广矩阵作初等行变换，对应方程组的解不变.

消元法与初等行变换

用消元法求解线性方程组

$\Longleftrightarrow$ 对它的增广矩阵作初等行变换.

1 对方程组作 ①$\times k$ $\Longleftrightarrow$ 对增广矩阵作 $r_1 \times k$

2 对方程组作 ②$\times k-$③$\times l$

$\Longleftrightarrow$ 对增广矩阵作 $r_2 \times k$ 再作 $r_2 - l r_3$

对增广矩阵作初等行变换，对应方程组的解不变.

用初等行变换化简增广矩阵就可得方程组的解.

消元法与初等行变换

用消元法求解线性方程组

$\Longleftrightarrow$ 对它的增广矩阵作初等行变换.

1 对方程组作 ①×k $\Longleftrightarrow$ 对增广矩阵作 $r_1 \times k$

2 对方程组作 ②×k−③×l

$\Longleftrightarrow$ 对增广矩阵作 $r_2 \times k$ 再作 $r_2 - l r_3$

对增广矩阵作初等行变换，对应方程组的解不变.

用初等行变换化简增广矩阵就可得方程组的解.

一般线性方程组的解 1

例 1　用消元法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

一般线性方程组的解 1

例 1　用消元法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$$

定理　方程组无解 $\Longleftrightarrow r(A) < r(A \vdots b)$.

一般线性方程组的解 2

例 2　用消元法求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 19 \\ 2x_1 + 6x_2 + 6x_3 = 28 \\ 4x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 35 \end{cases}$$

一般线性方程组的解 2

例 2 用消元法求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=19 \\ 2x_1+6x_2+6x_3=28 \\ 4x_1+3x_2+8x_3=35 \end{cases}$$

定理 方程组有唯一解 $\Longleftrightarrow r(A)=r(A \vdots b)=n.$

一般线性方程组的解 3

例 3　用消元法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

一般线性方程组的解 3

例 3　用消元法求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

定理　方程组有无穷个解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A \vdots b) < n$

一般线性方程组的解

前面例子说明方程组 $Ax=b$ 的解有三种情形：

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & * & * & 6 \\ 0 & 2 & * & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & * & * & 6 \\ 0 & 2 & * & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & * & * & 6 \\ 0 & 2 & * & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$r(A) < r(A \,\vdots\, b)$ 无解

$r(A) = r(A \,\vdots\, b) = n$ 唯一解

$r(A) = r(A \,\vdots\, b) < n$ 无穷个解

一般线性方程组的解

定理 1　线性方程组 $Ax=b$ 的解有三种可能：

1. 无解，这等价于 $r(A) < r(A \mid b)$；
2. 唯一解，这等价于 $r(A) = r(A \mid b) = n$；
3. 无穷个解，这等价于 $r(A) = r(A \mid b) < n$.

因此方程组有解等价于 $r(A) = r(A \mid b)$.

线性方程组求解方法

用初等行变换求方程组的解的方法如下:

1. 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵.

线性方程组求解方法

用初等行变换求方程组的解的方法如下：

1. 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵.
2. 用定理 1 判断方程组是否有解，若无解则不继续.

线性方程组求解方法

用初等行变换求方程组的解的方法如下：

1. 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵.
2. 用定理 1 判断方程组是否有解，若无解则不继续.
3. 用初等行变换将阶梯形矩阵化为最简形矩阵.

线性方程组求解方法

用初等行变换求方程组的解的方法如下：

1. 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵.
2. 用定理 1 判断方程组是否有解，若无解则不继续.
3. 用初等行变换将阶梯形矩阵化为最简形矩阵.
4. 将每行首个非零元素对应的 x_i 留在左边，其他 x_i 移到方程右边，得到一般解.

线性方程组求解方法

阶梯形矩阵是指：

1. 每个非零行的首个非零元素下边都是零；
2. 若有全零行，则它们都在非零行的下边.

线性方程组求解方法

阶梯形矩阵是指：

1. 每个非零行的首个非零元素下边都是零；
2. 若有全零行，则它们都在非零行的下边.

最简形矩阵是指：

1. 该矩阵为阶梯形矩阵；
2. 每个非零行的首个非零元素为 1，且它所在列的其他元素都为零.

例 4　求解下面的线性方程组.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 3x_5 = 13 \\ 3x_1 + 6x_2 + 24x_3 + 8x_4 + 12x_5 = 40 \\ 2x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 12 \end{cases}$$

例 4　求解下面的线性方程组.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 3x_5 = 13 \\ 3x_1 + 6x_2 + 24x_3 + 8x_4 + 12x_5 = 40 \\ 2x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 12 \end{cases}$$

解答

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

例 4 求解下面的线性方程组.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 + x_5 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 + 3x_5 = 13 \\ 3x_1 + 6x_2 + 24x_3 + 8x_4 + 12x_5 = 40 \\ 2x_1 + 4x_2 + 12x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 12 \end{cases}$$

解答

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 3 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 3 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

练习 1 求解方程组.

1 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases}$$

2 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 2 \end{cases}$$

3 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -3 \end{cases}$$

例 5　求解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + ux_3 = v \end{cases}$$

例 5　求解方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+5x_3=-1 \\ 3x_1+4x_2+ux_3=v \end{cases}$$

练习 2　求解方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=5 \\ 3x_1+4x_2+ux_3=v \end{cases}$$

解答　对增广矩阵作初等行变换，得到

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & u & v \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & u-9 & v-3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & u-7 & v+3 \end{array}\right)$$

因此，当 $u = 7$，$v = -3$ 时，方程组有无穷多个解. 当 $u \neq 7$ 时，方程组有唯一解. 当 $u = 7$，$v \neq -3$ 时，方程组无解.

第一节	线性方程组的消元解法
1.1	一般线性方程组
1.2	齐次线性方程组

齐次线性方程组

若线性方程组的常数项均为零，我们称它为齐次线性方程组．即有

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组

若线性方程组的常数项均为零，我们称它为齐次线性方程组．即有

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组可以写成矩阵形式 $Ax = 0$.

齐次线性方程组

定理 2　齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解有两种可能：

1. 唯一解（只有零解），这等价于 $r(A) = n$；
2. 无穷个解（有非零解），这等价于 $r(A) < n$.

齐次线性方程组

定理 2　齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解有两种可能：

1. 唯一解（只有零解），这等价于 $r(A) = n$；
2. 无穷个解（有非零解），这等价于 $r(A) < n$.

因此如果 $m < n$，则方程组一定有无穷个解.

齐次线性方程组

例 6　求解下面的齐次线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组

练习 3　求解下面的齐次线性方程组：

1 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases};$$

2 $$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}.$$

第一节 线性方程组的消元解法

第二节 向量组及其线性表示

第三节 向量组的线性相关性

第四节 向量组的秩

第五节 线性方程组解的结构

本章内容基本脉络

$$
\begin{tikzcd}
(\S1)\ Ax=b \arrow[r, Rightarrow] & x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=\beta \arrow[r, Rightarrow] & (\S2)\ \text{线性表示} \arrow[d, Rightarrow] \\
& (\S4)\ \text{向量组的秩} \arrow[r, Rightarrow] & (\S5)\ \text{解的结构} \\
(\S1)\ Ax=0 \arrow[r, Rightarrow] & x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=0 \arrow[r, Rightarrow] & (\S3)\ \text{线性相关} \arrow[u, Rightarrow]
\end{tikzcd}
$$

第二节	向量组及其线性表示
2.1	向量及其线性运算
2.2	线性表示和线性等价

定义 1 行向量指的是只有一行的矩阵，而列向量指的是只有一列的矩阵．向量中元素的个数称为向量的维数．即 n 维行向量是如下形式的矩阵

$$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n),$$

而 n 维列向量是如下形式的矩阵

$$\beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)^{\mathrm{T}}$$

矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$，其中每个 α_i 都是行向量．这 m 个向量称为矩阵的行向量组．

矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$，其中每个 α_i 都是行向量．这 m 个向量称为矩阵的行向量组．

同样，矩阵 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)$，其中每个 β_j 都是列向量．这 n 个向量称为矩阵的列向量组．

因此向量的运算和矩阵的运算性质一样，n 维行向量和 n 维列向量可以相乘，但行向量和行向量不能相乘，列向量和列向量不能相乘.

$$(a_1, a_2, \cdots, a_n)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1b_1 + \cdots + a_nb_n$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & \cdots & b_1a_n \\ b_2a_1 & b_2a_2 & \cdots & b_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_na_1 & b_na_2 & \cdots & b_na_n \end{pmatrix}$$

第二节	向量组及其线性表示
2.1	向量及其线性运算
2.2	线性表示和线性等价

一般的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

等同于 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$，其中

$$\alpha_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} (j = 1, 2, \cdots, n), \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

一般的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

等同于 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$.

一般的线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

等同于 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$.

因此，线性方程组是否有解 $\Longleftrightarrow$ 是否存在 $k_1, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta.$$

一般的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

等同于 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = \beta$.

因此，线性方程组是否有解 $\Longleftrightarrow$ 是否存在 $k_1, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta.$$

若是，我们称 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

线性表示和线性组合

定义 2　给定向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 β，如果存在 $k_1, \cdots, k_n$ 使得 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta$，就称 β 是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的线性组合，或者称 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

线性表示

例 1　(1) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$，则 $\beta = 3\alpha$.

线性表示

例 1 (1) $\alpha=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$，则 $\beta=3\alpha.$

(2) $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$，则 $\beta=-\alpha_1+2\alpha_2.$

初等行变换与列矩阵

命题 初等行变换不改变列向量之间的线性表示关系.

初等行变换与列矩阵

命题　初等行变换不改变列向量之间的线性表示关系.

解释　如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ 都是列向量，将它们写在一起组成一个矩阵 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta)$，对矩阵作初等行变换后得到 $(\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n, \beta')$.

初等行变换与列矩阵

命题　初等行变换不改变列向量之间的线性表示关系.

解释　如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ 都是列向量，将它们写在一起组成一个矩阵 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta)$，对矩阵作初等行变换后得到 $(\alpha_1', \cdots, \alpha_n', \beta')$. 则有

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta \Leftrightarrow k_1\alpha_1' + \cdots + k_n\alpha_n' = \beta'$$

初等行变换与列矩阵

命题 初等行变换不改变列向量之间的线性表示关系.

解释 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ 都是列向量，将它们写在一起组成一个矩阵 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta)$，对矩阵作初等行变换后得到 $(\alpha'_1, \cdots, \alpha'_n, \beta')$. 则有

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta \Leftrightarrow k_1\alpha'_1 + \cdots + k_n\alpha'_n = \beta'$$

对增广矩阵		对矩阵
作初等行变换不改变	$\longleftrightarrow$	作初等行变换不改变
方程组的解		列向量间的线性关系

线性表示的判定

定理 1 列向量 β 可由列向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示当且仅当如下条件成立:

$$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta)$$

其中等式两边都表示由列向量组成的矩阵的秩.

线性表示的判定

例 2　判定向量 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是否可由向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性表示；若可以，写出表达式.

线性表示的判定

例 2　判定向量 $\beta = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 是否可由向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

线性表示；若可以，写出表达式.

解答　$\beta = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{5}{2}\alpha_2 + \frac{3}{2}\alpha_3.$

练习 1 判定向量 β 是否可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．如果可以，写出线性表示等式．

1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}.$

练习 1 判定向量 β 是否可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示．如果可以，写出线性表示等式．

1 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\2\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\-2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}3\\2\\0\\1\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}2\\3\\0\\5\end{pmatrix}.$

2 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\5\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\4\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}4\\3\\0\\11\end{pmatrix}.$

两个向量组的关系

定义　设有两个向量组 (A)：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和 (B)：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$.

1. 若向量组 (B) 的每个向量都可由向量组 (A) 线性表示，则称向量组 (B) 可由向量组 (A) 线性表示.
2. 若向量组 (B) 和向量组 (A) 可以相互线性表示，则称向量组 (B) 和 (A) 等价.

例 3　说明下面两个向量组是等价的：

(A) $$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(B) $$\beta_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

例 3　说明下面两个向量组是等价的：

$$(A)\qquad \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$(B)\qquad \beta_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

解答　$\alpha_1=\frac{1}{2}(\beta_2+\beta_3-\beta_1)$，$\alpha_2=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_3-\beta_2)$，$\alpha_3=\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2-\beta_3)$.

两个向量组的关系

设有列向量组（A）：$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 和（B）：$\beta_1, \cdots, \beta_t$.

两个向量组的关系

设有列向量组（A）：$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 和（B）：$\beta_1, \cdots, \beta_t$.

定理 2　向量组（B）可由向量组（A）线性表示当且仅当下式成立

$$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t)$$

其中等式两边都表示由列向量组成的矩阵的秩.

两个向量组的关系

设有列向量组（A）：$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 和（B）：$\beta_1, \cdots, \beta_t$.

定理 2　向量组（B）可由向量组（A）线性表示当且仅当下式成立

$$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t)$$

其中等式两边都表示由列向量组成的矩阵的秩.

推论 1　如果向量组（B）可由向量组（A）线性表示，则有 $r(\beta_1, \cdots, \beta_t) \leqslant r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$.

两个向量组的关系

设有列向量组（A）：$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 和（B）：$\beta_1, \cdots, \beta_t$.

定理 2 向量组（B）可由向量组（A）线性表示当且仅当下式成立

$$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \cdots, \beta_t)$$

其中等式两边都表示由列向量组成的矩阵的秩.

推论 1 如果向量组（B）可由向量组（A）线性表示，则有 $r(\beta_1, \cdots, \beta_t) \leqslant r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$.

推论 2 如果向量组（B）和向量组（A）等价，则有

$$r(\beta_1, \cdots, \beta_t) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_s).$$

第一节	线性方程组的消元解法
第二节	向量组及其线性表示
第三节	向量组的线性相关性
第四节	向量组的秩
第五节	线性方程组解的结构

第三节	向量组的线性相关性
3.1	线性相关与线性无关
3.2	线性表示与线性相关

齐次线性方程组

对于齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

齐次线性方程组

对于齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

它是否有解等价于是否有 $k_1, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0.$$

齐次线性方程组

对于齐次线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

它是否有解等价于是否有 $k_1, \cdots, k_n$, 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0.$$

齐次方程组的非零解 $\Longleftrightarrow$ $k_1, \cdots, k_n$ 不全为零.

线性相关和线性无关

定义 1　如果存在不全为零的 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0,$$

就称 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，否则称它们线性无关.

线性相关和线性无关

定义 1 如果存在不全为零的 $k_1, k_2, \cdots, k_n$，使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0,$$

就称 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关，否则称它们线性无关.

注记 齐次方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关.

线性相关和线性无关

例 1　对于单独一个向量 α，它是线性相关的当且仅当它是零向量.

线性相关和线性无关

例 1　对于单独一个向量 α，它是线性相关的当且仅当它是零向量.

例 2　对于两个向量 α_1 和 α_2，它们是线性相关的当且仅当这两个向量成比例.

线性相关和线性无关

例 1　对于单独一个向量 α，它是线性相关的当且仅当它是零向量.

例 2　对于两个向量 α_1 和 α_2，它们是线性相关的当且仅当这两个向量成比例.

例 3　含有零向量的向量组一定线性相关.

线性相关的判定

命题　初等行变换不改变列向量之间的线性相关关系.

线性相关的判定

命题　初等行变换不改变列向量之间的线性相关关系.

解释　如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都是列向量，将它们写在一起组成一个矩阵 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，对该矩阵作初等行变换后得到 $(\alpha_1', \cdots, \alpha_n')$，

线性相关的判定

命题 初等行变换不改变列向量之间的线性相关关系.

解释 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都是列向量，将它们写在一起组成一个矩阵 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，对该矩阵作初等行变换后得到 $(\alpha_1', \cdots, \alpha_n')$，则有

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \Leftrightarrow k_1\alpha_1' + \cdots + k_n\alpha_n' = 0$$

线性相关的判定

命题 初等行变换不改变列向量之间的线性相关关系.

解释 如果 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 都是列向量，将它们写在一起组成一个矩阵 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，对该矩阵作初等行变换后得到 $(\alpha_1', \cdots, \alpha_n')$，则有

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = 0 \Leftrightarrow k_1\alpha_1' + \cdots + k_n\alpha_n' = 0$$

定理 1 列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性相关当且仅当

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) < n.$$

其中不等式左边表示矩阵 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 的秩.

线性相关的判定

设 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 m 维的，则有

线性相关的判定

设 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 m 维的，则有

1. 如果 $m < n$，则它们一定线性相关.

线性相关的判定

设 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 m 维的，则有

1. 如果 $m < n$，则它们一定线性相关.
2. 如果 $m = n$，则它们线性相关当且仅当它们组成的矩阵的行列式为零.

线性相关的判定

设 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 m 维的，则有

1. 如果 $m < n$，则它们一定线性相关.
2. 如果 $m = n$，则它们线性相关当且仅当它们组成的矩阵的行列式为零.

对于 $m > n$ 的情形，或要求给出 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的情形，我们可以用初等行变换来判定.

例 4　判定下面向量组是否线性相关：

1. $\alpha_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 3, 0, -1)$, $\alpha_3 = (-1, -1, 1, 0)$
2. $\alpha_1 = (1, 2, -1, 5)$, $\alpha_2 = (2, -1, 1, 1)$, $\alpha_3 = (4, 3, -1, 11)$

例 4　判定下面向量组是否线性相关:

1. $\alpha_1 = (1, 2, 0, 1)$, $\alpha_2 = (1, 3, 0, -1)$, $\alpha_3 = (-1, -1, 1, 0)$
2. $\alpha_1 = (1, 2, -1, 5)$, $\alpha_2 = (2, -1, 1, 1)$, $\alpha_3 = (4, 3, -1, 11)$

解答　第一组线性无关，第二组线性相关.

例 4　判定下面向量组是否线性相关：

1 $\alpha_1=(1,2,0,1),\ \alpha_2=(1,3,0,-1),$
$\alpha_3=(-1,-1,1,0)$

2 $\alpha_1=(1,2,-1,5),\ \alpha_2=(2,-1,1,1),$
$\alpha_3=(4,3,-1,11)$

解答　第一组线性无关，第二组线性相关.

练习 1　判定下面的向量组是否线性相关.

$$\alpha_1=(1,0,1,2),\qquad \alpha_2=(2,0,1,6),$$

$$\alpha_3=(3,2,0,1),\qquad \alpha_4=(1,4,-4,-10).$$

例 5　设列向量组 α，β，γ 线性无关，则列向量组 $\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$ 也线性无关.

例 5　设列向量组 α，β，γ 线性无关，则列向量组 $\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$ 也线性无关.

解答　令 $\xi_1=\alpha+\beta$，$\xi_2=\beta+\gamma$，$\xi_3=\gamma+\alpha$,

例 5 设列向量组 α，β，γ 线性无关，则列向量组 $\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$ 也线性无关.

解答 令 $\xi_1=\alpha+\beta$，$\xi_2=\beta+\gamma$，$\xi_3=\gamma+\alpha$,

$$B=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=AP$$

例 5　设列向量组 α，β，γ 线性无关，则列向量组 $\alpha+\beta$，$\beta+\gamma$，$\gamma+\alpha$ 也线性无关.

解答　令 $\xi_1=\alpha+\beta$，$\xi_2=\beta+\gamma$，$\xi_3=\gamma+\alpha$，

$$B=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\alpha,\beta,\gamma)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}=AP$$

因为矩阵 P 可逆，由上一章结果有 $r(B)=r(A)$.

例 5 设列向量组 α, β, γ 线性无关，则列向量组 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 也线性无关.

解答 令 $\xi_1 = \alpha+\beta$，$\xi_2 = \beta+\gamma$，$\xi_3 = \gamma+\alpha$,

$$B = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\alpha, \beta, \gamma)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = AP$$

因为矩阵 P 可逆，由上一章结果有 $r(B) = r(A)$.

因此 α, β, γ 线性无关 $\Longleftrightarrow r(A) = 3$

$\Longleftrightarrow r(B) = 3 \Longleftrightarrow \xi_1, \xi_2, \xi_3$ 线性无关.

第三节	向量组的线性相关性
3.1	线性相关与线性无关
3.2	线性表示与线性相关

线性表示与线性相关

定理 2　$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关当且仅当其中一个向量可由其他向量线性表示.

线性表示与线性相关

定理 2 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关当且仅当其中一个向量可由其他向量线性表示.

定理 3 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，则 β 一定可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，而且表示法唯一.

线性表示与线性相关

定理 2　$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关当且仅当其中一个向量可由其他向量线性表示.

定理 3　设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta$ 线性相关，则 β 一定可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性表示，而且表示法唯一.

定理 4　$\beta_1,\cdots,\beta_t$ 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 线性表示，且 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 线性无关，则 $t\leqslant s$.

线性表示与线性相关

定理 2 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性相关当且仅当其中一个向量可由其他向量线性表示.

定理 3 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性无关而 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性相关，则 β 一定可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示，而且表示法唯一.

定理 4 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 线性表示，且 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 线性无关，则 $t \leqslant s$.

推论 1 设两个向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$ 和 $\beta_1, \cdots, \beta_t$ 等价且都是线性无关的，则 $s = t$.

第四节	向量组的秩
4.1	极大无关组
4.2	向量组的秩
4.3	秩的一些性质

定义 1 从向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 中选取部分组 $\alpha_{j_1}, \cdots,$ α_{j_r}，若满足下面条件：

定义 1　从向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 中选取部分组 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$，若满足下面条件：

1. $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 是线性无关的；

定义 1 从向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 中选取部分组 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$，若满足下面条件：

1. $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 是线性无关的；
2. $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r},\alpha_t$ 都是线性相关的，只要 α_t 不在该部分组中.

定义 1 从向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 中选取部分组 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$，若满足下面条件：

1. $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 是线性无关的；
2. $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}, \alpha_t$ 都是线性相关的，只要 α_t 不在该部分组中.

则称 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的极大无关组.

定义 1　从向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 中选取部分组 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$，若满足下面条件：

1. $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 是线性无关的；
2. $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}, \alpha_t$ 都是线性相关的，只要 α_t 不在该部分组中.

则称 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的极大无关组.

注记 1　向量组的极大无关组不是唯一的.

定义 1 从向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 中选取部分组 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$，若满足下面条件：

1. $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 是线性无关的；
2. $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}, \alpha_t$ 都是线性相关的，只要 α_t 不在该部分组中.

则称 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的极大无关组.

注记 1 向量组的极大无关组不是唯一的.

注记 2 线性无关向量组本身就是极大无关组.

定义 1 从向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 中选取部分组 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$，若满足下面条件：

1. $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 是线性无关的；
2. $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}, \alpha_t$ 都是线性相关的，只要 α_t 不在该部分组中.

则称 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的极大无关组.

注记 1 向量组的极大无关组不是唯一的.

注记 2 线性无关向量组本身就是极大无关组.

例 1 求向量组 $\alpha_1 = (0,1)$，$\alpha_2 = (0,2)$，$\alpha_3 = (1,1)$，$\alpha_4 = (1,0)$ 的极大无关组.

极大无关组的判别

定理 1 如果 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的线性无关部分组，它是极大无关组的充分必要条件是：$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的每个向量都可由 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 线性表示.

极大无关组的判别

定理 1 如果 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 是 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的线性无关部分组，它是极大无关组的充分必要条件是：$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的每个向量都可由 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 线性表示.

推论 1 向量组的极大无关组与该向量组等价.

极大无关组的判别

定理 1　如果 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 是 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的线性无关部分组，它是极大无关组的充分必要条件是：$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 的每个向量都可由 $\alpha_{j_1}, \cdots, \alpha_{j_r}$ 线性表示.

推论 1　向量组的极大无关组与该向量组等价.

推论 2　向量组的任意两个极大无关组是等价的，从而任意两个极大无关组中所含向量的个数相等.

第四节	向量组的秩
4.1	极大无关组
4.2	向量组的秩
4.3	秩的一些性质

向量组的秩

定义 2　向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的秩，记为 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=r$.

向量组的秩

定义 2　向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的秩，记为 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=r$.

定义 3　矩阵的行向量组的秩称为它的行秩，矩阵的列向量组的秩称为它的列秩.

向量组的秩

定义 2　向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的秩，记为 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=r$.

定义 3　矩阵的行向量组的秩称为它的行秩，矩阵的列向量组的秩称为它的列秩.

定理 2　矩阵的秩 $=$ 矩阵的列秩 $=$ 矩阵的行秩.

向量组的秩

例 2　设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$，则它的秩 $r(A) = 2$.

向量组的秩

例 2　设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$，则它的秩 $r(A) = 2$.

它的行向量组为 $\alpha_1 = (1, 2, 3)$, $\alpha_2 = (4, 5, 6)$, $\alpha_3 = (7, 8, 9)$, $\alpha_4 = (10, 11, 12)$. 行向量组的秩同样等于 2.

向量组的秩

例 2　设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$，则它的秩 $r(A) = 2$.

它的行向量组为 $\alpha_1 = (1,2,3)$, $\alpha_2 = (4,5,6)$, $\alpha_3 = (7,8,9)$, $\alpha_4 = (10,11,12)$. 行向量组的秩同样等于 2.

它的列向量组为 $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$, $\beta_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \\ 12 \end{pmatrix}$，列向量组的秩同样等于 2.

求极大无关组

例 3　求向量组 $\alpha_1 = (2,4,2)$，$\alpha_2 = (1,1,0)$，$\alpha_3 = (2,3,1)$，$\alpha_4 = (0,-2,-2)$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其他向量.

求极大无关组

例 3　求向量组 $\alpha_1=(2,4,2)$，$\alpha_2=(1,1,0)$，$\alpha_3=(2,3,1)$，$\alpha_4=(0,-2,-2)$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其他向量.

解答　$\alpha_3=\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2, \alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2.$

求极大无关组

例 3 求向量组 $\alpha_1=(2,4,2)$，$\alpha_2=(1,1,0)$，$\alpha_3=(2,3,1)$，$\alpha_4=(0,-2,-2)$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其他向量.

解答 $\alpha_3=\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2.$

练习 1 求向量组的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其他向量.

$\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,-1,1)$，

$\alpha_3=(-1,-1,1)$，$\alpha_4=(1,2,3)$，$\alpha_5=(1,0,2)$.

求极大无关组

例 3　求向量组 $\alpha_1 = (2,4,2)$，$\alpha_2 = (1,1,0)$，$\alpha_3 = (2,3,1)$，$\alpha_4 = (0,-2,-2)$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其他向量.

解答　$\alpha_3 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_4 = -\alpha_1 + 2\alpha_2.$

练习 1　求向量组的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其他向量.

$\alpha_1 = (1,2,1,0)$，$\alpha_2 = (0,1,1,2)$，

$\alpha_3 = (1,1,0,-2)$，$\alpha_4 = (2,4,3,3)$.

求极大无关组

例 3 求向量组 $\alpha_1=(2,4,2)$，$\alpha_2=(1,1,0)$，$\alpha_3=(2,3,1)$，$\alpha_4=(0,-2,-2)$ 的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其他向量.

解答 $\alpha_3=\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2, \alpha_4=-\alpha_1+2\alpha_2.$

练习 1 求向量组的一个极大无关组，并用该极大无关组表示其他向量.

（1） $\alpha_1=(1,1,1)$，$\alpha_2=(1,-1,1)$，

$\alpha_3=(-1,-1,1)$，$\alpha_4=(1,2,3)$，$\alpha_5=(1,0,2)$.

（2） $\alpha_1=(1,2,1,0)$，$\alpha_2=(0,1,1,2)$，

$\alpha_3=(1,1,0,-2)$，$\alpha_4=(2,4,3,3)$.

第四节	向量组的秩
4.1	极大无关组
4.2	向量组的秩
4.3	秩的一些性质

秩的一些性质

定理 3　设有向量组（A）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和（B）$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$.

秩的一些性质

定理 3 设有向量组（A）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和（B）$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$.

1. 若向量组（A）可用向量组（B）线性表示，则有
$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leqslant r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

秩的一些性质

定理 3 设有向量组（A）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和（B）$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$.

1. 若向量组（A）可用向量组（B）线性表示，则有
$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leqslant r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$
2. 若向量组（A）和向量组（B）等价，则有
$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

秩的一些性质

定理 3 设有向量组（A）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和（B）$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$.

1. 若向量组（A）可用向量组（B）线性表示，则有
$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leqslant r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$
2. 若向量组（A）和向量组（B）等价，则有
$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

定理 4 对于矩阵的秩，我们有如下结果：

1. $r(AB) \leqslant \min(r(A), r(B))$.

秩的一些性质

定理 3　设有向量组（A）$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 和（B）$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t$.

1. 若向量组（A）可用向量组（B）线性表示，则有
$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) \leqslant r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$
2. 若向量组（A）和向量组（B）等价，则有
$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s) = r(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t).$$

定理 4　对于矩阵的秩，我们有如下结果：

1. $r(AB) \leqslant \min(r(A), r(B))$.
2. $r(A+B) \leqslant r(A) + r(B)$.

第一节 线性方程组的消元解法

第二节 向量组及其线性表示

第三节 向量组的线性相关性

第四节 向量组的秩

第五节 线性方程组解的结构

第五节	线性方程组解的结构
5.1	齐次线性方程组
5.2	非齐次线性方程组

齐次线性方程组

先看齐次线性方程组的情形：$Ax = 0$.

定理 1 (1) 如果 ξ 是齐次方程组的解，则 $c\xi$ 也是它的解.

齐次线性方程组

先看齐次线性方程组的情形：$Ax = 0$.

定理 1　(1) 如果 ξ 是齐次方程组的解，则 $c\xi$ 也是它的解.

(2) 如果 ξ_1 和 ξ_2 都是齐次方程组的解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是它的解.

齐次线性方程组

先看齐次线性方程组的情形：$Ax = 0$.

定理 1　(1) 如果 ξ 是齐次方程组的解，则 $c\xi$ 也是它的解.

(2) 如果 ξ_1 和 ξ_2 都是齐次方程组的解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是它的解.

(3) 如果 ξ_1 和 ξ_2 都是齐次方程组的解，则 $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ 也是它的解.

齐次线性方程组

先看齐次线性方程组的情形：$Ax = 0$.

定理 1　(1) 如果 ξ 是齐次方程组的解，则 $c\xi$ 也是它的解.

(2) 如果 ξ_1 和 ξ_2 都是齐次方程组的解，则 $\xi_1 + \xi_2$ 也是它的解.

(3) 如果 ξ_1 和 ξ_2 都是齐次方程组的解，则 $c_1\xi_1 + c_2\xi_2$ 也是它的解.

定义 1　齐次方程组解向量组的一个极大无关组 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_s$ 称为方程组的一个基础解系.

例 1　用基础解系表示齐次方程组的全部解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

例 1 用基础解系表示齐次方程组的全部解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$

练习 1 用基础解系表示齐次方程组的全部解.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 13x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 + 10x_3 + 14x_4 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 15x_4 = 0 \\ 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 + 16x_4 = 0 \end{cases}$$

基础解系的性质

注记 1 基础解系不是唯一的，但是同一个齐次方程组的不同基础解系包含的向量个数相等.

基础解系的性质

注记 1　基础解系不是唯一的，但是同一个齐次方程组的不同基础解系包含的向量个数相等.

定理 2　如果齐次方程组 $Ax = 0$ 的系数矩阵的秩为 $r(A) = r < n$，则每个基础解系恰含有 $n - r$ 个解.

例 2　假设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次方程组的一个基础解系，下面各向量组是否也是方程组的一个基础解系：

1. $\xi_1, \xi_2+\xi_3$;
2. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1+\xi_2+\xi_3$;
3. $\xi_1-\xi_2, \xi_2-\xi_3, \xi_3-\xi_1$;
4. $\xi_1+\xi_2, \xi_2+\xi_3, \xi_3+\xi_1$.

例 2　假设 ξ_1, ξ_2, ξ_3 是齐次方程组的一个基础解系，下面各向量组是否也是方程组的一个基础解系：

1. $\xi_1, \xi_2+\xi_3$;
2. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_1+\xi_2+\xi_3$;
3. $\xi_1-\xi_2, \xi_2-\xi_3, \xi_3-\xi_1$;
4. $\xi_1+\xi_2, \xi_2+\xi_3, \xi_3+\xi_1$.

注记　基础解系虽然不唯一，但因为它是极大无关组，所以有这些性质：（1）向量个数固定；（2）向量线性无关；（3）不同的基础解系相互等价.

第五节	线性方程组解的结构
5.1	齐次线性方程组
5.2	非齐次线性方程组

非齐次线性方程组

现在来看非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解的结构：

定理 3　(1) 如果 η 是非齐次线性方程组的一个解，ξ 是对应的齐次线性方程组的一个解，则 $\eta + \xi$ 也是非齐次线性方程组的一个解.

非齐次线性方程组

现在来看非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解的结构：

定理 3 (1) 如果 η 是非齐次线性方程组的一个解，ξ 是对应的齐次线性方程组的一个解，则 $\eta + \xi$ 也是非齐次线性方程组的一个解.

(2) 如果 η_1 和 η_2 都是非齐次线性方程组的解，则 $\eta_1 - \eta_2$ 是对应的齐次线性方程组的解.

定理 4　设非齐次线性方程组其中一个解为 η，它对应的齐次线性方程组的全部解为

$$c_1\xi_1+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r},$$

则非齐次线性方程组的全部解为

$$\eta+c_1\xi_1+\cdots+c_{n-r}\xi_{n-r}.$$

定理 4 设非齐次线性方程组其中一个解为 η，它对应的齐次线性方程组的全部解为

$$c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r},$$

则非齐次线性方程组的全部解为

$$\eta + c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}.$$

定义 2 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 称为非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的导出组.

例 3　用基础解系表示方程组的全部解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

例 3 用基础解系表示方程组的全部解.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 3x_1 - x_2 + 8x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 7x_4 = 7 \end{cases}$$

练习 2 用基础解系表示方程组的全部解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$