线性代数课程

第四章 · 矩阵的特征值

2019 年 5 月 1 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节 特征值与特征向量

第二节 相似矩阵与矩阵对角化

第三节 实对称阵的正交对角化

第一节	特征值与特征向量
1.1	特征值
1.2	基本性质

特征值的定义

定义 1　设 A 为 n 阶矩阵，如果存在数 λ 和 n 维非零列向量 α，使得

$$A\alpha = \lambda\alpha,$$

则称 λ 为 A 的一个特征值，称 α 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

问题　如何求矩阵的特征值及它们对应的特征向量？

问题　如何求矩阵的特征值及它们对应的特征向量？

1. λ 为 A 的特征值当且仅当 λ 满足 $|\lambda I - A| = 0$；
2. α 为 λ 对应的特征向量当且仅当 α 是齐次线性方程组 $(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解.

问题　如何求矩阵的特征值及它们对应的特征向量？

1. λ 为 A 的特征值当且仅当 λ 满足 $|\lambda I - A| = 0$；
2. α 为 λ 对应的特征向量当且仅当 α 是齐次线性方程组 $(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解.

定义 2　$\lambda I - A$ 称为特征矩阵，$|\lambda I - A|$ 称为特征多项式，$|\lambda I - A| = 0$ 称为特征方程.

例 1　求下列矩阵的特征值和特征向量：

$$(1)\ A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix},\qquad (2)\ B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

例 1 求下列矩阵的特征值和特征向量：

(1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$，(2) $B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

练习 1 求下列矩阵的特征值和特征向量：

(1) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$；

例 1　求下列矩阵的特征值和特征向量：

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (2)\ B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

练习 1　求下列矩阵的特征值和特征向量：

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad (2)\ B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

特征值和特征向量

例 2　求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值和特征向量.

第一节	特征值与特征向量
1.1	特征值
1.2	基本性质

例 3　设 A 有特征值 λ，则有

1. A^2 有特征值 λ^2；

例 3　设 A 有特征值 λ，则有

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$.

例 3　设 A 有特征值 λ，则有

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2+cA+dI$ 有特征值 $b\lambda^2+c\lambda+d$.
2. 若 A 可逆，则 A^* 有特征值 $\dfrac{|A|}{\lambda}$.

例 3 设 A 有特征值 λ，则有

1. A^2 有特征值 λ^2；一般地，$bA^2 + cA + dI$ 有特征值 $b\lambda^2 + c\lambda + d$.

2. 若 A 可逆，则 A^* 有特征值 $\dfrac{|A|}{\lambda}$.

例 4 $|A| = 0$ 当且仅当 A 有一个特征值为零.

定理 1　A 和 A^{T} 有相同的特征值.

定理 1　A 和 A^{T} 有相同的特征值.

定理 2　A 的互不相同的特征值对应的特征向量线性无关.

定理 4　设 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|.$$

定理 4　设 n 阶矩阵 A 有 n 个特征值，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|.$$

例 5　设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & x & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$，求 x 的值和 A 的另一个特征值.

第一节 特征值与特征向量

第二节 相似矩阵与矩阵对角化

第三节 实对称阵的正交对角化

第二节	相似矩阵与矩阵对角化
2.1	相似矩阵
2.2	相似对角化

对于 n 阶矩阵 A，设它有 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots,$ λ_n，它们各自对应一个特征向量为 α_1, α_2，$\cdots, \alpha_n$，则有：

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1,\ A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2,\ \cdots,\ A\alpha_n = \lambda_n\alpha_n$$

对于 n 阶矩阵 A，设它有 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，它们各自对应一个特征向量为 α_1, α_2，$\cdots, \alpha_n$，则有：

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1,\ A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2,\ \cdots,\ A\alpha_n = \lambda_n\alpha_n$$

合并起来有

$$A(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n)$$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

如果令

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}, \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

则有 $AP = P\Lambda$. 如果这 n 个特征向量线性无关，则矩阵 P 可逆，而且有 $P^{-1}AP = \Lambda$.

相似矩阵的定义

定义 1　对矩阵 A 和 B，若有可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 和 B 相似，记为 $A \sim B$.

相似矩阵的定义

定义 1 对矩阵 A 和 B，若有可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 和 B 相似，记为 $A \sim B$.

命题 1 (1) $A \sim A$；(2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$；
(3) $A \sim B$ 且 $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

相似矩阵的定义

定义 1　对矩阵 A 和 B，若有可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 和 B 相似，记为 $A \sim B$.

命题 1　(1) $A \sim A$；(2) $A \sim B \Rightarrow B \sim A$；(3) $A \sim B$ 且 $B \sim C \Rightarrow A \sim C$.

定理 1　相似的矩阵有相同的秩、行列式、特征值和可逆性.

第二节	相似矩阵与矩阵对角化
2.1	相似矩阵
2.2	相似对角化

矩阵的相似对角化

定义　若 A 与对角阵相似，则称 A 可以相似对角化.

矩阵的相似对角化

定义　若 A 与对角阵相似，则称 A 可以相似对角化.

定理　设 A 为 n 阶矩阵，则下列各个结论互相等价：

1. 矩阵 A 可以相似对角化

矩阵的相似对角化

定义 若 A 与对角阵相似，则称 A 可以相似对角化.

定理 设 A 为 n 阶矩阵，则下列各个结论互相等价：

1. 矩阵 A 可以相似对角化
2. 矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量

矩阵的相似对角化

定义 若 A 与对角阵相似，则称 A 可以相似对角化.

定理 设 A 为 n 阶矩阵，则下列各个结论互相等价：

1. 矩阵 A 可以相似对角化
2. 矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量
3. 每个 n_i 重特征值可求出 n_i 个线性无关特征向量

矩阵的相似对角化

定义　若 A 与对角阵相似，则称 A 可以相似对角化.

定理　设 A 为 n 阶矩阵，则下列各个结论互相等价：

1. 矩阵 A 可以相似对角化
2. 矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量
3. 每个 n_i 重特征值可求出 n_i 个线性无关特征向量
4. 每个 n_i 重特征值 λ_i 满足 $r(\lambda_i I - A) = n - n_i$

矩阵的相似对角化

定义 若 A 与对角阵相似，则称 A 可以**相似对角化**.

定理 设 A 为 n 阶矩阵，则下列各个结论互相等价：

1. 矩阵 A 可以相似对角化
2. 矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量
3. 每个 n_i 重特征值可求出 n_i 个线性无关特征向量
4. 每个 n_i 重特征值 λ_i 满足 $r(\lambda_i I - A) = n - n_i$

推论 若矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值，则 A 可以相似对角化.

例 1　判定 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{pmatrix}$ 是否能与对角阵相似．如果能，求出 P, 然后计算 A^{100}.

例 1 判定 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能与对角阵相似．如果能，求出 P, 然后计算 A^{100}.

练习 1 判定 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 是否能与对角阵相似．如果能，求出 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

例 1 判定 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 是否能与对角阵相似．如果能，求出 P, 然后计算 A^{100}.

练习 1 判定 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ 是否能与对角阵相似．如果能，求出 P, 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

例 2 矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 不能相似对角化.

第一节 特征值与特征向量

第二节 相似矩阵与矩阵对角化

第三节 实对称阵的正交对角化

本节基本结论

结论 1　实对称阵都可以相似对角化：即对于任何实对称阵 A，总存在一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角阵.

本节基本结论

结论 1　实对称阵都可以相似对角化：即对于任何实对称阵 A，总存在一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.

结论 2　实对称阵都可以正交对角化：即对于任何实对称阵 A，总存在一个正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ 为对角阵.

第三节	实对称阵的正交对角化
3.1	正交矩阵与正交向量组
3.2	向量组的正交化
3.3	对称阵的正交对角化

定义 1　设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^{\mathrm{T}}Q = I$，则称 Q 为正交矩阵.

定义 1 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^{\mathrm{T}}Q = I$，则称 Q 为**正交矩阵**.

例 1 下列矩阵都是正交矩阵：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

定义 1 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^{\mathrm{T}}Q = I$，则称 Q 为**正交矩阵**.

例 1 下列矩阵都是正交矩阵：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

命题 1 正交矩阵具有如下性质：

1. 正交矩阵 Q 一定可逆，其逆矩阵就是 Q^{T}.

定义 1 设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^{\mathrm{T}}Q = I$，则称 Q 为**正交矩阵**.

例 1 下列矩阵都是正交矩阵：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

命题 1 正交矩阵具有如下性质：

1. 正交矩阵 Q 一定可逆，其逆矩阵就是 Q^{T}.
2. 正交矩阵 Q 的行列式的值必为 1 或者 -1.

定义 1　设 n 阶矩阵 Q 满足 $Q^{\mathrm{T}}Q = I$，则称 Q 为正交矩阵.

例 1　下列矩阵都是正交矩阵：

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

命题 1　正交矩阵具有如下性质：

1. 正交矩阵 Q 一定可逆，其逆矩阵就是 Q^{T}.
2. 正交矩阵 Q 的行列式的值必为 1 或者 -1.
3. 两个正交矩阵的乘积还是正交矩阵.

正交矩阵与正交向量组

定义 2　若列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 满足下列条件

$$\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j = \begin{cases} 1, & 若\ i=j \\ 0, & 若\ i\neq j \end{cases} \quad (1 \leqslant i,j \leqslant n),$$

则称它为单位正交向量组.

正交矩阵与正交向量组

定义 2　若列向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 满足下列条件

$$\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j = \begin{cases} 1, & 若\ i = j \\ 0, & 若\ i \neq j \end{cases} \quad (1 \leqslant i, j \leqslant n),$$

则称它为单位正交向量组.

定理 1　Q 为正交矩阵当且仅当其列向量组是单位正交向量组.

第三节	实对称阵的正交对角化
3.1	正交矩阵与正交向量组
3.2	向量组的正交化
3.3	对称阵的正交对角化

对于两个 n 维列向量

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

定义它们的内积如下

$$\alpha^{\mathrm{T}}\beta = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \beta^{\mathrm{T}}\alpha,$$

例 2　设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$，求它们的内积.

定义 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的长度定义为

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2},$$

定义 向量 $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ 的长度定义为

$$\|\alpha\| = \sqrt{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2},$$

长度为 1 的向量称为单位向量. 对于任何非零向量 α, 我们可以把它变为单位向量 $\beta = \dfrac{\alpha}{\|\alpha\|}$.

定义 3　如果两个向量的内积等于零，即 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta = 0$，则称这两个向量**正交**（垂直）.

定义 3　如果两个向量的内积等于零，即 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta = 0$，则称这两个向量正交（垂直）.

定义 4　如果非零向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 两两正交，即 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j = 0$（$i \neq j$），则称该向量组为正交向量组.

定义 3 如果两个向量的内积等于零，即 $\alpha^{\mathrm{T}}\beta = 0$，则称这两个向量正交（垂直）.

定义 4 如果非零向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 两两正交，即 $\alpha_i^{\mathrm{T}}\alpha_j = 0$（$i \neq j$），则称该向量组为正交向量组.

定理 2 正交向量组一定线性无关.

对于线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，我们可以通过施密特正交化方法将它变成正交向量组：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 - \frac{\alpha_3^T \beta_2}{\beta_2^T \beta_2} \beta_2$$

$$\cdots$$

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{\alpha_n^T \beta_1}{\beta_1^T \beta_1} \beta_1 - \frac{\alpha_n^T \beta_2}{\beta_2^T \beta_2} \beta_2 \cdots - \frac{\alpha_n^T \beta_{n-1}}{\beta_{n-1}^T \beta_{n-1}} \beta_{n-1}$$

施密特正交化

例 4　将向量组化为正交向量组.

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

施密特正交化

例 4　将向量组化为正交向量组.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\3\\-1\\-1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-2\\0\\6\\8\end{pmatrix}.$$

练习 2　将向量组化为正交向量组.

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\1\end{pmatrix},\ \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\1\end{pmatrix}.$$

第三节	实对称阵的正交对角化
3.1	正交矩阵与正交向量组
3.2	向量组的正交化
3.3	对称阵的正交对角化

定理 3 实对称阵 A 的对应于不同特征值的特征向量是正交的.

定理 3　实对称阵 A 的对应于不同特征值的特征向量是正交的.

例 5　将对称阵正交对角化.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

定理 3 实对称阵 A 的对应于不同特征值的特征向量是正交的.

例 5 将对称阵正交对角化.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

练习 3 将对称阵正交对角化.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

定理 3　实对称阵 A 的对应于不同特征值的特征向量是正交的.

例 5　将对称阵正交对角化.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 2 & -2\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$$

练习 3　将对称阵正交对角化.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$