线性代数课程

应用：奇异值分解

2019 年 5 月 1 日

■ 暨南大学数学系 ■ 吕荐瑞

照片文件的大小

例子　小明手机的摄像头是 1300 万像素的，则一张照片的大小是多少？

照片文件的大小

例子　小明手机的摄像头是 1300 万像素的，则一张照片的大小是多少？

- 每种颜色可用红、绿、蓝按不同比例混合得到.

照片文件的大小

例子　小明手机的摄像头是 1300 万像素的，则一张照片的大小是多少？

- 每种颜色可用红、绿、蓝按不同比例混合得到.
- 每个像素的颜色需要用 3 个字节来表示.

照片文件的大小

例子　小明手机的摄像头是 1300 万像素的，则一张照片的大小是多少？

- 每种颜色可用红、绿、蓝按不同比例混合得到.
- 每个像素的颜色需要用 3 个字节来表示.
- 每张 1300 万像素的照片大约为 37 兆大小.

照片文件的大小

例子　小明手机的摄像头是 1300 万像素的，则一张照片的大小是多少？

- 每种颜色可用红、绿、蓝按不同比例混合得到.
- 每个像素的颜色需要用 3 个字节来表示.
- 每张 1300 万像素的照片大约为 37 兆大小.

但是，小明手机里每张照片的实际大小均在 5 兆左右！

照片文件的大小

例子　小明手机的摄像头是 1300 万像素的，则一张照片的大小是多少？

- 每种颜色可用红、绿、蓝按不同比例混合得到.
- 每个像素的颜色需要用 3 个字节来表示.
- 每张 1300 万像素的照片大约为 37 兆大小.

但是，小明手机里每张照片的实际大小均在 5 兆左右！

问题　如何减少照片文件的大小，且尽量保持不失真？

对称阵的特征值分解

若 A 为 n 阶实对称阵，则存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^T A Q = \Lambda, \quad \text{其中} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

对称阵的特征值分解

若 A 为 n 阶实对称阵，则存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^T A Q = \Lambda, \quad \text{其中} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

不妨设 $Q = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$r(A) = r$，

对称阵的特征值分解

若 A 为 n 阶实对称阵，则存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^TAQ=\Lambda, \quad 其中 \quad \Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

不妨设 $Q=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$r(A)=r$，而 $\lambda_1,\cdots,\lambda_r$ 为全部非零特征值.

对称阵的特征值分解

若 A 为 n 阶实对称阵，则存在正交矩阵 Q，使得

$$Q^T A Q = \Lambda, \quad \text{其中} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

不妨设 $Q = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$r(A) = r$，而 $\lambda_1, \cdots, \lambda_r$ 为全部非零特征值．则有

$$A = Q\Lambda Q^{\mathrm{T}} = \lambda_1 \alpha_1 \alpha_1^{\mathrm{T}} + \cdots + \lambda_r \alpha_r \alpha_r^{\mathrm{T}}$$

矩阵的奇异值分解

若 A 为 $m \times n$ 的实矩阵，则 $A^{\mathrm{T}}A$ 为对称阵.

矩阵的奇异值分解

若 A 为 $m \times n$ 的实矩阵，则 $A^{\mathrm{T}}A$ 为对称阵．因此存在正交矩阵 V，使得

$$V^T A^{\mathrm{T}} A V = \Lambda, \quad \text{其中} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

矩阵的奇异值分解

若 A 为 $m \times n$ 的实矩阵，则 $A^{\mathrm{T}}A$ 为对称阵．因此存在正交矩阵 V，使得

$$V^T A^{\mathrm{T}} A V = \Lambda, \quad \text{其中} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

其中 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为对称阵 $A^{\mathrm{T}}A$ 的全部特征值．

矩阵的奇异值分解

若 A 为 $m \times n$ 的实矩阵，则存在 m 阶正交矩阵 U 和 n 阶正交矩阵 V，以及 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$，使得

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}},\ \text{其中}\ \Sigma = \begin{pmatrix} D & \\ & O \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

矩阵的奇异值分解

若 A 为 $m \times n$ 的实矩阵，则存在 m 阶正交矩阵 U 和 n 阶正交矩阵 V，以及 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$，使得

$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，其中 $\Sigma = \begin{pmatrix} D & \\ & O \end{pmatrix}$，$D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}$.

称 σ_i 为矩阵的奇异值，称上式为矩阵的奇异值分解.

矩阵的奇异值分解

若 A 为 $m \times n$ 的实矩阵，则存在 m 阶正交矩阵 U 和 n 阶正交矩阵 V，以及 $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r > 0$，使得

$$A = U\Sigma V^{\mathrm{T}},\ 其中\ \Sigma = \begin{pmatrix} D & \\ & O \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}.$$

称 σ_i 为矩阵的奇异值，称上式为矩阵的奇异值分解.

令 $U = (u_1, \cdots, u_m)$, $V = (v_1, \cdots, v_n)$. 则有

$$A = \sigma_1 u_1 v_1^{\mathrm{T}} + \sigma_2 u_2 v_2^{\mathrm{T}} + \cdots + \sigma_r u_r v_r^{\mathrm{T}}$$

莱娜图

Lena

Söderberg

1972 年

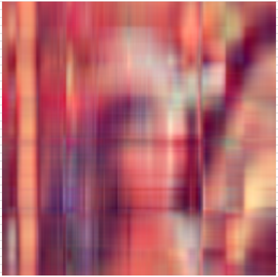
原图

$$
\begin{aligned}
A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r \\
= \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T \\
+ \cdots + \sigma_r u_r v_r^T
\end{aligned}
$$

原图

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$$
$$= \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T$$
$$+ \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

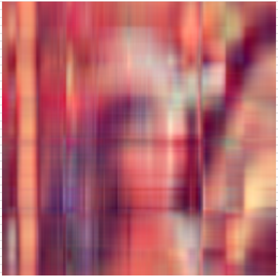
前 2%



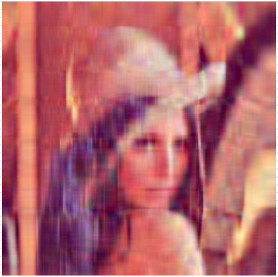
原图

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$$
$$= \sigma_1 u_1 v_1^T + \sigma_2 u_2 v_2^T$$
$$+ \cdots + \sigma_r u_r v_r^T$$

前 2%



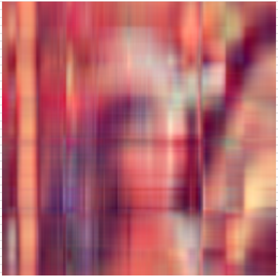
前 5%



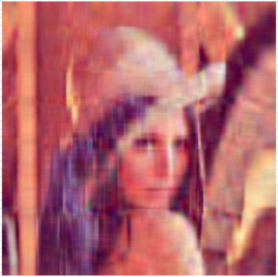
原图

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_r$$
$$= \sigma_1 u_1 v_1^{\mathrm{T}} + \sigma_2 u_2 v_2^{\mathrm{T}} + \cdots + \sigma_r u_r v_r^{\mathrm{T}}$$

前 2%



前 5%



前 10%

例子 设 $a_{ij}=1$，对所有 i,j. 即

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

则 $A^{\mathrm{T}}A$ 仅有一个非零特征值 $\lambda_1=mn$. 因此 $\sigma_1=\sqrt{mn}$，且有奇异值分解

$$A=\sqrt{mn}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \\ \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{m}} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{n}} \end{pmatrix}$$