线性代数课程

第五章 · 二次型

2019 年 5 月 1 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

第一节	二次型与对称阵
第二节	二次型的标准形
第三节	二次型的规范形
第四节	二次型的有定性

第一节	二次型与对称阵
1.1	二次型及其矩阵
1.2	线性变换及合同矩阵

二元二次型

只含有二次项的 n 元多项式称为 n 元二次型.

二元二次型

只含有二次项的 n 元多项式称为 n 元二次型.

先看二元二次型 $f = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$.

二元二次型

只含有二次项的 n 元多项式称为 n 元二次型.

先看二元二次型 $f = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$. 易知

$$f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

二元二次型

只含有二次项的 n 元多项式称为 n 元二次型.

先看二元二次型 $f = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$. 易知

$$f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

即二元二次型和二阶对称阵一一对应.

三元二次型

三元二次型 $$f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

三元二次型

$$\text{三元二次型 } f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2$$

可以验证

$$f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

三元二次型

三元二次型 $f = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3$
$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3$$
$$+ a_{33}x_3^2$$

可以验证

$$f = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

即三元二次型和三阶对称阵一一对应.

二次型的定义

定义 只含有二次项的 n 元多项式

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\cdots,x_n) &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\
&\quad + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\
&\quad + \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\
&\quad + a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

称为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的一个 n 元二次型.

二次型与对称阵

定理 n 元二次型与 n 阶对称矩阵一一对应.

二次型与对称阵

定理　n 元二次型与 n 阶对称矩阵一一对应.

$$x^{\mathrm{T}}Ax=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{22}x_2^2 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n \\ &\quad + \cdots + a_{nn}x_n^2, \end{aligned}$$

$$=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

二次型与对称阵

定理 n 元二次型与 n 阶对称矩阵一一对应：

$$f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax, \quad A^{\mathrm{T}} = A.$$

二次型与对称阵

定理　n 元二次型与 n 阶对称矩阵一一对应：

$$f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax, \quad A^{\mathrm{T}} = A.$$

- 对称矩阵 A 称为二次型 $f(x)$ 的矩阵，
- 对称矩阵 A 的秩称为二次型 $f(x)$ 的秩.

例 1　从二次型写出对称阵, 从对称阵写出二次型.

(1) 写出二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 对应的对称阵，其中

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 2x_2^2 + 8x_2x_3 + 3x_3^2$$

例 1　从二次型写出对称阵，从对称阵写出二次型.

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的对称阵，其中

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-2x_1x_2+3x_1x_3-2x_2^2+8x_2x_3+3x_3^2$$

(2) 写出对称阵 A 对应的二次型，其中

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1/2 \\ -3 & -2 & 1/3 & -3/2 \\ 1 & 1/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

练习 1　从二次型写出对称阵, 从对称阵写出二次型.

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的对称阵，其中

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_1x_2+4x_2x_3-5x_3^2$$

练习 1　从二次型写出对称阵, 从对称阵写出二次型.

(1) 写出二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 对应的对称阵，其中

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-3x_1x_2+4x_2x_3-5x_3^2$$

(2) 写出对称阵 A 对应的二次型，其中

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

第一节	二次型与对称阵
1.1	二次型及其矩阵
1.2	线性变换及合同矩阵

例 2　$f = y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2$

例 2 $f = y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2 = (y_1 + 2y_2)^2 - 3y_2^2$

例 2　$f = y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2 = (y_1 + 2y_2)^2 - 3y_2^2$，令

$$x_1 = y_1 + 2y_2,\quad x_2 = y_2,$$

例 2　$f = y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2 = (y_1 + 2y_2)^2 - 3y_2^2$，令

$$x_1 = y_1 + 2y_2, \quad x_2 = y_2,$$

则有 $f = x_1^2 - 3x_2^2$.

例 2 $f = y_1^2 + 4y_1y_2 + y_2^2 = (y_1 + 2y_2)^2 - 3y_2^2$，令

$$x_1 = y_1 + 2y_2, \quad x_2 = y_2,$$

则有 $f = x_1^2 - 3x_2^2$.

定义 关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称为由变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的一个线性变换.

线性变换 $\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$

称矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ 为线性变换的矩阵，当 $|C| \neq 0$ 时，称线性变换为非退化的或可逆的.

线性变换

将两组 n 元变量写成列向量形式

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则线性变换可以写成 $x = Cy$.

线性变换

将两组 n 元变量写成列向量形式

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则线性变换可以写成 $x = Cy$.

当 $|C| \neq 0$ 时，线性变换为非退化的，此时有

$$y = C^{-1}x.$$

对 n 元二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 作线性变换 $x = Cy$，则有

$$f = x^{\mathrm{T}}Ax = (Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy) = y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACy = y^{\mathrm{T}}By,$$

其中 $B = C^{\mathrm{T}}AC$，$B^{\mathrm{T}} = B$．即 $y^{\mathrm{T}}By$ 是以 B 为矩阵的 y 的 n 元二次型.

对 n 元二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 作线性变换 $x = Cy$，则有

$$f = x^{\mathrm{T}}Ax = (Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy) = y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACy = y^{\mathrm{T}}By,$$

其中 $B = C^{\mathrm{T}}AC$，$B^{\mathrm{T}} = B$．即 $y^{\mathrm{T}}By$ 是以 B 为矩阵的 y 的 n 元二次型.

定义　若线性变换是非退化的，且 $y^{\mathrm{T}}By$ 有下面形状：

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $d_i \neq 0$（$i = 1, 2, \cdots, r$，$r \leqslant n$），则称它为二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 的一个标准形.

对 n 元二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 作线性变换 $x = Cy$，则有

$$f = x^{\mathrm{T}}Ax = (Cy)^{\mathrm{T}}A(Cy) = y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACy = y^{\mathrm{T}}By,$$

其中 $B = C^{\mathrm{T}}AC$，$B^{\mathrm{T}} = B$．即 $y^{\mathrm{T}}By$ 是以 B 为矩阵的 y 的 n 元二次型.

定义 若线性变换是非退化的，且 $y^{\mathrm{T}}By$ 有下面形状：

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ry_r^2$$

其中 $d_i \neq 0$（$i = 1, 2, \cdots, r$，$r \leqslant n$），则称它为二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 的一个标准形.

注记 若 $y^{\mathrm{T}}By$ 为标准形，而有 $r = r(A) = r(B)$.

定义　设 A,B 是两个方阵, 如果存在一个可逆矩阵 C 使得 $C^{\mathrm{T}}AC = B$，我们就称矩阵 A 和 B 相合（或者称为合同），记为 $A \simeq B$.

定义　设 A, B 是两个方阵, 如果存在一个可逆矩阵 C 使得 $C^{\mathrm{T}}AC = B$，我们就称矩阵 A 和 B **相合**（或者称为**合同**），记为 $A \simeq B$.

命题 1　相合矩阵满足如下性质：

1. $A \simeq A$；
2. $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$；
3. $A \simeq B$ 且 $B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$.

第一节　二次型与对称阵

第二节　二次型的标准形

第三节　二次型的规范形

第四节　二次型的有定性

任何二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 都可通过可逆线性变换 $x = Cy$ 化为标准形

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2.$$

即 $f = x^{\mathrm{T}}Ax = y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACy = y^{\mathrm{T}}By$, 其中 $B = C^{\mathrm{T}}AC$ 是对角阵.

任何二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 都可通过可逆线性变换 $x = Cy$ 化为标准形

$$f = d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \cdots + d_ny_n^2.$$

即 $f = x^{\mathrm{T}}Ax = y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACy = y^{\mathrm{T}}By$, 其中 $B = C^{\mathrm{T}}AC$ 是对角阵.

定理 1　任何二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形.

任何二次型 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$ 都可通过可逆线性变换 $x = Cy$ 化为标准形

$$f = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2.$$

即 $f = x^{\mathrm{T}}Ax = y^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}ACy = y^{\mathrm{T}}By$, 其中 $B = C^{\mathrm{T}}AC$ 是对角阵.

定理 1　任何二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形.

定理 2　任何一个对称阵都与一个对角阵相合. 即对任何对称阵 A, 都存在一个可逆矩阵 C, 使得 $C^{\mathrm{T}}AC = B$ 为对角阵.

第二节	二次型的标准形
2.1	配方法化为标准形
2.2	初等变换法化为标准形
2.3	正交变换法化为标准形

二次型的标准形

例 1　用配方法将下面二次型化为标准形，并求出变换矩阵 C.

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

二次型的标准形

例 1　用配方法将下面二次型化为标准形, 并求出变换矩阵 C.

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

练习 1　将二次型 $f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$ 化为标准形，并求出变换矩阵 C.

提示　先对 x_3 配方，比较容易计算.

例 2　将对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 相合对角化，并求出变换矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角矩阵.

例 2　将对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 相合对角化，并求出变换矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角矩阵.

解答　对应的二次型为 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

例 2　将对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 相合对角化，并求出变换矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角矩阵.

解答　对应的二次型为 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

令 $x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2,\ x_3 = y_3$,

例 2　将对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 相合对角化,

并求出变换矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角矩阵.

解答　对应的二次型为 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

令 $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3$，则有

例 2 将对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$ 相合对角化，并求出变换矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角矩阵.

解答 对应的二次型为 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$.

令 $x_1=y_1+y_2,\ x_2=y_1-y_2,\ x_3=y_3$，则有

$$f=2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3$$

例 2　将对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 相合对角化，并求出变换矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角矩阵.

解答　对应的二次型为 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

令 $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$，则有

$$\begin{aligned} f &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2 \end{aligned}$$

例 2　将对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 相合对角化，并求出变换矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角矩阵.

解答　对应的二次型为 $f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.

令 $x_1 = y_1 + y_2, x_2 = y_1 - y_2, x_3 = y_3$，则有

$$\begin{aligned} f &= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2 \\ &= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2 \end{aligned}$$

例 2　将对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}$ 相合对角化，并求出变换矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角矩阵.

解答　对应的二次型为 $f=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$.

令 $x_1=y_1+y_2$, $x_2=y_1-y_2$, $x_3=y_3$，则有

$$\begin{aligned} f &= 2y_1^2-2y_2^2-4y_1y_3+8y_2y_3 \\ &= 2(y_1-y_3)^2-2y_2^2+8y_2y_3-2y_3^2 \\ &= 2(y_1-y_3)^2-2(y_2-2y_3)^2+6y_3^2 \\ &= 2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2. \end{aligned}$$

其中 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$，

其中 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$.

其中 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$.

代入 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$,

其中 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$.

代入 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$，得到 $\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$.

其中 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} y_1 = z_1 + z_3 \\ y_2 = z_2 + 2z_3 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$.

代入 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$，得到 $\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 + 3z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$.

令 $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 则 $C^{\mathrm{T}}AC = B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

第二节	二次型的标准形
2.1	配方法化为标准形
2.2	初等变换法化为标准形
2.3	正交变换法化为标准形

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix}$$

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_1]{\text{行变换}P_1^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_1^{\mathrm{T}} A P_1 \\ \hdashline I P_1 \end{pmatrix}$$

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换} P_1]{\text{行变换} P_1^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_1^{\mathrm{T}} A P_1 \\ \hdashline I P_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换} P_2]{\text{行变换} P_2^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_2^{\mathrm{T}} P_1^{\mathrm{T}} A P_1 P_2 \\ \hdashline I P_1 P_2 \end{pmatrix}$$

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_1]{\text{行变换}P_1^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_1^{\mathrm{T}}AP_1 \\ \hdashline IP_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_2]{\text{行变换}P_2^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}AP_1P_2 \\ \hdashline IP_1P_2 \end{pmatrix}$$

$$\cdots \xrightarrow[\text{列变换}P_s]{\text{行变换}P_s^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_s^{\mathrm{T}}\cdots P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}AP_1P_2\cdots P_s \\ \hdashline IP_1P_2\cdots P_s \end{pmatrix}$$

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_1]{\text{行变换}P_1^T} \begin{pmatrix} P_1^T A P_1 \\ \hdashline I P_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_2]{\text{行变换}P_2^T} \begin{pmatrix} P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \\ \hdashline I P_1 P_2 \end{pmatrix}$$

$$\cdots \xrightarrow[\text{列变换}P_s]{\text{行变换}P_s^T} \begin{pmatrix} P_s^T \cdots P_2^T P_1^T A P_1 P_2 \cdots P_s \\ \hdashline I P_1 P_2 \cdots P_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ \hdashline C \end{pmatrix}$$

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_1]{\text{行变换}P_1^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_1^{\mathrm{T}}AP_1 \\ \hdashline IP_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_2]{\text{行变换}P_2^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}AP_1P_2 \\ \hdashline IP_1P_2 \end{pmatrix}$$

$$\cdots \xrightarrow[\text{列变换}P_s]{\text{行变换}P_s^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_s^{\mathrm{T}}\cdots P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}AP_1P_2\cdots P_s \\ \hdashline IP_1P_2\cdots P_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ \hdashline C \end{pmatrix}$$

从而求出对角阵 B 和变换矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC = B$.

例 5　用初等变换法将二次型化为标准形, 并求出变换矩阵 C:

$$f=x_1^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2^2+4x_2x_3+x_3^2$$

例 5　用初等变换法将二次型化为标准形，并求出变换矩阵 C：

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

例 6　将对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 相合对角化，并求出变换矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC$ 为对角矩阵.

例 5 用初等变换法将二次型化为标准形, 并求出变换矩阵 C:

$$f = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$$

例 6 将对称矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ 相合对角化, 并求出变换矩阵 C, 使得 C^TAC 为对角矩阵.

练习 2 用初等变换法将二次型化为标准形, 并求出变换矩阵 C:

$$f = x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

第二节	二次型的标准形
2.1	配方法化为标准形
2.2	初等变换法化为标准形
2.3	正交变换法化为标准形

定义　若线性变换的系数矩阵是正交矩阵，则称该线性变换为**正交变换**.

定义　若线性变换的系数矩阵是正交矩阵，则称该线性变换为正交变换.

定理 3　对于二次型 $f(x) = x^{\mathrm{T}}Ax$，必定存在一个正交矩阵 Q，使得经过正交线性变换 $x = Qy$ 后变成标准形

$$f(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是二次型 $f(x)$ 的矩阵 A 的全部特征值.

二次型的标准形

例 7　用正交变换将二次型化为标准形，并写出所作的正交变换：

$$f = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 8x_2x_3 + 5x_3^2.$$

第一节 二次型与对称阵

第二节 二次型的标准形

第三节 二次型的规范形

第四节 二次型的有定性

二次型的标准形不是唯一的，但是可以继续变换变成规范形, 规范形是唯一的.

二次型的标准形不是唯一的，但是可以继续变换变成规范形，规范形是唯一的.

将二次型变为标准形后，可以重新安排变量的顺序，使得标准形变成如下形式：

$$f = d_1 x_1^2 + \cdots + d_p x_p^2 - d_{p+1} x_{p+1}^2 - \cdots - d_r x_r^2,$$

其中 $d_i > 0$，$(i = 1, 2, \cdots, r)$.

二次型的标准形不是唯一的，但是可以继续变换变成规范形，规范形是唯一的.

将二次型变为标准形后，可以重新安排变量的顺序，使得标准形变成如下形式：

$$f = d_1x_1^2 + \cdots + d_px_p^2 - d_{p+1}x_{p+1}^2 - \cdots - d_rx_r^2,$$

其中 $d_i > 0$，$(i = 1, 2, \cdots, r)$.

再令 $y_i = \sqrt{d_i}x_i$，则上式的标准形变为

$$f = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2.$$

它称为二次型 f 的规范形.

规范形

定理 1 任何一个二次型都可以通过可逆线性变换变为规范形，并且规范形是唯一的，由二次型本身所决定，与所作的可逆线性变换无关.

规范形

定理 1 任何一个二次型都可以通过可逆线性变换变为规范形，并且规范形是唯一的，由二次型本身所决定，与所作的可逆线性变换无关.

定义 1 规范形 $y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$ 中正项的总个数 p，称为二次型的正惯性指数，而规范形中负项的总个数 $r-p$，称为二次型的负惯性指数，其中 r 是二次型的秩.

第四节	二次型的有定性
4.1	有定性与不定性的定义
4.2	有定性的标准形判别法
4.3	有定性的主子式判别法

定义 设对应于对称矩阵 A 的二次型为 $f = x^{T}Ax$

1. 如果 $f > 0$，对所有 $x \neq 0$，则称 A（二次型）是正定的；
2. 如果 $f < 0$，对所有 $x \neq 0$，则称 A（二次型）是负定的；
3. 如果 $f \geqslant 0$，对所有 x，则称 A（二次型）是半正定的；
4. 如果 $f \leqslant 0$，对所有 x，则称 A（二次型）是半负定的.

定义 设对应于对称矩阵 A 的二次型为 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$

1. 如果 $f > 0$，对所有 $x \neq 0$，则称 A（二次型）是正定的；
2. 如果 $f < 0$，对所有 $x \neq 0$，则称 A（二次型）是负定的；
3. 如果 $f \geqslant 0$，对所有 x，则称 A（二次型）是半正定的；
4. 如果 $f \leqslant 0$，对所有 x，则称 A（二次型）是半负定的.

如果上述之一成立，称对称矩阵或者二次型是有定的，否则称为不定的.

有定性

例 1　下面是一些有定的二次型：

1. $f = x_1^2 + 2x_2^2$ 是正定的；
2. $f = -x_1^2 - 2x_2^2$ 是负定的；
3. $f = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$ 是半正定的；
4. $f = -x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$ 是半负定的.

第四节	二次型的有定性
4.1	有定性与不定性的定义
4.2	有定性的标准形判别法
4.3	有定性的主子式判别法

二次型有定性的判别准则一：标准形方法

	标准形	正交标准形	规范形
	$y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}y$	$y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}y$	$y^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & O \end{pmatrix}y$
正定	$d_i > 0, \forall i$	$\lambda_i > 0, \forall i$	$p = n$
负定	$d_i < 0, \forall i$	$\lambda_i < 0, \forall i$	$q = n$
半正定	$d_i \geqslant 0, \forall i$	$\lambda_i \geqslant 0, \forall i$	$q = 0$
半负定	$d_i \leqslant 0, \forall i$	$\lambda_i \leqslant 0, \forall i$	$p = 0$

第四节	二次型的有定性
4.1	有定性与不定性的定义
4.2	有定性的标准形判别法
4.3	有定性的主子式判别法

主子式

定义　从 n 阶矩阵中选择第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列得到的行列式，称为一个 k 阶主子式；如果选择前面 k 行和 k 列得到的主子式，称为 k 阶顺序主子式，记为 A_k.

主子式

定义　从 n 阶矩阵中选择第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列得到的行列式，称为一个 k 阶主子式；如果选择前面 k 行和 k 列得到的主子式，称为 k 阶顺序主子式，记为 A_k.

例 2　写出对称矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 所有主子式和顺序主子式.

主子式

定义　从 n 阶矩阵中选择第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列得到的行列式，称为一个 k 阶主子式；如果选择前面 k 行和 k 列得到的主子式，称为 k 阶顺序主子式，记为 A_k.

例 2　写出对称矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ 所有主子式和顺序主子式.

注记 1　注意和前面学到的 k 阶子式的区别.

二次型有定性的判别准则二：主子式方法

定理

1. 对称阵为正定的 $\Longleftrightarrow$ 所有顺序主子式 $A_k > 0$；
2. 对称阵为负定的 $\Longleftrightarrow$ 所有 $(-1)^k A_k > 0$；
3. 对称阵为半正定的 $\Longleftrightarrow$ 所有主子式 $\geqslant 0$；
4. 对称阵为半负定的 $\Longleftrightarrow$ 所有主子式 $\leqslant 0$.

注记 所有顺序主子式都大于等于零不能保证对称矩阵一定是半正定的，例如 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

例 3　判定二次型 $f = 3x_1^2 + 6x_1x_3 + x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$ 是否为正定的.

例 3　判定二次型 $f=3x_1^2+6x_1x_3+x_2^2-4x_2x_3+8x_3^2$ 是否为正定的.

例 4　λ 为何值时，二次型 $f=x_1^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_3+\lambda x_3^2$ 是正定的.