线性代数课程

线 性 代 数 复 习

2019 年 5 月 1 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞(lvjr.bitbucket.io)

第一章 行列式

第二章 矩阵

第三章 线性方程组

第四章 特征值

第五章 二次型

二阶和三阶行列式

二阶行列式定义为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

二阶和三阶行列式

二阶行列式定义为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$

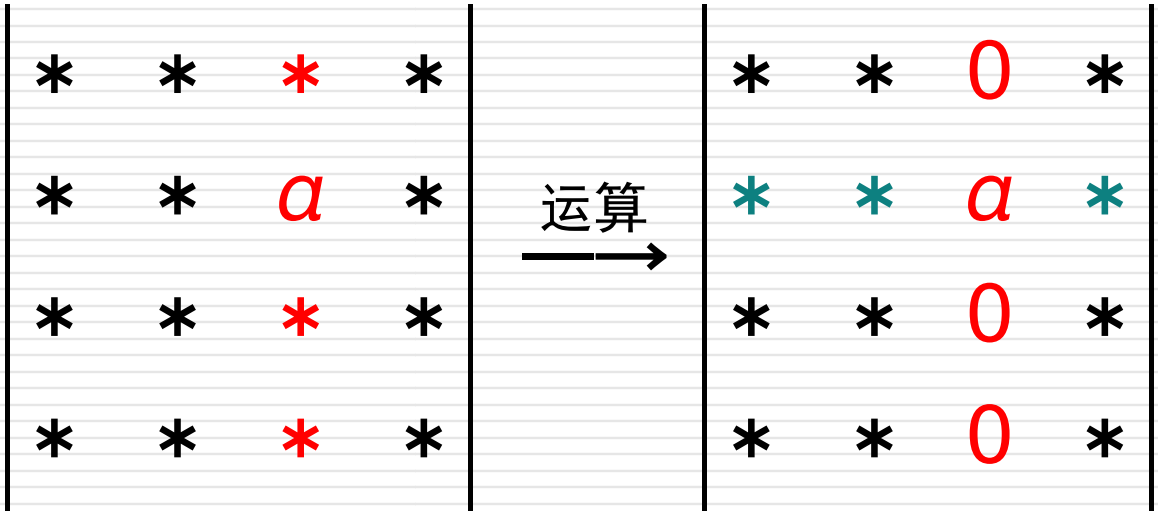
三阶行列式定义为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= \begin{aligned} &a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &-a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \end{aligned}$$

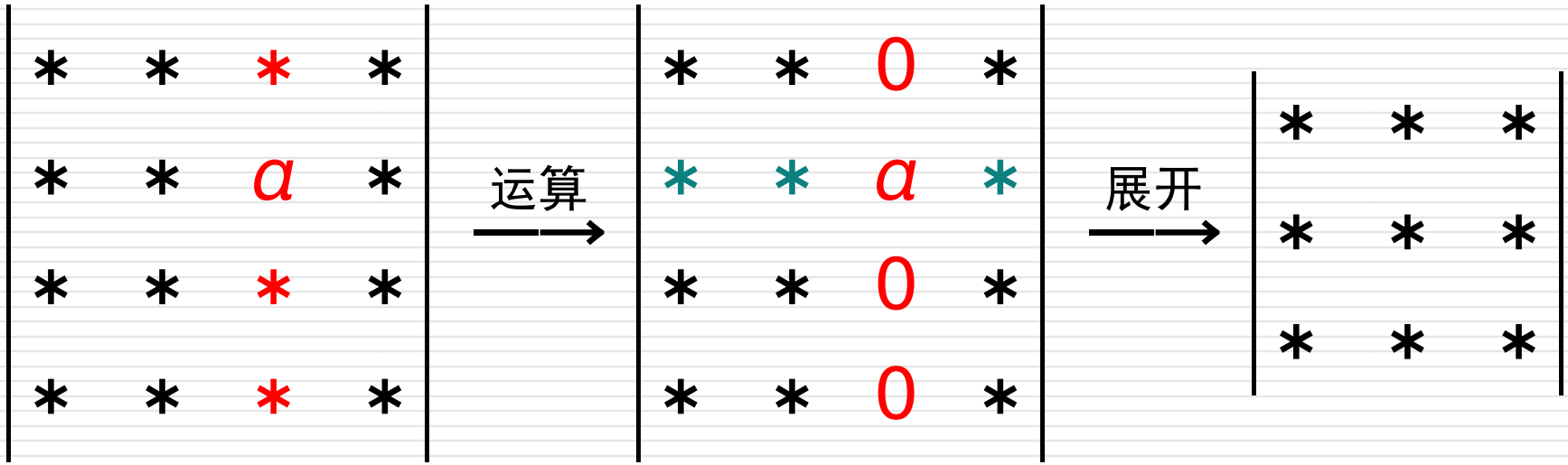
四阶行列式的计算方法

$$\begin{vmatrix} * & * & * & * \\ * & * & a & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{vmatrix}$$

四阶行列式的计算方法



四阶行列式的计算方法



四阶行列式的计算方法

四阶行列式的计算方法

四阶行列式的计算方法

n 阶行列式的计算

n 阶行列式的计算方法：使用批量变换

1. 先将它的很多元素变成零
2. 再将它变换为三角行列式或者展开为低阶行列式

例 1　设 A 为三阶矩阵，且 $|A| = 1$. 将 $|A|$ 按列分块得到 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. 设 $B = (2\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_1)$, 求 $|B|$.

例 1　设 A 为三阶矩阵，且 $|A| = 1$. 将 $|A|$ 按列分块得到 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. 设 $B = (2\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_1)$, 求 $|B|$.

解法 1

$$
\begin{aligned}
B &= \left|2\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_1\right| \\
&= 2\left|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_1\right| && (c_1 \div 2) \\
&= 2\left|\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2\right| && (c_3 + c_1) \\
&= -2\left|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\right| && (c_2 \leftrightarrow c_3) \\
&= -2 \cdot 1 = -2.
\end{aligned}
$$

解法２　$B = (2\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2 - \alpha_1)$

$$= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

解法 2　$B=(2\alpha_1,\alpha_3,\alpha_2-\alpha_1)$

$$=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

所以 $|B|=|A|\cdot\begin{vmatrix}2&0&-1\\0&0&1\\0&1&0\end{vmatrix}=1\cdot(-2)=-2.$

第一章 行列式

第二章 矩阵

第三章 线性方程组

第四章 特征值

第五章 二次型

矩阵的运算

矩阵有如下这些运算：

1. 矩阵的加减
2. 矩阵的数乘
3. 矩阵的乘法
4. 矩阵的转置
5. 矩阵的幂次
6. 矩阵的行列式

注意与行列式的运算的区别.

矩阵的运算

矩阵的乘法与实数的乘法差别很大. 比如:

- $AB = O \not\Rightarrow A = O$ 或 $B = O$.
- $AB = AC$ 且 $A \neq O \not\Rightarrow B = C$.

矩阵的运算

矩阵的乘法与实数的乘法差别很大. 比如:

- $AB = O \not\Rightarrow A = O$ 或 $B = O$.
- $AB = AC$ 且 $A \neq O \not\Rightarrow B = C$.

又如:

- $(AB)^2 \neq A^2B^2$.
- $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$.

逆矩阵

定理 方阵 A 可逆等价于 $|A| \neq 0$，且当 A 可逆时，有 $A^{-1} = \dfrac{A^*}{|A|}$，其中

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 A 的伴随矩阵，而 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

初等变换

定义 矩阵的初等变换是这三种对矩阵元素的变换：

1. 矩阵的某两行（列）交换；
2. 某一行（列）乘以非零的 k 倍；
3. 某一行（列）加上另一行（列）的 l 倍.

用初等变换求矩阵的秩

方法：通过初等变换将矩阵化为如下梯形矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \cdots & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{rr} & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

(各 a_{ii} 均不为零).

结果：矩阵的秩就等于梯形矩阵中非零行的数目.

用初等变换求等价标准形

定理 任何 $m \times n$ 矩阵 A 经过若干次初等变换后，可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

该形式的矩阵称为矩阵 A 的**等价标准形**.

用初等变换求等价标准形

定理 任何 $m \times n$ 矩阵 A 经过若干次初等变换后，可以化为如下形式的矩阵：

$$D = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,n-r} \\ O_{m-r,r} & O_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

该形式的矩阵称为矩阵 A 的**等价标准形**.

求矩阵的等价标准形的步骤如下：

- 将 a_{11} 变为 1，再将 r_1 和 c_1 的其他元素变为 0
- 将 a_{22} 变为 1，再将 r_2 和 c_2 的其他元素变为 0
- ……

用初等变换求逆矩阵

用初等变换求逆矩阵的方法如下：

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right)$$

用初等变换求逆矩阵

用初等变换求逆矩阵的方法如下：

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right)$$

用初等变换求逆矩阵的步骤如下：

$$\text{矩阵} \xrightarrow[\text{变为}]{\text{从左到右}} \text{上三角阵} \xrightarrow[\text{变为}]{\text{从右到左}} \text{对角阵} \rightarrow \text{单位阵}$$

用初等变换求逆矩阵

用初等变换求逆矩阵的方法如下：

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I \end{array}\right) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \left(\begin{array}{c|c} I & A^{-1} \end{array}\right)$$

用初等变换求逆矩阵的步骤如下：

$$\text{矩阵} \xrightarrow[\text{变为}]{\text{从左到右}} \text{上三角阵} \xrightarrow[\text{变为}]{\text{从右到左}} \text{对角阵} \rightarrow \text{单位阵}$$

如果在过程中发现矩阵的某一行或列全为零，则该矩阵不可逆.

例 1　求行列式 $\left|AA^{\mathrm{T}}\right|$ 和 $\left|B^{\mathrm{T}}B\right|$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\\3&4&5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\5&6&7\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

例 1　求行列式 $\left|AA^{\mathrm{T}}\right|$ 和 $\left|B^{\mathrm{T}}B\right|$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\\3&4&5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\5&6&7\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

解答　因为 AA^{T} 是 4 阶方阵，而 $r(AA^{\mathrm{T}})\leqslant r(A)\leqslant 3$，所以 $\left|AA^{\mathrm{T}}\right|=0$.

例 1　求行列式 $\left|AA^{\mathrm{T}}\right|$ 和 $\left|B^{\mathrm{T}}B\right|$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&1\\2&1&1\\3&4&5\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&4&5\\5&6&7\\7&8&9\end{pmatrix}.$$

解答　因为 AA^{T} 是 4 阶方阵，而 $r(AA^{\mathrm{T}})\leqslant r(A)\leqslant 3$，所以 $\left|AA^{\mathrm{T}}\right|=0$.

因为 $B^{\mathrm{T}}B$ 是 3 阶矩阵，而 $r(B^{\mathrm{T}}B)\leqslant r(B)=2$，所以 $\left|B^{\mathrm{T}}B\right|=0$.

第一章 行列式

第二章 矩阵

第三章 线性方程组

第四章 特征值

第五章 二次型

第三章	线性方程组
3.1	向量组及其秩
3.2	线性方程组的解

线性表示和线性组合

定义 1　如果存在 $k_1, \cdots, k_n$ 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta,$$

就称 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

线性表示和线性组合

定义 1　如果存在 $k_1, \cdots, k_n$ 使得

$$k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n = \beta,$$

就称 β 可由 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示.

定理 1　向量 β 可由向量组 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 线性表示当且仅当如下条件成立：

$$r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = r(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta).$$

线性相关和线性无关

定义 2　如果存在不全为零的 $k_1,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0,$$

就称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，否则称它们线性无关.

线性相关和线性无关

定义 2 如果存在不全为零的 $k_1,\cdots,k_n$，使得

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0,$$

就称 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，否则称它们线性无关.

定理 2 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关当且仅当

$$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)<n.$$

线性相关的判定

设 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 m 维的，则有

线性相关的判定

设 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 m 维的，则有

1. 如果 $m < n$，则它们一定线性相关.

线性相关的判定

设 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 m 维的，则有

1. 如果 $m < n$，则它们一定线性相关.
2. 如果 $m = n$，则它们线性相关当且仅当它们组成的矩阵的行列式为零.

线性相关的判定

设 n 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 都是 m 维的，则有

1. 如果 $m < n$，则它们一定线性相关.
2. 如果 $m = n$，则它们线性相关当且仅当它们组成的矩阵的行列式为零.

对于 $m > n$ 的情形，或要求给出 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的情形，我们可以用初等行变换来判定.

向量组的秩

定义 3　向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的秩，记为 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=r$.

向量组的秩

定义 3 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的秩，记为 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=r$.

定义 4 矩阵的行向量组的秩称为它的行秩，矩阵的列向量组的秩称为它的列秩.

向量组的秩

定义 3 向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的极大无关组 $\alpha_{j_1},\cdots,\alpha_{j_r}$ 中所含向量的个数 r 称为向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的秩，记为 $r(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=r$.

定义 4 矩阵的行向量组的秩称为它的行秩，矩阵的列向量组的秩称为它的列秩.

定理 3 矩阵的秩 = 矩阵的列秩 = 矩阵的行秩.

第三章	线性方程组
3.1	向量组及其秩
3.2	线性方程组的解

一般线性方程组的解

定理 线性方程组 $Ax = b$ 的解有三种可能：

1. 无解，这等价于 $r(A) < r(A\,|\,b)$；
2. 唯一解，这等价于 $r(A) = r(A\,|\,b) = n$；
3. 无穷个解，这等价于 $r(A) = r(A\,|\,b) < n$.

因此方程组有解等价于 $r(A) = r(A\,|\,b)$.

齐次线性方程组的解

定理 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解有两种可能：

1. 唯一解（只有零解），这等价于 $r(A) = n$；
2. 无穷个解（有非零解），这等价于 $r(A) < n$.

齐次线性方程组的解

定理 齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解有两种可能：

1. 唯一解（只有零解），这等价于 $r(A) = n$；
2. 无穷个解（有非零解），这等价于 $r(A) < n$.

因此如果 $m < n$，则方程组一定有无穷个解.

线性方程组求解方法

用初等行变换求方程组的解的方法如下：

1. 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵.

线性方程组求解方法

用初等行变换求方程组的解的方法如下：

1. 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵.
2. 用定理判断方程组是否有解，若无解则不再继续.

线性方程组求解方法

用初等行变换求方程组的解的方法如下：

1. 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵.
2. 用定理判断方程组是否有解，若无解则不再继续.
3. 用初等行变换将阶梯形矩阵化为最简形矩阵.

线性方程组求解方法

用初等行变换求方程组的解的方法如下：

1. 用初等行变换将增广矩阵化为阶梯形矩阵.
2. 用定理判断方程组是否有解，若无解则不再继续.
3. 用初等行变换将阶梯形矩阵化为最简形矩阵.
4. 将非零行首个非零元素对应的 x_i 留在左边，其他 x_i 移到方程右边，得到基础解系，并得到全部解.

线性方程组求解方法

阶梯形矩阵是指：

1. 每个非零行的首个非零元素下边都是零；
2. 若有全零行，则它们都在非零行的下边.

线性方程组求解方法

阶梯形矩阵是指：

1. 每个非零行的首个非零元素下边都是零；
2. 若有全零行，则它们都在非零行的下边.

最简形矩阵是指：

1. 该矩阵为阶梯形矩阵；
2. 每个非零行的首个非零元素为 1，且它所在列的其他元素都为零.

第一章 行列式

第二章 矩阵

第三章 线性方程组

第四章 特征值

第五章 二次型

特征值和特征向量

定义 1　设 A 为 n 阶矩阵，如果存在数 λ 和 n 维非零列向量 α，使得

$$A\alpha = \lambda\alpha,$$

则称 λ 为 A 的一个特征值，称 α 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

特征值和特征向量

定义 1　设 A 为 n 阶矩阵，如果存在数 λ 和 n 维非零列向量 α，使得

$$A\alpha = \lambda\alpha,$$

则称 λ 为 A 的一个特征值，称 α 为 A 的对应于特征值 λ 的特征向量.

---

1. λ 为 A 的特征值当且仅当 λ 满足 $|\lambda I - A| = 0$;
2. α 为 λ 对应的特征向量当且仅当 α 是齐次线性方程组 $(\lambda I - A)x = 0$ 的非零解.

相似矩阵

定义 2　对矩阵 A 和 B，若有可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 和 B 相似，记为 $A \sim B$.

相似矩阵

定义 2　对矩阵 A 和 B，若有可逆矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = B,$$

则称 A 和 B 相似，记为 $A \sim B$.

定理 1　相似的矩阵有相同的秩、行列式、特征值和可逆性.

矩阵的相似对角化

定义　若 A 与对角阵相似，则称 A 可以相似对角化.

矩阵的相似对角化

定义 若 A 与对角阵相似，则称 A 可以相似对角化.

定理 设 A 为 n 阶矩阵，则下列各个结论互相等价：

1. 矩阵 A 可以相似对角化

矩阵的相似对角化

定义 若 A 与对角阵相似，则称 A 可以相似对角化.

定理 设 A 为 n 阶矩阵，则下列各个结论互相等价：

1. 矩阵 A 可以相似对角化
2. 矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量

矩阵的相似对角化

定义 若 A 与对角阵相似，则称 A 可以相似对角化.

定理 设 A 为 n 阶矩阵，则下列各个结论互相等价：

1. 矩阵 A 可以相似对角化
2. 矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量
3. 每个 n_i 重特征值可求出 n_i 个线性无关特征向量

矩阵的相似对角化

定义 若 A 与对角阵相似，则称 A 可以相似对角化.

定理 设 A 为 n 阶矩阵，则下列各个结论互相等价：

1. 矩阵 A 可以相似对角化
2. 矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量
3. 每个 n_i 重特征值可求出 n_i 个线性无关特征向量
4. 每个 n_i 重特征值 λ_i 满足 $r(\lambda_i I - A) = n - n_i$

矩阵的相似对角化

定义 若 A 与对角阵相似，则称 A 可以相似对角化.

定理 设 A 为 n 阶矩阵，则下列各个结论互相等价：

1. 矩阵 A 可以相似对角化
2. 矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量
3. 每个 n_i 重特征值可求出 n_i 个线性无关特征向量
4. 每个 n_i 重特征值 λ_i 满足 $r(\lambda_i I - A) = n - n_i$

推论 若矩阵 A 有 n 个互不相同的特征值，则 A 可以相似对角化.

实对称阵的对角化

结论 1　实对称阵都可以相似对角化：即对于任何实对称阵 A，总存在一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.

实对称阵的对角化

结论 1　实对称阵都可以相似对角化：即对于任何实对称阵 A，总存在一个可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 为对角阵.

结论 2　实对称阵都可以正交对角化：即对于任何实对称阵 A，总存在一个正交矩阵 Q，使得 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ 为对角阵.

对于线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，我们可以通过施密特正交化方法将它变成正交向量组：

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\alpha_2^{\mathrm{T}}\beta_1}{\beta_1^{\mathrm{T}}\beta_1}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{\alpha_3^{\mathrm{T}}\beta_1}{\beta_1^{\mathrm{T}}\beta_1}\beta_1 - \frac{\alpha_3^{\mathrm{T}}\beta_2}{\beta_2^{\mathrm{T}}\beta_2}\beta_2$$

$$\cdots$$

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{\alpha_n^{\mathrm{T}}\beta_1}{\beta_1^{\mathrm{T}}\beta_1}\beta_1 - \frac{\alpha_n^{\mathrm{T}}\beta_2}{\beta_2^{\mathrm{T}}\beta_2}\beta_2 \cdots - \frac{\alpha_n^{\mathrm{T}}\beta_{n-1}}{\beta_{n-1}^{\mathrm{T}}\beta_{n-1}}\beta_{n-1}$$

例 1　设 3 阶方阵 A 的特征值分别为 $1, 2, -3$, 矩阵 $B = A^3 - 7A + 5I$, 求 B.

例 1　设 3 阶方阵 A 的特征值分别为 $1, 2, -3$, 矩阵 $B = A^3 - 7A + 5I$, 求 B.

解答　3 阶方阵 A 有 3 个不同的特征值，则 A 可对角化，即存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix},$$

例 1　设 3 阶方阵 A 的特征值分别为 $1, 2, -3$, 矩阵 $B = A^3 - 7A + 5I$, 求 B.

解答　3 阶方阵 A 有 3 个不同的特征值，则 A 可对角化，即存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix},$$

即 $A = P\Lambda P^{-1}$. 因此

$$B = P(\Lambda^3 - 7\Lambda + 5I)P^{-1}.$$

例 1 设 3 阶方阵 A 的特征值分别为 $1, 2, -3$, 矩阵 $B = A^3 - 7A + 5I$, 求 B.

解答 3 阶方阵 A 有 3 个不同的特征值，则 A 可对角化，即存在可逆矩阵 P 使得

$$P^{-1}AP = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & -3 \end{pmatrix},$$

即 $A = P\Lambda P^{-1}$. 因此

$$B = P(\Lambda^3 - 7\Lambda + 5I)P^{-1}.$$

而 $\Lambda^3 - 7\Lambda + 5I = -I$, 所以

$$B = P(-I)P^{-1} = -PP^{-1} = -I.$$

第一章 行列式

第二章 矩阵

第三章 线性方程组

第四章 特征值

第五章 二次型

第五章	二次型
5.1	二次型的标准形
5.2	二次型的有定性

二次型与对称阵

定理　n 元二次型与 n 阶对称矩阵一一对应.

二次型与对称阵

定理 n 元二次型与 n 阶对称矩阵一一对应.

$$x^{\mathrm{T}}Ax=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n \\ &\quad\ +\quad a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n \\ &\quad\ +\quad\ \cdots\quad\ +a_{nn}x_n^2, \end{aligned}$$

$$=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

线性变换：

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}$$

称矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$ 为线性变换的矩阵，当 $|C| \neq 0$ 时，称线性变换为非退化的或可逆的.

线性变换

将两组 n 元变量写成列向量形式

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则线性变换可以写成 $x = Cy$.

线性变换

将两组 n 元变量写成列向量形式

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则线性变换可以写成 $x=Cy$.

当 $|C|\neq 0$ 时，线性变换为非退化的，此时有

$$y=C^{-1}x.$$

定义 若线性变换是非退化的，且 $y^{\mathrm{T}}By$ 有下面形状：

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2$$

其中 $d_i\neq 0$（$i=1,2,\cdots,r$，$r\leqslant n$），则称它为二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的一个标准形.

定义 若线性变换是非退化的，且 $y^{\mathrm{T}}By$ 有下面形状：

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ry_r^2$$

其中 $d_i\neq 0$（$i=1,2,\cdots,r$，$r\leqslant n$），则称它为二次型 $f=x^{\mathrm{T}}Ax$ 的一个标准形.

定义 设 A,B 是两个方阵，如果存在一个可逆矩阵 C 使得 $C^{\mathrm{T}}AC=B$，我们就称矩阵 A 和 B 相合（或者称为合同），记为 $A\simeq B$.

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline I \end{pmatrix}$$

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_1]{\text{行变换}P_1^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_1^{\mathrm{T}}AP_1 \\ \hdashline IP_1 \end{pmatrix}$$

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_1]{\text{行变换}P_1^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_1^{\mathrm{T}}AP_1 \\ \hdashline IP_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_2]{\text{行变换}P_2^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}AP_1P_2 \\ \hdashline IP_1P_2 \end{pmatrix}$$

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_1]{\text{行变换}P_1^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_1^{\mathrm{T}}AP_1 \\ \hdashline IP_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_2]{\text{行变换}P_2^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}AP_1P_2 \\ \hdashline IP_1P_2 \end{pmatrix}$$

$$\cdots \xrightarrow[\text{列变换}P_s]{\text{行变换}P_s^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_s^{\mathrm{T}}\cdots P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}AP_1P_2\cdots P_s \\ \hdashline IP_1P_2\cdots P_s \end{pmatrix}$$

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_1]{\text{行变换}P_1^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_1^{\mathrm{T}}AP_1 \\ \hdashline IP_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_2]{\text{行变换}P_2^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}AP_1P_2 \\ \hdashline IP_1P_2 \end{pmatrix}$$

$$\cdots \xrightarrow[\text{列变换}P_s]{\text{行变换}P_s^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_s^{\mathrm{T}}\cdots P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}AP_1P_2\cdots P_s \\ \hdashline IP_1P_2\cdots P_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ \hdashline C \end{pmatrix}$$

初等变换法求标准形

对下面 $2n \times n$ 矩阵的 A 作初等行变换，再对 A 作对应的初等列变换，逐步进行可以得到

$$\begin{pmatrix} A \\ \hdashline I \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_1]{\text{行变换}P_1^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_1^{\mathrm{T}}AP_1 \\ \hdashline IP_1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{列变换}P_2]{\text{行变换}P_2^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}AP_1P_2 \\ \hdashline IP_1P_2 \end{pmatrix}$$

$$\cdots \xrightarrow[\text{列变换}P_s]{\text{行变换}P_s^{\mathrm{T}}} \begin{pmatrix} P_s^{\mathrm{T}}\cdots P_2^{\mathrm{T}}P_1^{\mathrm{T}}AP_1P_2\cdots P_s \\ \hdashline IP_1P_2\cdots P_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \\ \hdashline C \end{pmatrix}$$

从而求出对角阵 B 和变换矩阵 C，使得 $C^{\mathrm{T}}AC = B$.

定义 若线性变换的系数矩阵是正交矩阵，则称该线性变换为**正交变换**.

定义 若线性变换的系数矩阵是正交矩阵，则称该线性变换为**正交变换**.

定理 1 对于二次型 $f(x)=x^{\mathrm{T}}Ax$，必定存在一个正交矩阵 Q，使得经过正交线性变换 $x=Qy$ 后变成标准形

$$f(y)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是二次型 $f(x)$ 的矩阵 A 的全部特征值.

规范形

定理 2　任何一个二次型都可以通过可逆线性变换变为规范形，并且规范形是唯一的，由二次型本身所决定，与所作的可逆线性变换无关.

规范形

定理 2　任何一个二次型都可以通过可逆线性变换变为规范形，并且规范形是唯一的，由二次型本身所决定，与所作的可逆线性变换无关.

定义 1　规范形 $y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$ 中正项的总个数 p，称为二次型的正惯性指数，而规范形中负项的总个数 $r-p$，称为二次型的负惯性指数，其中 r 是二次型的秩.

第五章	二次型
5.1	二次型的标准形
5.2	二次型的有定性

定义 设对应于对称矩阵 A 的二次型为 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$

1. 如果 $f > 0$，对所有 $x \neq 0$，则称 A（二次型）是正定的；
2. 如果 $f < 0$，对所有 $x \neq 0$，则称 A（二次型）是负定的；
3. 如果 $f \geqslant 0$，对所有 x，则称 A（二次型）是半正定的；
4. 如果 $f \leqslant 0$，对所有 x，则称 A（二次型）是半负定的.

定义 设对应于对称矩阵 A 的二次型为 $f = x^{\mathrm{T}}Ax$

1. 如果 $f > 0$，对所有 $x \neq 0$，则称 A（二次型）是正定的；
2. 如果 $f < 0$，对所有 $x \neq 0$，则称 A（二次型）是负定的；
3. 如果 $f \geqslant 0$，对所有 x，则称 A（二次型）是半正定的；
4. 如果 $f \leqslant 0$，对所有 x，则称 A（二次型）是半负定的.

如果上述之一成立，称对称矩阵或者二次型是有定的，否则称为不定的.

二次型有定性的判别准则一：标准形方法

	标准形 $y^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} y$	正交标准形 $y^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} y$	规范形 $y^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_q & \\ & & O \end{pmatrix} y$
正定	$d_i > 0, \forall i$	$\lambda_i > 0, \forall i$	$p = n$
负定	$d_i < 0, \forall i$	$\lambda_i < 0, \forall i$	$q = n$
半正定	$d_i \geqslant 0, \forall i$	$\lambda_i \geqslant 0, \forall i$	$q = 0$
半负定	$d_i \leqslant 0, \forall i$	$\lambda_i \leqslant 0, \forall i$	$p = 0$

二次型有定性的判别准则二：主子式方法

定理

1. 对称阵为正定的 $\Longleftrightarrow$ 所有顺序主子式 $A_k > 0$;
2. 对称阵为负定的 $\Longleftrightarrow$ 所有 $(-1)^k A_k > 0$;
3. 对称阵为半正定的 $\Longleftrightarrow$ 所有主子式 $\geqslant 0$;
4. 对称阵为半负定的 $\Longleftrightarrow$ 所有主子式 $\leqslant 0$.